The 26th Annual Meeting in Mathematics
and
The 1st International Annual Meeting in Mathematics 2022
(AMM 2022)

Conference Proceedings

"Frontiers in Mathematics for Smart and Sustainable Development"

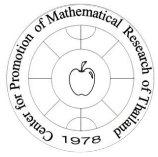
คณิตศาสตร์แนวหน้าสำหรับการพัฒนาแบบฉลาดและยั่งยืน

May 18-20, 2022

การจัดประชุมวิชาการนานาชาติ ครั้งที่ 1
จัดโดย สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์
ร่วมกับ สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี
และสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา

AMM 2022

การประชุมวิชาการทางคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 26 ประจำปี 2565



รายงานการประชุม

สารบัญ -- Table of Contents

รายนามผู้สนับสนุน -- List of Sponsors 1

สารจากอธิการบดี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี 2
Message from the Rector, Suranaree University of Technology

สารจากนายกสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ 4
Message from the President of the Mathematical Association of Thailand Under Patronage of His Majesty the King

สารจากอธิการ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา 5
Message from the Rector of Nakhon Ratchasima Rajabhat University

สารจากผู้อำนวยการศูนย์ส่งเสริมการวิจัยคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย 6
Message from the Director of the Center for Promotion of Mathematical Research of Thailand

สารนำจากคณะกรรมการจัดการประชุมฯ
Message from the Conference Organizing Committee 7

สารบัญ -- Table of Contents 8

กำหนดการ -- Conference Schedule 9

Keynote Speakers 14

Invited Speakers 17

Part I: Proceedings of the 26th Annual Meeting in Mathematics 20

Part II: Proceedings of the 1st International Annual Meeting in Mathematics 417

คณะกรรมการจัดการประชุมฯ --- Conference Committees A

Proceedings of the 26th Annual Meeting in Mathematics

สารบัญ -- Table of Contents

01 Algebra and Number Theory (AN)

AN-N-01 Solutions to a Quadratic Equation over Finite Fields 1
Puchong Wongkumpra and Detchat Samart

AN-N-08 The Weak First Exponential Law of Mixed Product of *n*-ary Hyperalgebras Carried by Good Homomorphisms 12
Nitima Phrommarat and Thanwarat Butsan

AN-N-10 Iterative Algorithm for Polynomial Modular Inversion Modulo $x^{p^r} - 1$ Over Finite Field of order *p* 21
Samakorn Sripatthanakul and Wutichai Chongchitmate

02 Geometry and Graph Theory (GG)

GG-N-01 Some Families of Self-Clique Graphs whose Clique Size Sequence is (2,...,2,3,3,3) 27
Sajika Tubtim, Sirirat Singhun and Ratinan Boonklurb

GG-N-02 Charges of Semistandard Young Tableaux of Certain Shapes and Contents 36
Nattanon Tualue and Ouamporn Phuksuwan

04 Differential Equations and Dynamical Systems (DE)

DE-N-01 Algebraic Independence of Solutions of Certain Second Order Homogeneous Linear Differential Equations with Linear Coefficients 50
Phisitphong Ketrat and Vichian Laohakosol

DE-N-03 Beyond Quenching Profile for Singular Semilinear Parabolic Problem With Mixed Boundary Conditions 62
Benjamin Thaitavorn and Ratinan Boonklurb

05 Mathematical Modeling and Numerical Mathematics (MN)

MN-N-01 Numerical Simulation of Water Quality in a Couple of Ponds of Shrimp Farming 70
Nattinee Sittijinda and Nopparat Pochai

MN-N-02	A Non-Dimensional Mathematical Model of Shoreline Evolution with a Groin Structure *Surasak Manilam and Nopparat Pochai*	81
MN-N-03	การเลือกตำแหน่งที่ตั้งและจำนวนหัวชาร์จของรถยนต์ไฟฟ้าที่เหมาะสมในกรุงเทพมหานคร *ณิชากร ชัยบัญชากิจ, พศิกาญจน์ ทับประดง, ณัฏฐ์ เหลืองสวัสดิพร, และ สายฝน จาตุรันตบุตร*	90
MN-N-05	แบบจำลองการแพร่กระจายผู้ติดเชื้อโควิด-19 ภายใต้ภาวะควบคุมการระบาดด้วยการฉีดวัคซีน *ธนาทร อินทรปัญญา, อภิชาต ศุรธณี, สิทธิพร ภัทรดิลกรัตน และ กิติพร พลายมาศ*	115
MN-N-06	A Mathematical Model for Measuring Carbon Dioxide Concentration in a Bus Due to Passengers Breathing *Jenjira Sooknum and Nopparat Pochai*	132
MN-N-07	Numerical Algorithm Based on Finite Integration Method Using Shifted Chebyshev Expansion for Solving Moving Boundary Problems *Warunya Wong-u-ra and Ratinan Boonklurb*	141
MN-N-08	The Simplex Method with the Minimal Angle Jump for Solving Linear Programming Problems *Monsicha Tipawanna and Krung Sinapiromsaran*	153
MN-N-09	โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจและ การประยุกต์ใช้โปรแกรมภาษา C++ เพื่อช่วยใน การหาผลเฉลยของปัญหาทางคณิตศาสตร์ *อมรรัตน์ สุริยวิจิตรเศรณี และ เจษฎา ตัณฑนุช*	163

06 Probability Theory (PR)

PR-N-01	การเปรียบเทียบการทดสอบค่ากลางของประชากรสองกลุ่มที่เป็นอิสระกันเมื่อตัวอย่างทีขนาดเล็กมาก *มนต์นภา พงษ์พรรณากูล และ วนิดา พงษ์ศักดิ์ชาติ*	176
PR-N-02	An Improvement of the Error Bound of Local Limit Theorems for Sums of Independent Lattice Random Variables *Punyapat Kammoo, Kritsana Neammanee and Kittipong Laipaporn*	187

PR-N-03	Poisson Approximation for Sums of Independent Non-Negative Integer-valued Random Variables *Supavit Kiatteerarat, Kritsana Neammanee and Suporn Jongpreechaharn*	197
PR-N-04	การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแผนภาพกล่องสำหรับการตรวจสอบค่านอกเกณฑ์ *ทศวรรษ ณ บางชาง และ บำรุงศักดิ์ เผื่อนอารีย*	206
PR-N-05	A Local Limit Theorem for Negative Binomial Random Sums *Hattacha Kongjiw, Petcharat Rattanawong and Kritsana Neammanee*	218

