คณิตศาสตร์ 2 (Mathematics II)

สำหรับนักเรียนชั้นปีที่ 1

หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ

สาขาวิชาช่างอุตสาหกรรมฐานวิทยาศาสตร์

วิทยาลัยเทคนิคสุรนารี

และ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

จังหวัดนครราชสีมา

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.เจษฎา ตัณฑนุช

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

ทดสอบพื้นฐานทางคณิตศาสตร์

$1 \times 1 =$	1
$11 \times 11 =$	121
$111 \times 111 =$	12,321
$1{,}111 \times 1{,}111 =$	1,234,321

$$11{,}111 \times 11{,}111 = 123{,}454{,}321$$

$$111{,}111 \times 111{,}111 = 12{,}345{,}654{,}321$$

$$1{,}111{,}111 \times 1{,}111{,}111 = 1{,}234{,}567{,}654{,}321$$

$$11{,}111{,}111 \times 11{,}111{,}111 = 123{,}456{,}787{,}654{,}321$$

$$111{,}111{,}111 \times 111{,}111{,}111 = 12{,}345{,}678{,}987{,}654{,}321$$

$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$
$$12 \cdot 8 + 2 = 98$$
$$123 \cdot 8 + 3 = 987$$
$$1{,}234 \cdot 8 + 4 = 9{,}876$$
$$12{,}345 \cdot 8 + 5 = 98{,}765$$
$$123{,}456 \cdot 8 + 6 = 987{,}654$$
$$1{,}234{,}567 \cdot 8 + 7 = 9{,}876{,}543$$
$$12{,}345{,}678 \cdot 8 + 8 = 98{,}765{,}432$$
$$123{,}456{,}789 \cdot 8 + 9 = 987{,}654{,}321$$

เซต (SET)

เราไม่สามารถให้คำจำกัดความกับค่าว่าเซตหรือสมาชิกในเซตได้ (อนิยาม) แต่เรารู้จักเซตได้เนื่องจากเราคุ้นเคยกับคุณสมบัติของเซต หรือทราบจากสามัญสำนึกที่เราได้พบ และใช้งานที่เกี่ยวข้องกับเซต

มีคนกล่าวว่าเซตมีลักษณะคล้ายๆ กับกล่อง คือ *เป็นกล่องที่ใส่อะไรก็ได้* แต่กล่องและเซตมีความแตกต่างบางอย่างเช่น ***กล่องสามารถใส่ของที่ซ้ำๆ กันได้หลายชิ้น*** แต่ถ้าปรากฎว่า ***มีของที่เหมือนกันอยู่ในเซต จะถือว่าของชิ้นนั้นมีอยู่เพียงชิ้นเดียว***

ตัวอย่างเช่น ในกล่องอาจจะใส่หนังสือที่เหมือนๆ กันได้ แต่เซต {1,1,1,1,1} ถือว่ามีสมาชิกเพียงตัวเดียวก็คือ “1”

อีกตัวอย่างหนึ่งที่สำคัญคือ

<u>อันดับก่อนและหลังของสมาชิกในเซต ไม่ถือว่าเป็นสิ่งคัญ</u>

ตัวอย่างเช่น เซต {1,2,3} จะถือว่าเทียบเท่า หรือเหมือนกัน
กับเซต {1,3,2}, {2,1,3}, {2,3,1} ,{3,1,2} และ {3,2,1}

A={a,b,c,d} หมายถึงเซตที่มีสมาชิกจำนวน 4 ตัวได้แก่ a,b,c และ d

เรามักนิยามที่จะใช้**ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทนเซต** และ **ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กแทนสมาชิกในเซต**

$|A|$ หมายถึงจำนวนสมาชิกในเซต

ตัวอย่างเช่น

$$|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}| =$$

$$|\{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}| =$$

$$|\{m, i, s, s, i, o, n\}| =$$

$$|\{1, 2, 3, \ldots\}| =$$

ϕ หรือ {} (empty set)