07 Data Science and Statistics (DS)

DS-N-01	โครงข่ายประสาทเทียมสำหรับการวิเคราะห์การถดถอยเชิงเส้นตามบริบทนัยทั่วไป *ชยานนท์ ขัตติยาภิรักษ์ และ เสกสรร เกียรติสุไพบูลย*	228
DS-N-02	การทำนายราคาของหลักทรัพย์โดยวิศวกรรมคุณลักษณะและเทคนิคการเรียนรู้ของเครื่อง *รัชพล ปริโยทัย และ เบญจวรรณ โรจนดิษฐ*	243
DS-N-04	โครงข่ายประสาทเทียมเชิงพยากรณ์แบบปรับปรุงโดยใช้การเลือกสับเซตที่ดีที่สุด *พรชิตา ธนากร, สุปราณี ลิสวัสดิ์ และ พัทธ์ชนก ศรีสุรเดชชัย*	263
DS-N-05	การทำนายโรคเบาหวานโดยใช้วิศวกรรมคุณลักษณะสำหรับขั้นตอนวิธีการจำแนกในการเรียนรู้ของเครื่อง *คุณาภรณ์ พันธ์เพียร, จักรกฤษณ์ พลรบ และ เจษฎา ตัณฑนุช*	278
DS-N-06	การเฉลี่ยตัวแบบบนต้นไม้การถดถอยสำหรับการพยากรณ์ *ชนินทร แกววิบูลยพันธุ์, สุปราณี ลิสวัสดิ์ และ พัทธชนก ศรีสุรเดชชัย*	290
DS-N-08	การวิเคราะห์พื้นที่ที่เหมาะสมสำหรับการปลูกยางพาราตามปัจจัยสภาพภูมิอากาศด้วยวิธีการตัดสินใจแบบหลายหลักเกณฑ์ *พรทิพย์ เดชพิชัย, กัญญาวีร์ คำสนอนันตกุล, ธัญชนก ชัยกูล และ บิลกีส วงษ์พิรำ*	316
DS-N-09	การวิเคราะห์ความรู้สึกที่มีต่อการทำประกันภัยด้วยเทคนิคการเรียนรู้เชิงลึก กรณีศึกษากระทู้ออนไลน์พันทิป *คงภพ ไชยศร และ บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ*	321

DS-N-10	การเปรียบเทียบตัวแบบ SARIMAX และตัวแบบแยกส่วนประกอบร่วมกับ SARIMAX ในการพยากรณ์ค่าสินไหมทดแทนของธุรกิจประกันภัยรถยนต์ในประเทศไทย *นิฉา แกวหาวงษ์, ไอริณ สิมสีแก้ว, ณัฐกิตติ์ การเร็ว และ วรรณกานต์ วงศ์เสนา*	332
DS-N-11	การศึกษาและพัฒนาระบบการจัดการงานสินไหมในกรณีความเสียหายหนัก ของการประกันภัยรถยนต์ *เบญจมาภรณ์ ศรีอัมพร, บุษยมาส พิมพ์พรรณชาติ และ เทิดขวัญ ช้างเผือก*	346

08 Mathematics Education (ED)

ED-N-01	การพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้การศึกษาชั้นเรียนและวิธีการแบบเปิด *กนกวรรณ รัตนจำนอง, วิภาพร สุทธิอัมพร และ สุริพร บุญเมือง*	358
ED-N-02	การพัฒนาชุดการเรียนรู้ด้วยตนเองเรื่องเรขาคณิตสำหรับผู้เรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายโดยเปรียบเทียบมโนทัศน์เรขาคณิตแบบฉบับและเรขาคณิตวิเคราะห์ *วุฒิชัย ไชยปญญา และ ศุภณัฐ ชัยดี*	366
ED-N-03	การคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในชั้นเรียนที่จัดการเรียนรู้แบบผสมผสานด้วยวิธีการแบบเปิด *ธัญญารัตน์ ถ่องแท้, สุดาทิพย์ หาญเชิงชัย และศศลักษณ์ ขลิกดำ*	381

Proceedings of the
26th Annual Meeting in Mathematics (AMM 2022)
School of Mathematics, Institute of Science
Suranaree University of Technology, Thailand

โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจและการประยุกต์ใช้โปรแกรมภาษา C++ เพื่อช่วยในการหาผลเฉลยของปัญหาทางคณิตศาสตร์

อมรรัตน์ สุริยวิจิตรเศรณี[†,‡] เจษฎา ตัณฑนุช

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สำนักวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี 30000

บทคัดย่อ

โจทย์ปัญหาที่ใช้ในการเรียนการสอน และการสอบแข่งขันทางคณิตศาสตร์หลาย ๆ โจทย์ปัญหามีความซับซ้อนสำหรับนักเรียน นักศึกษา รวมไปถึงคุณครูผู้สอนบางท่าน บทความนี้ได้นำเสนอโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ 6 ปัญหา ได้แก่ ปัญหาการจัดหมู่ ปัญหานับจำนวน ปัญหาเลขฐานจำนวนเฉพาะ ปัญหาจำนวนเฉพาะแฝด วิทยาการรหัสลับ และ ปัญหาการกระจายไตรภาคได้ดุล ทั้งนี้ยังได้แสดงให้เห็นความเชื่อมโยงของเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ การหาผลเฉลย การประยุกต์ รวมไปถึงการประยุกต์ใช้โปรแกรมภาษา C++ ที่ได้พัฒนาขึ้นเพื่อช่วยในการหาผลเฉลยและตรวจสอบผลเฉลยของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่นำเสนอ

คำสำคัญ: คณิตศาสตร์, โจทย์ปัญหา, โปรแกรมภาษา C++

2020 MSC: ปฐมภูมิ 97N60 ทุติยภูมิ 97N70, 97K20

1 บทนำ

การเรียนรู้ยุคปัจจุบันในทุกช่วงวัยมุ่งเน้นให้ผู้เรียนมีทักษะการเรียนรู้ด้วยตนเองในอนาคต (การเรียนรู้ตลอดชีวิต) ประกอบกับเทคโนโลยีที่ถูกพัฒนาอย่างก้าวกระโดดทำให้ทุกคนสามารถค้นคว้าข้อมูลและเรียนรู้ได้อย่างไม่มีขอบเขต รวมไปถึงการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นตลอดเวลา จึงจำเป็นที่ต้องพัฒนาประชากรให้มีทั้งทักษะ ความรู้ ความสามารถอย่างต่อเนื่อง (Mawas และ Muntean, 2018) กิจกรรมการเรียนรู้แต่ละครั้งมีวัตถุประสงค์ที่แตกต่างกัน ผู้สอนเอง