เป็นสัญลักษณ์แทน***<u>เซตว่าง</u>*** หรือ เซตที่ไม่มีสมาชิกอยู่

$$\left|\phi\right| = \left|\{\,\}\right| =$$

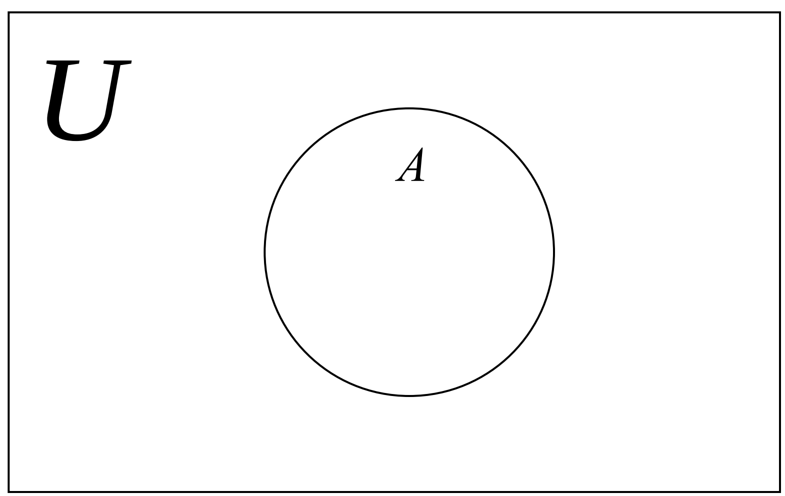
$$\left|\left\{\phi,\{\phi\},\left\{\{\,\},\phi\right\},\left\{\{\,\}\right\},\left\{\{\,\},\{\phi\}\right\},\left\{\left\{\{\,\},\phi\right\}\right\}\right\}\right| =$$

U (universe) หมายถึง เซตของจำนวนสมาชิกทั้งหมดใน ขอบเขตที่ต้องการศึกษา

$a \in A$ หมายถึง a เป็นสมาชิกของเซต A

(a is an element of set A)

เราอาจใช้แผนภาพแสดงความหมายของ A และ U



$A \subseteq B$ หรือ $B \supseteq A$

หมายถึง ถ้า a เป็นสมาชิกในเซต A แล้ว a ต้องเป็นสมาชิกในเซต B ด้วย

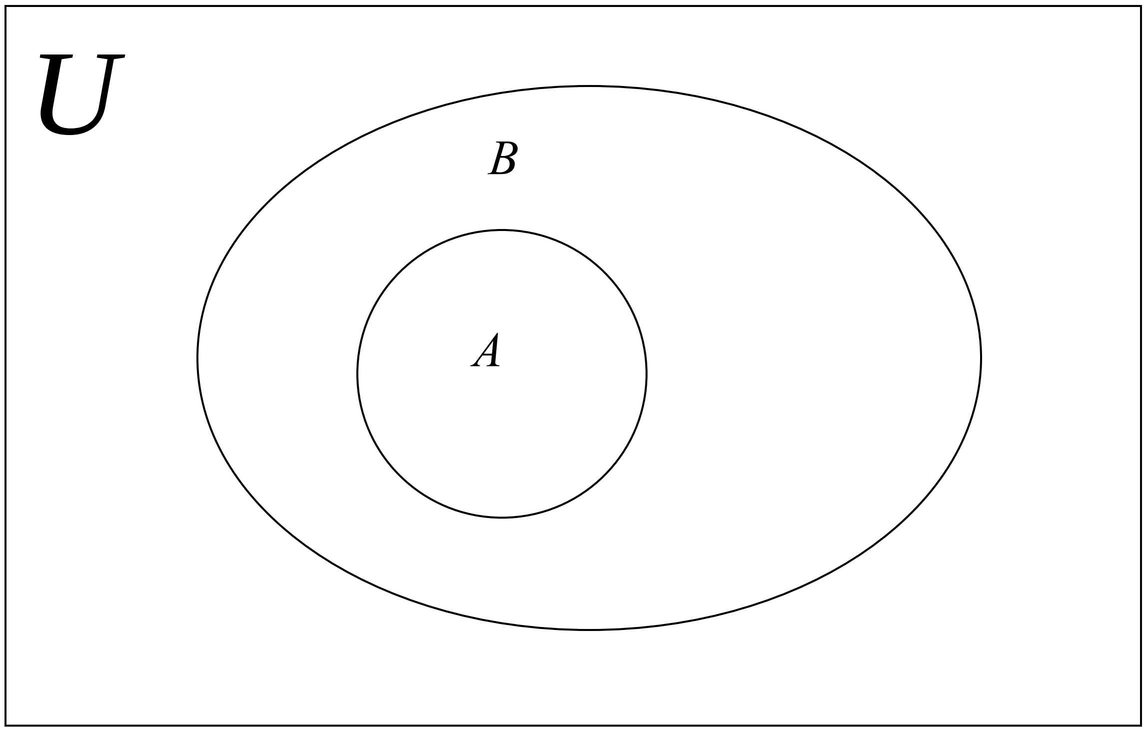
เราเรียก $A \subseteq B$ หรือ $B \supseteq A$ ว่า

“*A* เป็นเซตย่อยของ *B*”

A* is a subset of *B

ϕ เป็นเซตย่อยของ A หรือไม่ แล้วเป็นเซตย่อยของเซตใดบ้าง?

เราอาจใช้แผนภาพแสดงความหมายของ $A \subseteq B$



$A = B$ หมายถึง ทั้ง A และ B ต้องมีสมาชิกเหมือนกันทุกประการ

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$ จริงหรือไม่?

$P(A)$ หมายถึง<u>**เซต**</u> เซตหนึ่ง ซึ่งมีสมาชิกเป็น<u>**เซตย่อย**</u>ของ A

เราเรียก $P(A)$ ว่า<u>**เพาว์เวอร์เซตของ A**</u> (power set of A)

<u>**ตัวอย่าง**</u> ถ้า $A = \{1,2,3\}$ เราพบว่าเซตเหล่านี้

เป็นเซตย่อยทั้งหมดของ A ดังนั้น

$P(A) =$

ตัวอย่าง จงหาเพาว์เวอร์เซตของ $\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$

โดยหลักการนับ เราพบว่าจำนวนสมาชิกในเพาว์เวอร์เซต เท่ากับ 2 ยกกำลังจำนวนสมาชิกในเซต

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

ทำไม?

$A \cap B$ หมายถึง **<u>เซต</u>** เซตหนึ่ง ซึ่งถ้าเราเจอว่ามีสมาชิกอยู่ในเซต $A \cap B$ แล้ว เราจะต้องเจอสมาชิกตัวนั้น **<u>ทั้งในเซต *A* และเซต *B*</u>**

เราเรียก $A \cap B$ ว่า**<u>อินเตอร์เซคชั่นของ *A* และ *B*</u>**

(intersection of *A* and *B*)

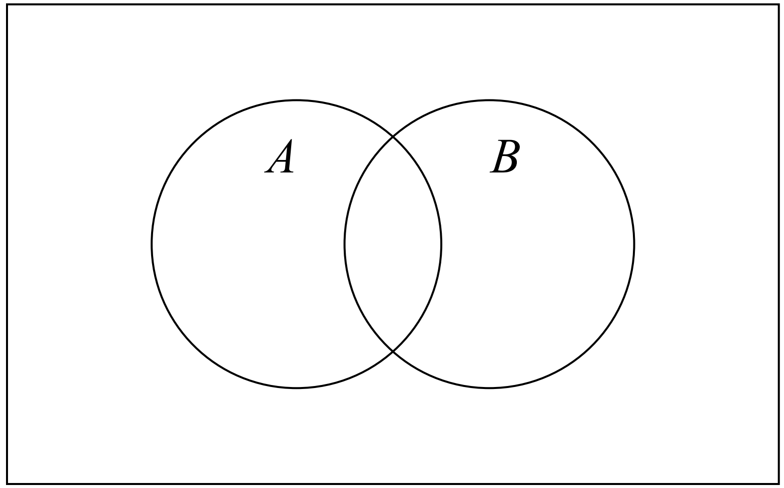
<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