[†]ผู้นำเสนอ [‡]ผู้แต่งหลัก
อีเมล: amornrat@g.sut.ac.th , jessada@g.sut.ac.th

ต้องหาแนวทางในการวัดและประเมินผลผู้เรียนให้บรรลุวัตถุประสงค์การเรียนรู้ที่ตั้งไว้ สำหรับผู้เรียนต้องการเข้าใจเนื้อหาที่เรียนและสามารถทำผลการเรียนให้ดี หากเป็นการสอบแข่งขันก็ต้องการให้ผ่านการสอบ ซึ่งการวัดและประเมินผลในการจัดการเรียนการสอนมีหลายรูปแบบทั้งการวัดผลระหว่างเรียนผ่านกิจกรรมหรือโจทย์ปัญหา รวมถึงวัดผลที่รวมความรู้หลายหัวข้อตอนท้ายบทเรียนโดยการสอบ ในวิชาคณิตศาสตร์เองก็มีลักษณะการวัดและประเมินผลดังที่กล่าวมา ซึ่งโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการเรียนการสอน หรือการสอบแข่งขันบางครั้งมีความซับซ้อนต้องใช้การคิดวิเคราะห์หาแนวทางในการหาผลเฉลย การได้ฝึกฝนแก้ปัญหาโจทย์ทางคณิตศาสตร์เป็นการส่งเสริมทักษะกระบวนการคิดให้แก่ผู้เรียนเป็นอย่างมาก ผู้สอนจำเป็นต้องส่งเสริมทักษะนี้ในกระบวนการสอน แม้ว่าจะมีอีกหลายทักษะที่ต้องสอดแทรกไปในการจัดการเรียนการสอนด้วยเช่นกัน การสอนที่มีประสิทธิภาพลักษณะหนึ่งคือการเรียนรู้เชิงรุก (active learning) ที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนเรียนรู้ด้วยตนเองอย่างอิสระ เรียนรู้ตลอดชีวิตและคิดอย่างมีวินัย (Hammer และคณะ, 2010) แต่การจัดการเรียนการสอนที่ดึงดูดให้ผู้เรียนมีส่วนร่วม มีการเชื่อมโยงเนื้อหาทางคณิตศาสตร์หลายหัวข้อเข้าด้วยกันต้องมีการวางแผนการสอนซึ่งเป็นภาระการเตรียมสอนที่ท้าทายสำหรับผู้สอน การประยุกต์ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการหาผลเฉลยและตรวจสอบผลเฉลยของปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นอีกทางเลือกหนึ่งของผู้สอนที่สามารถนำไปใช้สร้างโจทย์ที่ใกล้เคียงกัน หรือเพิ่มโจทย์ที่หลากหลายให้กับผู้เรียนได้ฝึกแก้ปัญหา ได้ร่วมกันคิดและวิพากษ์ในชั้นเรียนเป็นการส่งเสริมทักษะต่าง ๆ ให้กับผู้เรียน โดยเฉพาะโจทย์ปัญหาที่มีแนวทางการหาผลเฉลยได้หลากหลายวิธีที่ผู้สอนต้องนำแนวคิดที่หลากหลายเหล่านั้นมาสรุปและยืนยันความถูกต้อง ซึ่งโปรแกมคอมพิวเตอร์สามารช่วยตรวจสอบผลเฉลยได้อย่างดี ในส่วนของผู้เรียนเองก็สามารถใช้แนวทางนี้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่อาจพบในหรือนอกห้องเรียนรวมถึงการสอบแข่งขันต่าง ๆ บทความนี้ได้นำเสนอโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ 6 ปัญหา ได้แก่ ปัญหาการจัดหมู่ ปัญหานับจำนวน ปัญหาเลขฐานจำนวนเฉพาะ ปัญหาจำนวนเฉพาะแฝด วิทยาการรหัสลับ และ ปัญหาการกระจายไตรภาคได้ดุล ที่ผู้อ่านสามารถจะเลือกนำไปใช้ให้เกิดประโยชน์ในการเรียนการสอน โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่จะกล่าวในบทความนี้เน้น**กระบวนการคิดวิเคราะห์** ซึ่งสามารถเรียนรู้ได้ทุกช่วงวัย รวมทั้งยังเป็นตัวอย่างโจทย์ปัญหาที่ผู้เรียนเข้าถึงได้และอยู่ใกล้ตัว เป็นอีกสิ่งหนึ่งที่จะดึงดูดความสนใจของผู้เรียนให้อยากเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น (Wood, 2019) และทำให้การเรียนรู้บรรลุวัตถุประสงค์ที่ตั้งไว้

2 ความรู้พื้นฐาน

เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ที่สัมพันธ์กับโจทย์ปัญหาที่นำเสนอจะอยู่ในกลุ่มเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ทางด้าน การนับ (counting) การจัดหมู่ (combinatoric) ทฤษฎีจำนวน (number theory) และวิยุตคณิต (discrete mathematics)

หลักการนับพื้นฐาน (basic counting principles) หลักการนับพื้นฐานประกอบไปด้วย 2 วิธีหลักได้แก่ **หลักเกณฑ์การบวก (sum rule)** และ**หลักเกณฑ์การคูณ (product rule)** (Rosen, 2012)

- **หลักเกณฑ์การบวก (sum rule)** สมมติงานที่หนึ่งสามารถทำได้ n_1 วิธี และงานที่สองสามารถทำได้ n_2 วิธี ถ้างานทั้งสองไม่สามารถทำร่วมกันหรือทำต่อเนื่องกัน ดังนั้นจะมีวิธีในการทำงานทั้งหมด $n_1 + n_2$ วิธี

- **หลักเกณฑ์การคูณ (product rule)** สมมติให้มีกระบวนการที่ต้องถูกแบ่งเป็นสองงานย่อยที่ต้องทำตามลำดับ โดยงานที่หนึ่งสามารถทำได้ n_1 วิธี และงานที่สองสามารถทำได้ n_2 วิธี หลังจากทำงานที่หนึ่งดังนั้นจะมีวิธีในการทำงานทั้งหมด $n_1 \times n_2$ วิธี

ฟังก์ชันก่อกำเนิด (generating function) (Rosen, 2012)

ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ $a_0, a_1, ..., a_k, ...$ โดยที่ $a_0, a_1, ..., a_k, ...$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ คือ

$$G(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

จำนวนเฉพาะ (Prime Number) เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งสามารถถูกหารลงตัวได้ด้วยจำนวนเต็มบวกเพียง 2 จำนวน คือ 1 และตัวมันเอง ตัวอย่างจำนวนเฉพาะเช่น 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37 ... (Rosen, 2012)

จำนวนเฉพาะแฝด (Twin Primes) คือ คู่ของจำนวนเฉพาะใด ๆ ที่มีผลต่างเป็น 2 เช่น 3 และ 5, 5 และ 7, 11 และ 13, 17 และ 19, 41 และ 43, 59 และ 61, 71 และ 73, 101 และ 103, 107 และ 109, 137 และ 139, ... (Rosen, 2012)

ทฤษฎีบทมูลฐานของเลขคณิต (Fundamental Theorem of Arithmetic) (Gauss, 1966)

จำนวนเต็มต่าง ๆ ที่มากกว่า 1 สามารถถูกเขียนได้ในรูปของการคูณกันของจำนวนเฉพาะได้เพียงรูปแบบเดียวเท่านั้น เช่น 2 = 2, 55=5x11, 3072 = 2^{10}x3^1

การดำเนินการทวิภาค (Rotman, 2005)

การดำเนินการ $\circ$ เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บน G เมื่อ G ไม่เป็นเซตว่างและ $\circ$ เป็นฟังก์ชันจาก $G \times G$ ไป G

กรุป (Rotman, 2005)

เซต G เป็นกรุป (group) ก็ต่อเมื่อ G เป็นเซตไม่ว่าง และ $\circ$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน G ซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. การดำเนินการ $\circ$ มีสมบัติเปลี่ยนหมู่ (associative) โดยที่ $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ ทุก ๆ $a, b, c \in G$
2. มี $e \in G$ ซึ่ง $a \circ e = e \circ a = a$ ทุก ๆ $a \in G$ โดยเรียก e ว่าเอกลักษณ์ (identity) ของ G
3. สำหรับแต่ละสมาชิก $a \in G$ จะมี $b \in G$ ซึ่ง $a \circ b = b \circ a = e$ โดยเรียก b ว่าตัวผกผัน (inverse) ของ a และมักเขียนตัวผกผันของ a ในรูป a^{-1}

3 ผลการศึกษา

3.1 กระบวนการคิดวิเคราะห์

ในส่วนนี้ขอเสนอโจทย์ปัญหาที่ใช้กระบวนการคิดที่ผู้สอนสามารถนำมาสร้างกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน หรือกิจกรรมสำหรับการจัดนิทรรศการต่าง ๆ ได้ โดยผู้เขียนเสนอแนวคิดที่อธิบายผู้เรียนได้ไม่ยาก บางโจทย์ปัญหาได้ให้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เทียบเท่าและเสนอการเขียนโปรแกรมภาษา C++ เพื่อช่วยให้ผู้สอนใช้เพิ่มโจทย์หรือตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยได้สะดวกยิ่งขึ้น

ปัญหา 3.1.1 การจัดหมู่ (Combination)

โรงงานผลิตแก้วแห่งหนึ่ง ต้องการนำแก้วแบบเดียวกันจำนวน n ใบใส่ในกล่องบรรจุแก้วที่มีความจุต่าง ๆ กัน $b_1, b_2, ..., b_k$ ให้เต็มกล่องพอดี เช่น

ตัวอย่างที่ 1 หากมีแก้ว 5 ใบ และกล่องที่สามารถบรรจุแก้วความจุต่าง ๆ 3 ขนาด ได้แก่ ความจุ 1 ใบ ความจุ 3 ใบ และ ความจุ 4 ใบ โดยมีกล่องดังกล่าวจำนวนมากมายไม่จำกัด เราจะพบว่ามีรูปแบบการจัดหมู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการนำแก้วทั้ง 5 ใบบรรจุในกล่องขนาดต่าง ๆ ให้เต็มกล่องพอดีอยู่ **3 รูปแบบ** ได้แก่

	จำนวนกล่อง		
	กล่องบรรจุ 1 ใบ	กล่องบรรจุ 3 ใบ	กล่องบรรจุ 4 ใบ
แบบที่ 1	5	-	-
แบบที่ 2	2	1	-
แบบที่ 3	1	-	1

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เทียบเท่ากับตัวอย่างที่ 1 ได้แก่

การหาจำนวนเต็ม b_1, b_2, b_3 ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ $b_1 + 3b_2 + 4b_3 = 5$ โดยที่ $b_1, b_2, b_3 \geq 0$

ซึ่งหากใช้เทคนิคการหาผลเฉลยด้วยวิธีฟังก์ชันก่อกำเนิด ก็คือการหาสัมประสิทธิ์ของ x^5 ของพหุนาม

$$\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)\left(1 + x^3\right)\left(1 + x^4\right) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 2x^6 + ... + x^{12}$$

ตัวอย่างที่ 2 แต่ถ้าหากมีแก้ว 10 ใบ และกล่องที่สามารถบรรจุแก้วความจุต่าง ๆ 4 ขนาด ได้แก่ ความจุ 2 ใบ ความจุ 3 ใบ ความจุ 6 ใบและความจุ 7 ใบ โดยมีกล่องแต่ละชนิดอย่างมากมายไม่จำกัด เราจะพบว่ามีรูปแบบการจัดหมู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมดในการนำแผ่นหินทั้ง 10 บรรจุในกล่องขนาดต่าง ๆ ให้เต็มกล่องพอดีอยู่ **4 รูปแบบ** ได้แก่

	จำนวนกล่อง			
	กล่องบรรจุ 2 ใบ	กล่องบรรจุ 3 ใบ	กล่องบรรจุ 6 ใบ	กล่องบรรจุ 7 ใบ
แบบที่ 1	5	-	-	-
แบบที่ 2	2	2	-	-
แบบที่ 3	2	-	1	-
แบบที่ 4	-	1	-	1

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่เทียบเท่ากับตัวอย่างที่ 2 ได้แก่

การหาจำนวนเต็ม b_1, b_2, b_3, b_4 ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ $2b_1 + 3b_2 + 6b_3 + 7b_4 = 10$ โดยที่ $b_1, b_2, b_3, b_4 \geq 0$

ซึ่งหากใช้เทคนิคการหาผลเฉลยด้วยวิธีฟังก์ชันก่อกำเนิด ก็คือการหาสัมประสิทธิ์ของ x^{10} ของพหุนาม

$$\left(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10}\right)\left(1 + x^3 + x^6 + x^9\right)\left(1 + x^6\right)\left(1 + x^7\right) = 1 + x^2 + ... + 4x^{10} + ... + x^{32}$$

.