และ $B = \{1,2,4,5,6,8,9,10\}$

$A \cap B =$

$B \cap A =$

เราอาจใช้แผนภาพแสดงความหมายของ $A \cap B$



$A \cap B$ คือส่วนที่แรเงา

$A \cup B$ หมายถึง **<u>เซต</u>** เซตหนึ่ง ซึ่งถ้าเราเจอว่ามีสมาชิกอยู่ในเซต $A \cup B$ แล้ว เราจะต้องเจอสมาชิกตัวนั้น **<u>เพียงในเซต A หรือ เพียงในเซต B หรือ เจอในทั้งสองเซต</u>**

เราเรียก $A \cup B$ ว่า**<u>ยูเนียนของ A และ B</u>** (union of A and B)

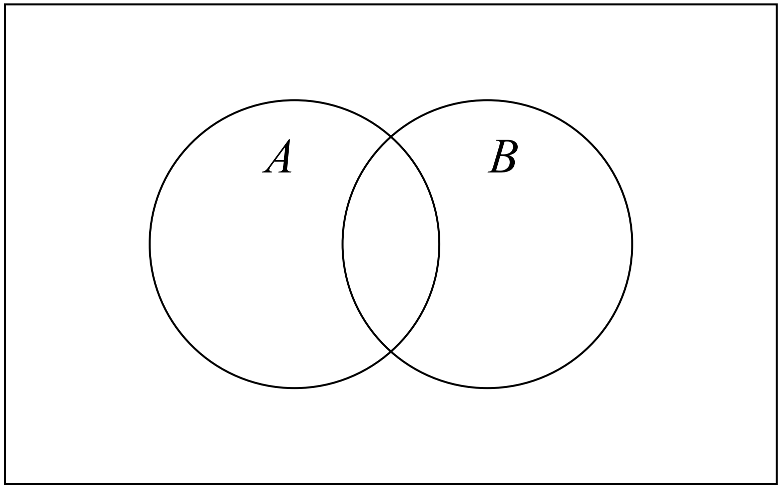
<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