ตัวอย่างโปรแกรมสำหรับช่วยแก้ปัญหาการจัดหมู่

```
#include <iostream>
using namespace std;
#define max 10
int b[max],k,sum=0,n,num=0;
void think(int level)
{
     if (level==k){
        if (sum==n) num++; }
     else {
        int i;
        for (i=0;i<=n;i++) {
           sum+=i*b[level];
           if (sum<=n) think(level+1);
           sum-=i*b[level];
        }
     }
}
int main()
{
    cout << "n = ";
    cin >> n;
    cout << "how many types of boxes? = ";
    cin >> k;
    int i;
    for (i=0;i<k;i++) {cout << "box" << i+1 << " = "; cin >> b[i];};
    think(0);
    cout << "patterns = " << num;
    return 0;
}
```

ปัญหา 3.1.2 นับจำนวน (Counting)

ในการพิมพ์จำนวนเต็ม เริ่มตั้งแต่ n_1 จนถึง n_2 โดยใช้เครื่องพิมพ์แป้นพิมพ์ ถามว่าจะต้องกดปุ่มเลข k ทั้งหมดเป็นจำนวนกี่ครั้ง

ตัวอย่างที่ 1 ในการพิมพ์จำนวนเต็ม เริ่มตั้งแต่ 1 จนถึง 1997 โดยใช้เครื่องพิมพ์แป้นพิมพ์ ถามว่าจะต้องกดปุ่มเลข 9 ทั้งหมดเป็นจำนวนกี่ครั้ง

คำตอบ 595 ครั้ง

แนวคิด

จำนวนเต็ม	1 – 9	1 – 99	100 - 899	900 - 999	1000 - 1997	รวม
จำนวนครั้งในการกดปุ่ม 9	1	19	20x8=160	1+19+20=120	1+19+160+120–5=295	595

ตัวอย่างที่ 2 ในการพิมพ์จำนวนเต็ม เริ่มตั้งแต่ 2022 จนถึง 2565 โดยใช้เครื่องพิมพ์แป้นพิมพ์ ถามว่าจะต้องกดปุ่มเลข 2 ทั้งหมดเป็นจำนวนกี่ครั้ง

คำตอบ 757 ครั้ง

แนวคิด

จำนวนเต็ม	2022 – 2029	2030 – 2099	2100 – 2199	2200 – 2299	2300 – 2499	2500 – 2565	รวม
จำนวนครั้งในการกดปุ่ม 2	17	70+7= 77	100+20 120	100+120 220	120x2= 240	83	757

ตัวอย่างโปรแกรมสำหรับนับการกดปุ่มแป้นพิมพ์เลข k เมื่อกำหนดช่วงตัวเลขที่ต้องการพิมพ์

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    int chk = 0,start,stop,k;
    cout << "start = "; cin >> start;
    cout << "stop = "; cin >> stop;
    cout << "k = "; cin >> k;
    for (int i=start;i<=stop;i++) {
        int num,temp;
        num = i;
        do {
            temp = num%10;
            if (temp==k) chk++;
            num = num/10;
        } while (num>0);
    }
    cout << chk;
    return 0;
}
```

ปัญหา 3.1.3 เลขฐานจำนวนเฉพาะ (Prime Numbers base)

จากทฤษฎีบทมูลฐานของเลขคณิตตัวเลขจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า 1 แต่ละจำนวนสามารถถูกเขียนได้ในรูปของการคูณกันของจำนวนเฉพาะได้รูปแบบเดียว ซึ่งช่วยให้สามารถคำนวณหาตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) และตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ได้อย่างรวดเร็วขึ้น เช่น หากต้องการหา ค.ร.น. และ ห.ร.ม. ของ 120, 420 และ 500 จะใช้แนวคิดดังนี้เนื่องด้วย

$$120 = 7^0x5^1x3^1x2^3,\ 420 = 7^1x5^1x3^1x2^2 \text{ และ } 500 = 7^0x5^3x3^0x2^2$$

ดังนั้น ค.ร.น. ของชุดเลขดังกล่าวคือ $7^{max(0,1,0)}x5^{max(1,1,3)}x3^{max(1,1,0)}x2^{max(3,2,2)} = 7^1x5^3x3^1x2^3 = 21{,}000$

และ ห.ร.ม. ของชุดเลขดังกล่าวคือ $7^{min(0,1,0)}x5^{min(1,1,3)}x3^{min(1,1,0)}x2^{min(3,2,2)} = 7^0x5^1x3^0x2^2 = 20$

จากข้อมูลข้างต้น ทำให้เราสามารถสร้างระบบเลขฐานแบบใหม่ขึ้นเพื่อแทนที่จำนวนเต็มบวกต่าง ๆ โดยให้แต่ละหลักอ้างอิงถึงจำนวนเฉพาะ โดยแต่ละหลักจะแทนจำนวนเฉพาะเรียงจากมากไปน้อย โดยเรียงจากซ้ายไปทางขวา เช่น

$1 = \cdots x11^0\, x7^0\, x5^0\, x3^0\, x2^0$ เมื่อแปลงให้อยู่ในเลขฐานของจำนวนเฉพาะก็คือ 0

$2 = 2^1$ เมื่อแปลงให้อยู่ในเลขฐานของจำนวนเฉพาะก็คือ 1

$55 = 11^1\, x7^0\, x5^1\, x3^0\, x2^0$ เมื่อแปลงให้อยู่ในเลขฐานของจำนวนเฉพาะก็คือ 10100

$105 = 7^1\, x5^1\, x3^1\, x2^0$ เมื่อแปลงให้อยู่ในเลขฐานของจำนวนเฉพาะก็คือ 1110

$3072 = 3^1\, x2^{10}$ เมื่อแปลงให้อยู่ในเลขฐานของจำนวนเฉพาะก็คือ 1A

หมายเหตุ สำหรับเลขกำลังของจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 9 เราจะใช้อักขระแต่ไปนี้แทน A=10, B=11, C=12, D=13, E=14, F=15, ...

ตัวอย่างโปรแกรมสำหรับแปลงเลขฐาน 10 เป็นเลขฐานจำนวนเฉพาะ

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    int n,p=2,c,i;
    char code[37] = "0123456789ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ";
    string st = "";
    cout << "input n = ";
    cin >> n;
    if (n==1) cout << 0; else
    while (n>1)
    {
        for (i=2;i*i<=p;i++)
            if (p%i==0) {i=1;p++;}
        c = 0;
        while (n%p==0) {c++; n/=p;}
        st = code[c]+st;
        p++;
    }
    cout << st;
    return 0;
}
```