และ $B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$

$A \cup B =$

$B \cup A =$

เราอาจใช้แผนภาพแสดงความหมายของ $A \cup B$



$A \cup B$ คือส่วนที่แรเงา

ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

และ $B = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 10\}$

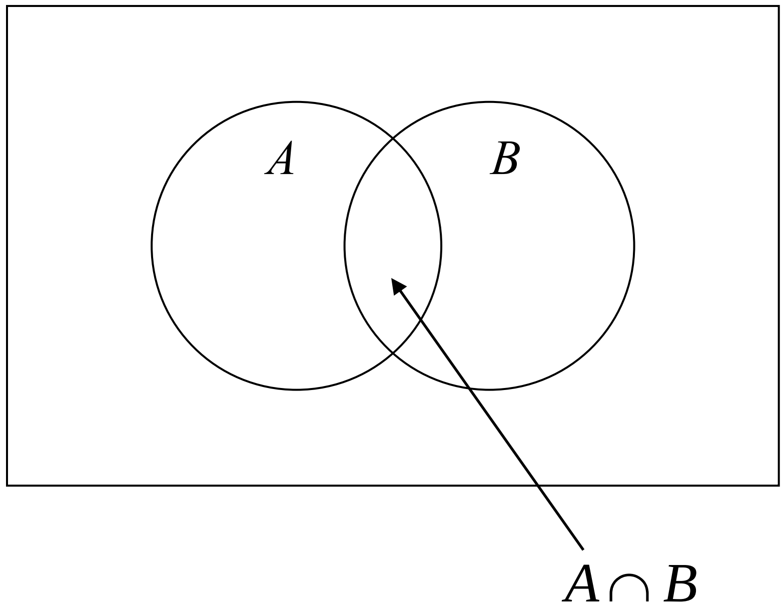
$A \cap B =$

$A \cup B =$

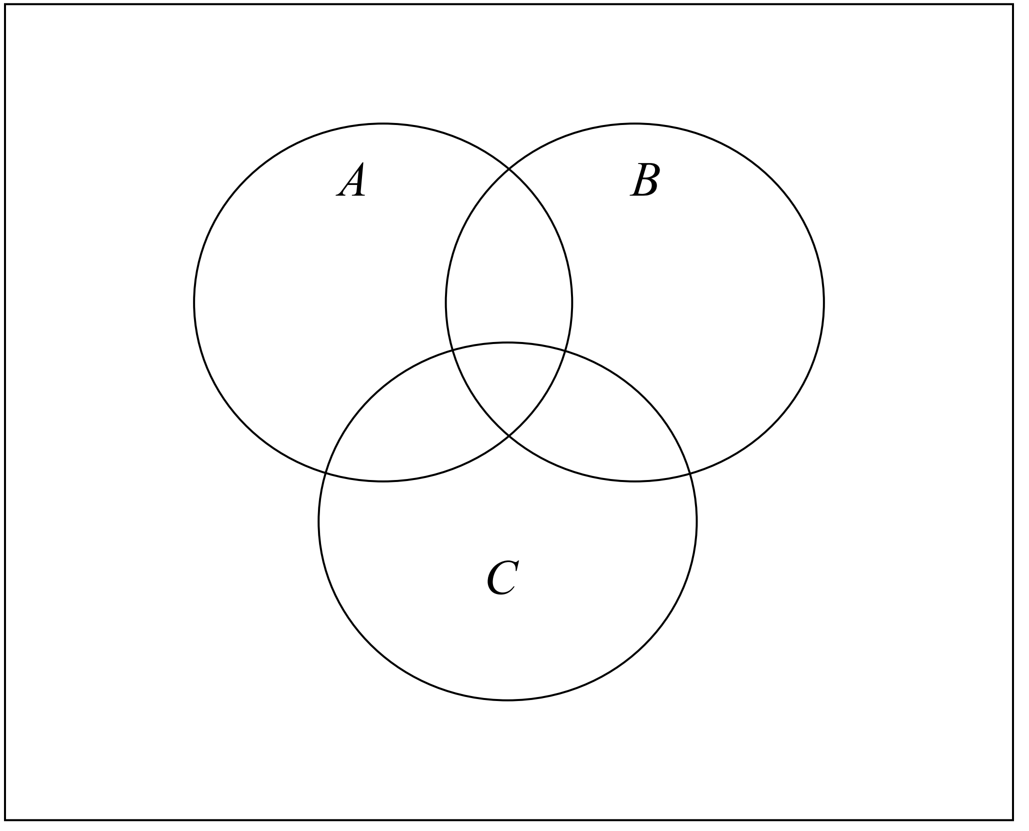
$|A| =$ $|B| =$

$|A \cap B| =$

$|A \cup B| =$



$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| = \quad & |A| + |B| + |C| \\
& -\left(|A \cap B| + |A \cap B| + |A \cap B|\right) \\
& + |A \cap B \cap C|
\end{aligned}
$$

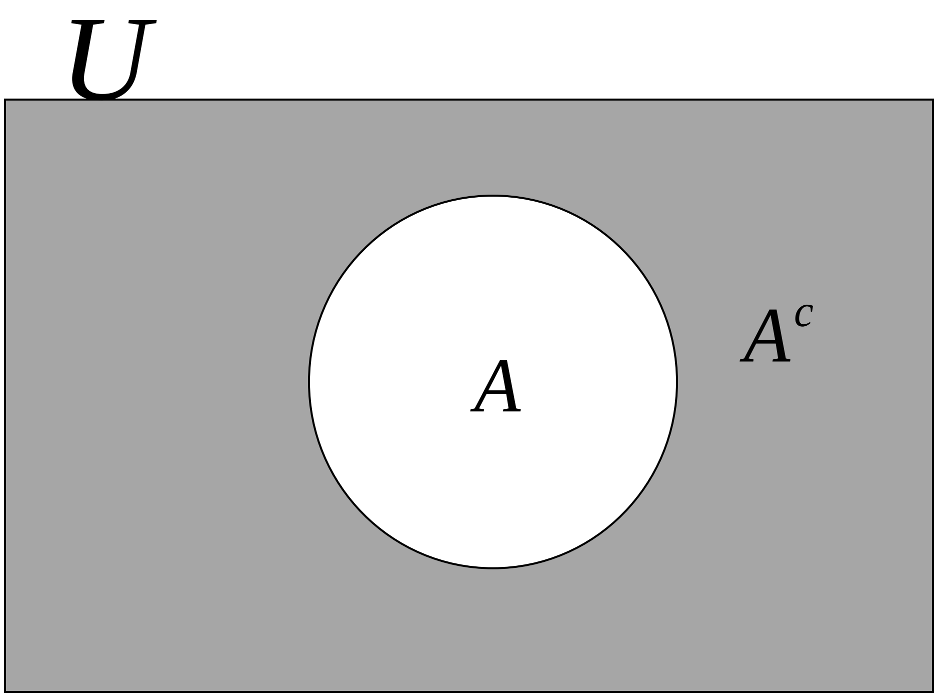
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = \quad & |A| + |B| + |C| \\ & -\left(|A \cap B| + |A \cap B| + |A \cap B|\right) \\ & +|A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