3.2 ความสวยงามของคณิตศาสตร์

ผู้สอนคณิตศาสตร์หลายท่านคงเคยได้ยินผู้เรียนพูดว่า “ไม่ชอบเรียนคณิตศาสตร์” “คณิตศาสตร์ยาก” “ไม่รู้ว่าเรียนคณิตศาสตร์บางเรื่องไปทำไม” การนำเสนอเนื้อหาบางอย่างก่อนจะเข้าเนื้อหาหลักเพื่อดึงดูดความสนใจของผู้เรียนเป็นอีกเทคนิคที่จะช่วยให้ผู้เรียนเปิดใจที่จะเรียนรู้คณิตศาสตร์และอยากเรียนรู้คณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น ในส่วนนี้จึงนำเกร็ดความรู้เรื่องจำนวนที่ไม่ยากแต่เสริมประสบการณ์ให้แก่ผู้เรียนได้

ปัญหา 3.2.1 จำนวนเฉพาะแฝด (Twin Primes)

จำนวนเฉพาะมีบทบาทสำคัญมากในงานทางคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์ เช่น ใช้ในงานด้านทฤษฎีจำนวน (number theory) พีชคณิตนามธรรม (abstract algebra) หรือ ใช้ในงานทางด้านเข้ารหัสและถอดรหัส (cryptography)

ข้อความคาดการณ์จำนวนเฉพาะแฝด (The Twin Prime Conjecture) กล่าวเอาไว้ว่า จำนวนเฉพาะแฝดจะมีมากมายมหาศาลเป็นอนันต์ (Rosen, 2012)

ปัจจุบันยังไม่มีใครสามารถพิสูจน์ข้อความคาดการณ์ดังกล่าวได้ ทั้งนี้จำนวนเฉพาะคู่ที่ใหญ่ที่สุดที่ค้นพบในปัจจุบันถูกค้นพบเมื่อวันที่ 14 กันยายน ค.ศ. 2016 โดย Tom Greer ซึ่งมีความยาวถึง 388,342 หลักได้แก่ (Zimmerman, 2016)

$$2996863034895 \cdot 2^{1290000} - 1 \text{ และ } 2996863034895 \cdot 2^{1290000} + 1$$

ตัวอย่างโปรแกรมสำหรับช่วยหาจำนวนเฉพาะคู่แฝดที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับเลขที่กำหนด

```
#include <iostream>
using namespace std;
int isprime(int n)
{
    int i;
    for (i=2;i*i<=n;i++)
        if (n%i==0) return 0;
    return 1;
}
int main()
{
    int n;
    cout << "input n = ";
    cin >> n;
    while (!(isprime(n) && isprime(n+2))) n++;
    cout << "twin primes are " << n << " and " << n+2;
    return 0;
}
```

ปัญหา 3.2.2 วิทยาการรหัสลับ (Cryptography)

วิทยาการรหัสลับได้ถูกนำมาใช้ในยุคดิจิทัลเพื่อความปลอดภัยของข้อมูล ซึ่งจากหลักฐานที่ปรากฏพบว่ามีการใช้รูปแบบการคำนวณทางคณิตศาสตร์เพื่อทำการเข้าและถอดรหัสข้อความมาตั้งแต่ยุคสมัยของ Julius Caesar (ประมาณ 58 ปีก่อนคริสตกาล) สำหรับการเข้ารหัสที่ยากขึ้นนั้น อาศัยความเข้าใจทางด้านทฤษฎีจำนวน (number theory) และการพิจารณาโครงสร้างทางพีชคณิต (algebraic structure) (Kraft & Washington, 2018) ในที่นี้จะแสดงตัวอย่างของวิทยาการรหัสลับในรูปแบบหนึ่ง โดยหากพิจารณาว่าเรามีตัวอักขระที่จะใช้ได้จำนวน 43 ตัวได้แก่

ลำดับที่	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
อักขระ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>
ลำดับที่	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
อักขระ	?	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
ลำดับที่	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42		
อักขระ	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z		

หมายเหตุ อักขระ “0” จนถึง “Z” ทั้ง 43 ตัวเป็นอักขระที่เรียงตั้งแต่ตัวที่ 48 จนถึงตัวที่ 90 ในระบบ ASCII

เราสามารถทำการเข้ารหัสโดยการนำลำดับที่ของอักขระดังกล่าวมาคูณด้วยเลขคีย์ (key) ใดก็ได้ตั้งแต่ 1 ไปจนถึง 42 แล้วนำไปคำนวณหาเศษที่ได้จากการหารเลขดังกล่าวด้วย 43 แล้วนำเศษที่ได้ไปพิจารณาว่าเป็นอักขระใดเพื่อแสดงเป็นอักขระที่ถูกเข้ารหัสไว้ ตัวอย่างเช่น หาจะเข้ารหัสข้อความ “EXAMS” ด้วยเลขคีย์ 5 การเข้ารหัสจะทำได้ดังนี้

อักขระ	ลำดับที่	คำนวณการ**เข้ารหัส** ด้วยการคูณด้วย 5	เศษที่เหลือจาก การหารด้วย 43	อักขระที่ถูก**เข้ารหัส** (พิจารณาจากเศษที่คำนวณได้)
E	21	105	19	C
X	40	200	28	L
A	17	85	42	Z
M	29	145	16	@
S	35	175	3	3

จากตารางข้างต้นพบว่า ข้อความ “EXAMS” จะถูกเข้ารหัสเป็น “CLZ@3”

สำหรับการถอดรหัสข้อความจะมีขั้นตอนวิธี คือ หากทราบว่าข้อความที่ถูกเข้ารหัสนั้นถูกเข้ารหัสด้วยเลขคีย์ใด ให้หาเลขที่ใช้ถอดรหัส (unlock) ซึ่งได้แก่ตัวเลขที่นำไปคูณกับเลขที่เข้ารหัสแล้วนำไปหารด้วย 43 แล้วเหลือเศษ 1 ซึ่งในที่นี้ หากพิจารณาในมุมมองของกรุปของเศษเหลือจากการหารจำนวนเต็มด้วย 43 ภายใต้**การดำเนินการทวิภาคคูณแล้วพิจารณาเศษเหลือ (remainder) เมื่อหารด้วย 43** โดย 1 จะเปรียบเสมือน**เอกลักษณ์**ในกรุปและเลขที่ใช้ถอดรหัสก็คือ**ตัวผกผัน**ของเลขที่เข้ารหัสภายใต้การดำเนินการทวิภาคคูณดังกล่าว ทั้งนี้เมื่อได้เลขถอดรหัสดังกล่าวแล้วให้นำเลขที่ได้ไปใช้กับข้อความที่ได้รับมาแบบเดียวกับการเข้ารหัสข้างต้น ก็จะได้ข้อความที่ถอดรหัส เช่น หากทราบว่าเลขคีย์คือ 5 ดังนั้นเลขถอดรหัสคือ 26 ($5\times26=130\equiv1 \pmod{43}$) การถอดรหัสข้อความ “;Z=MR” ทำได้ดังตัวอย่างด้านล่างนี้

อักขระ	ลำดับที่	คำนวณการ**ถอดรหัส** ด้วยการคูณด้วย 26	เศษที่เหลือจาก การหารด้วย 43	อักขระที่ถูก**ถอดรหัส** (พิจารณาจากเศษที่คำนวณได้)
;	11	286	28	L
Z	42	1092	17	A
=	13	338	37	U
M	29	754	23	G
R	34	884	24	H

จากตารางข้างต้นพบว่า ข้อความ “;Z=MR” จะถูกถอดรหัสเป็น “LAUGH”

ตัวอย่างเพิ่มเติมข้อความที่ถูกเข้ารหัส

ตัวอย่างที่ 1

เลขคีย์เข้ารหัส	ข้อความที่ถูกเข้ารหัส
28	CK<RD<RD3GDMG@6NTCM1DRMGCMG@M
เลขคีย์ถอดรหัส	ข้อความที่ถูกถอดรหัส
20	THIS=IS=AN=ENCRYPTED=SENTENCE

ตัวอย่างที่ 2

เลขคีย์เข้ารหัส	ข้อความที่ถูกเข้ารหัส
19	WJ<PI?2AXPY1N:;PONMPE?S6DPNR<1PFP@FH5PTN7
เลขคีย์ถอดรหัส	ข้อความที่ถูกถอดรหัส
34	THE=QUICK=BROWN=FOX=JUMPS=OVER=A=LAZY=DOG

ตัวอย่างที่ 3

เลขคีย์เข้ารหัส	ข้อความที่ถูกเข้ารหัส
41	@FVTJ6AHZA7N95PAD<9B>2AR<3X1AL4A:H8
เลขคีย์ถอดรหัส	ข้อความที่ถูกถอดรหัส
21	SPHINX=OF=BLACK=QUARTZ=JUDGE=MY=VOW

ตัวอย่างโปรแกรมสำหรับช่วยถอดรหัส

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    int i,key,unlock;
    char c;
    string encryp;
    cout << "Input the encrypted sentence:" << endl;
    getline(cin,encryp);
    cout << "Input key = ";
    cin >> key;
    for (i=1;i<44;i++)
       if (i*key%43==1) { unlock=i; break; }
    for (i=0;i<encryp.length();i++)
        cout << char(((encryp[i]-'0')*unlock)%43+'0');
    return 0;
}
```

ปัญหา 3.2.3 การกระจายไตรภาคได้ดุล (Balanced Ternary Expansions)

บทนิยาม เนื่องด้วยจำนวนเต็มใด ๆ สามารถถูกเขียนได้ในรูปแบบเดียว (unique represented) ในรูป

$$e_k 3^k + e_{k-1} 3^{k-1} + ... + e_1 3 + e_0,$$

เมื่อ e_j = -1,0 หรือ 1 เมื่อ $j = 0, 1, 2, ..., k$ เราเรียกการเขียนจำนวนเต็มในรูปแบบดังกล่าวว่า**การกระจายไตรภาคได้ดุล (Balanced Ternary Expansions)** (Rosen, 2012)

ตัวอย่างการกระจายไตรภาคได้ดุลของจำนวนเต็ม เช่น

ตารางที่ 1 แสดงตัวอย่างการกระจายไตรภาคได้ดุล

ตัวเลข	การกระจายไตรภาคได้ดุล	ตัวเลข	การกระจายไตรภาคได้ดุล
0	0	10	$1\cdot3^2+0\cdot3+1$
1	1	20	$1\cdot3^3+(-1)\cdot3^2+(1)\cdot3+(-1)$
2	$1\cdot3+(-1)$	35	$1\cdot3^3+1\cdot3^2+0\cdot3+(-1)$
3	$1\cdot3+0$	40	$1\cdot3^3+1\cdot3^2+1\cdot3+1$
4	$1\cdot3+1$	50	$1\cdot3^4+(-1)\cdot3^3+0\cdot3^2+(-1)\cdot3+(-1)$
5	$1\cdot3^2+(-1)\cdot3+(-1)$	121	$1\cdot3^4+1\cdot3^3+1\cdot3^2+1\cdot3+1$
6	$1\cdot3^2+(-1)\cdot3+0$	200	$1\cdot3^5+(-1)\cdot3^4+1\cdot3^3+1\cdot3^2+1\cdot3+(-1)$
7	$1\cdot3^2+(-1)\cdot3+1$	-7	$(-1)\cdot3^2+1\cdot3+(-1)$
8	$1\cdot3^2+0\cdot3+(-1)$	-8	$(-1)\cdot3^2+0\cdot3+1$
9	$1\cdot3^2+0\cdot3+0$	-13	$(-1)\cdot3^2+(-1)\cdot3+(-1)$

แนวคิดของการกระจายไตรภาคได้ดุลสามารถนำมาประยุกต์ใช้ในปริศนาทางคณิตศาสตร์ได้ เช่น

ปริศนา หากมีตาชั่งสมดุล 2 แขน (two arm balance scale) แล้วเราต้องการชั่งน้ำหนัก ตั้งแต่ 1,2,3,..., 40 ขีด เราจำเป็นที่จะต้องมีตุ้มน้ำหนักอย่างน้อยที่สุดจำนวนกี่ชิ้น

คำตอบ 4 ชิ้น ได้แก่ ตุ้มน้ำหนักที่มีน้ำหนัก 1 ขีด 3 ขีด 9 ขีด และ 27 ขีด

ตารางที่ 2 แสดงให้เห็นว่า หากสัมประสิทธิ์ของการกระจายไตรภาคได้ดุล หน้าพจน์ 1, 3, 3^2 และ 3^3 เป็นบวก เราจะเอาตุ้มน้ำหนักที่มีน้ำหนักเท่ากับค่านั้นไว้ฝั่งหนึ่ง และหากสัมประสิทธิ์ของการกระจายไตรภาคได้ดุล หน้าพจน์ดังกล่าวเป็นค่าลบเราจะเอาตุ้มน้ำหนักที่มีน้ำหนักเท่ากับค่านั้นไว้อีกฝั่งหนึ่ง แต่ถ้าหากสัมประสิทธิ์หน้าพจน์เป็น 0 เราก็จะไม่ต้องนำน้ำหนักที่มีค่าเท่าพจน์นั้นมาใช้ในการชั่ง

ตารางที่ 2 แสดงตัวอย่างการประยุกต์ใช้การกระจายไตรภาคได้ดุลในการชั่งน้ำหนักบนตาชั่งสมดุล 2 แขน ด้วยตุ้มน้ำหนักที่มีน้ำหนัก 1 ขีด 3 ขีด 9 ขีด และ 27 ขีด

ตัวอย่างน้ำหนักที่ต้องการชั่ง (ขีด)	ตาชั่งฝั่งซ้ายใส่ตุ้มน้ำหนักขนาด	ตาชั่งฝั่งขวาใส่ของที่ต้องการชั่งและตุ้มน้ำหนักขนาด	**การกระจายไตรภาคได้ดุลของน้ำหนักที่พิจารณา**
1	1	-	1
2	3	1	$1\cdot3+(-1)$
3	3	-	$1\cdot3+0$
4	3, 1	-	$1\cdot3+1$
5	9	3, 1	$1\cdot3^2+(-1)\cdot3+(-1)$
6	9	3	$1\cdot3^2+(-1)\cdot3+(0)$
7	9, 1	3	$1\cdot3^2+(-1)\cdot3+1$
8	9	1	$1\cdot3^2+0\cdot3+(-1)$
9	9	0	$1\cdot3^2+0\cdot3+0$
10	9,1	0	$1\cdot3^2+0\cdot3+1$
20	27, 3	9, 1	$1\cdot3^3+(-1)\cdot3^2+(1)\cdot3+(-1)$
35	27, 9	1	$1\cdot3^3+1\cdot3^2+0\cdot3+(-1)$
40	27, 9, 3, 1	-	$1\cdot3^3+1\cdot3^2+1\cdot3+1$

ตัวอย่างโปรแกรมสำหรับการแปลงเลขฐาน 10 เป็นการกระจายไตรภาคได้ดุล