$$|A \cup B \cup C \cup D| =$$

A' หรือ A^c หมายถึง **<u>เซต</u>** เซตหนึ่ง ซึ่งมีสมาชิกอยู่ในเซตยูนิเวอร์ส (universe) **<u>แต่ไม่อยู่ในเซต A</u>**

เราเรียก A^c ว่า**<u>คอมพลีเมนท์ของ A</u>** (complement of A)



<u>ตัวอย่าง</u> ให้ U แทนเซตของประชากรในโรงเรียนอนุบาลหมีน้อย และให้ A แทนเซตของนักเรียนชายในโรงเรียน ดังนั้น A^c คือ

$A-B$ หรือ $A \setminus B$ หมายถึง **เซต** เซตหนึ่งซึ่งมีสมาชิก **อยู่ในเซต A แต่ไม่อยู่ในเซต B**

เราเรียก $A \setminus B$ ว่า**เซตของสมาชิกใน A แต่ไม่อยู่ใน B**

(set of elements in A but not B)

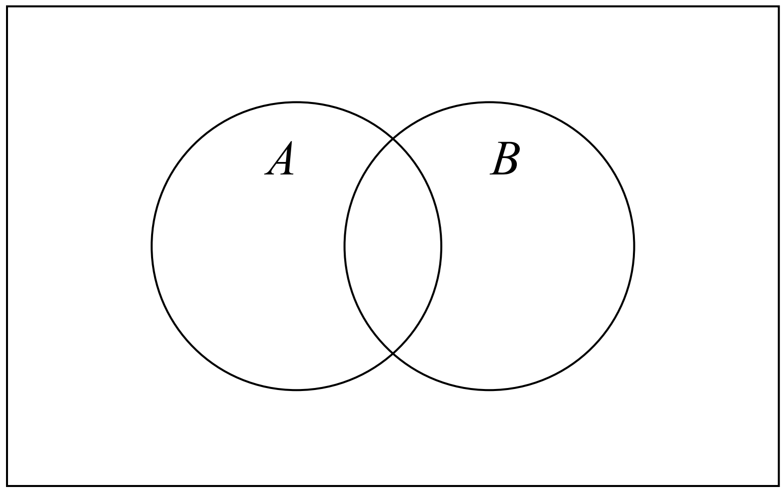
ตัวอย่าง ถ้า $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

และ $B = \{1,2,4,5,6,8,9,10\}$

$A \setminus B =$

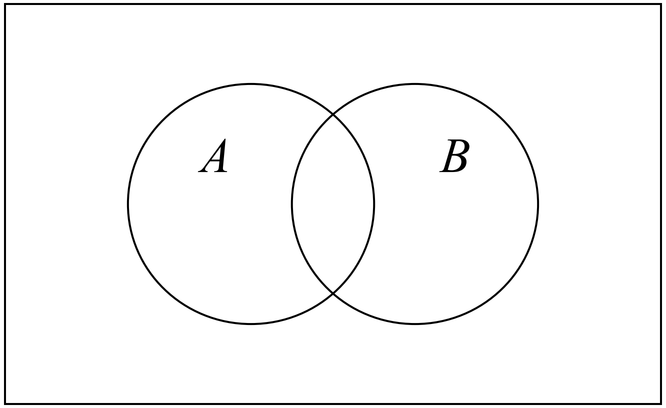
$B \setminus A =$

เราอาจใช้แผนภาพแสดงความหมายของ $A \setminus B$

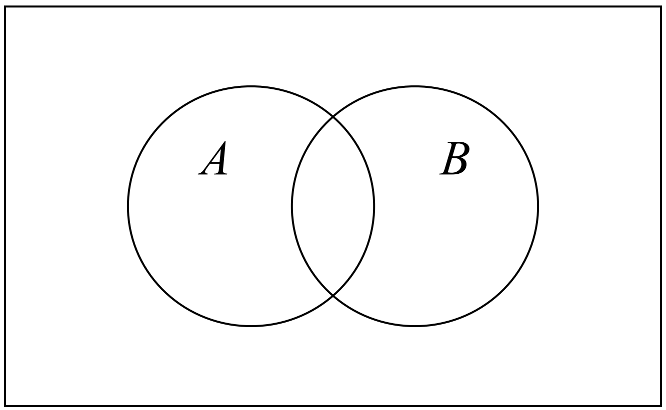


$A \setminus B$ คือส่วนที่แรเงา

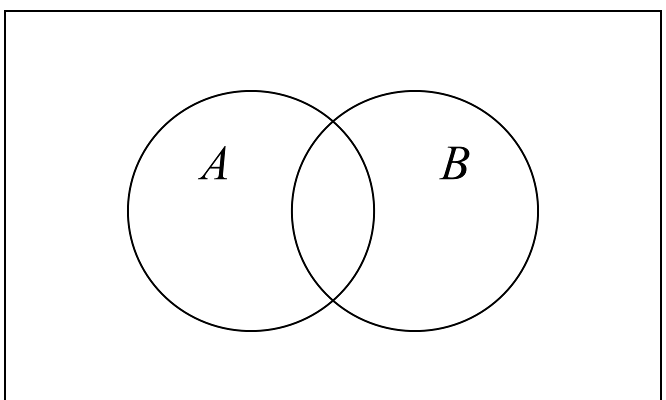
ระวัง !!! $A \setminus B \neq B \setminus A$