```
#include <iostream>
using namespace std;
int main()
{
    int i,n,nn,sign,coef[30],len=0;
    cout << "n = ";
    cin >> n;
    nn = n;
    if (n>=0) sign=1; else {sign=-1; n = -n;}
    coef[0] = 0;
    while (n>0) {coef[len++]=n%3; n/=3;}
    coef[len]=0;
    for (i=0;i<len;i++)
        if (coef[i]==2) {
            coef[i] = -1;
            coef[i+1]++;
        } else
        if (coef[i]==3) {
            coef[i] = 0;
            coef[i+1]++;
        }
    if (coef[len]!=0) len++;
    cout << nn << " = ";
    for (i=len-1;i>0;i--)
        cout << '(' << sign*coef[i] << ")x" << "3^" << i << '+';
    cout << '(' << sign*coef[0] << ')';
    return 0;
}
```

4 สรุปผลการวิจัยและอภิปลายผล

โจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้ง 6 ปัญหาที่นำเสนอไปนั้น เป็นเพียงส่วนหนึ่งของโจทย์ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจที่มีอยู่จำนวนมาก การหาผลเฉลยของปัญหาดังกล่าวต้องใช้ความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์และการคิดวิเคราะห์อย่างมีตรรกะ ส่งเสริมทักษะกระบวนการคิดวิเคราะห์แก่ผู้นำไปใช้ ความหลากหลายของโจทย์ปัญหาและวิธีการหาผลเฉลยที่นำเสนอได้แสดงถึงความเชื่อมโยงของเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เข้าด้วยกัน ทั้งยังมีเกร็ดความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ทำให้เข้าใจว่าคณิตศาสตร์มีความสัมพันธ์กับเรื่องใกล้ตัวเราเสมอ รวมถึงเป็นโจทย์ปัญหาที่มีความท้าทายและเข้าถึงได้ นอกจากนี้ต้นแบบการเขียนโปรแกรมภาษา C++ ที่อยู่ในบทความช่วยให้หาผลเฉลยและตรวจสอบความถูกต้องของผลเฉลยได้สะดวก รวดเร็ว ซึ่งผู้อ่านสามารถนำไปประยุกต์และพัฒนาร่วมกับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาอื่น ๆ ที่ถนัด

เอกสารอ้างอิง

[1] Hammer, D., Piascik, P., Medina, M., Pittenger, A., Rose, R., Creekmore, F., Soltis, R., Bouldin, A., Schwarz, L., & Steven, S. (2010). Recognition of teaching excellence. *American Journal of Pharmaceutical Education. 74*(9):164. https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2996754/

[2] Gauss, C.F. (1966) *Disquistitiones Arithmeticae* (English ed.), Translated by Arthur A. Clarke, Springer-Verlag, Yale University Press., Berlin, Germany.

[3] Kraft, J.S. & Washington, L.C. (2018) *An Introduction to Number Theory with Cryptography* (2nd ed.), CRC Press.

[4] Mawas, N.EI., Muntean, C.H. (2018). Supporting Lifelong Learning through Development of 21st Century Skills*, 10th International Conference on Education and New Learning Technologies*, pp. 7343-7350. https://library.iated.org/view/ELMAWAS2018SUP

[5] Rosen, K.H. (2012) *Discrete Mathematics and Its Applications* (7th ed.), McGraw-Hill, New York.

[6] Rotman, J.J. (2005) *A First Course in Abstract Algebra* (3rd ed.), Pearson.

[7] Wood, R. (2019). Students' Motivation to Engage with Science Learning Activities through the Lens of Self-Determination Theory: Results from a Single-Case School-Based Study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education. 15*(7), em1718. https://doi.org/10.29333/ejmste/106110.

[8] Zimmerman, V. (2016) World Record Twin Primes Found!, *PrimeGrid*., Posted: 20 Sep 2016 | 12:47:37 UTC., Retrieved from: http://www.primegrid.com/forum_thread.php?id=7021