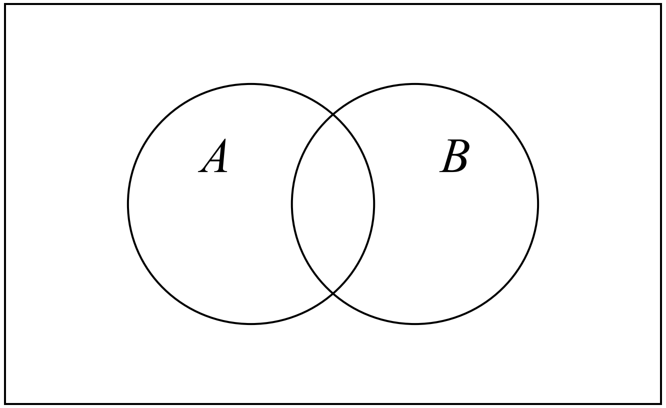
A คือส่วนที่แรเงา



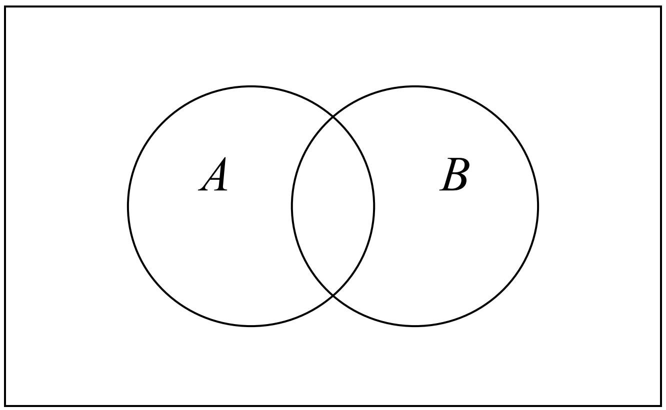
B คือส่วนที่แรเงา



$A \cap B^c$ คือส่วนที่แรเงา



$A \cap B^c$ คือส่วนที่แรเงา



$A \setminus B$ คือส่วนที่แรเงา

$$A \setminus B = A \cap B^c$$

คุณสมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับเรื่องเซต

ถ้า A,B และ C เป็นเซตใดๆ U หมายถึงยูนิเวอร์ส และ

ϕ หมายถึงเซตว่าง

Union

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup A =$$

$$A \cup \phi =$$

$$A \cup U =$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B =$$

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{และ} \quad B \subseteq A \cup B$$

$$A \cup B = \phi \Rightarrow \begin{cases} A = \\ B = \end{cases}$$

Intersection

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cap A =$$

$$A \cap \phi =$$

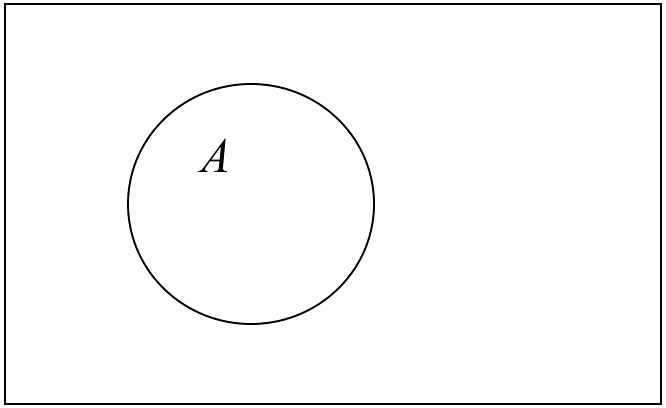
$$A \cap U =$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

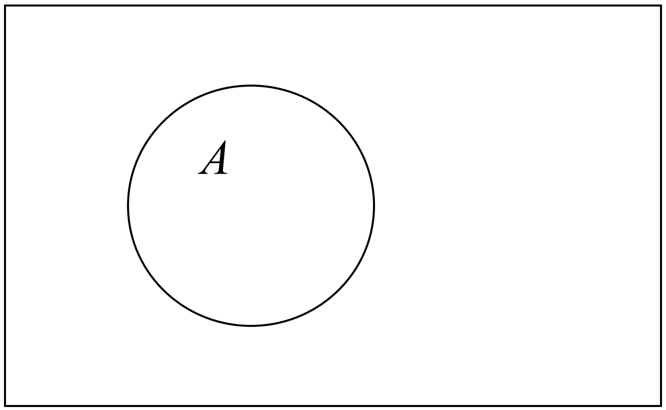
$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B =$$

$A \cap B \subseteq A$ ແລະ $A \cap B \subseteq B$

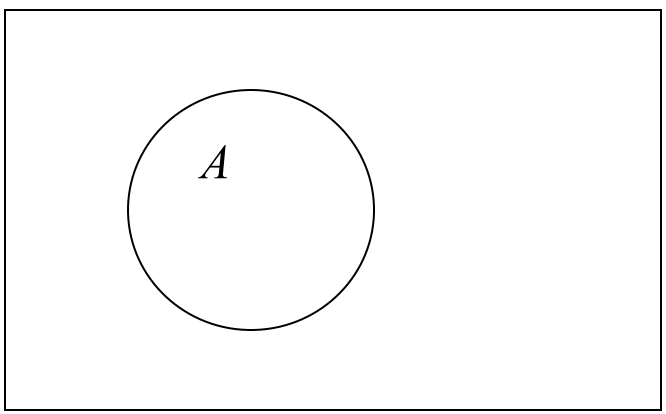
$$A \cap B = U \Rightarrow \begin{cases} A = \\ B = \end{cases}$$



A คือส่วนที่แรเงา



A^c คือส่วนที่แรเงา



$(A^c)^c$ คือส่วนที่แรเงา

Complement

$$(A^c)^c = A$$

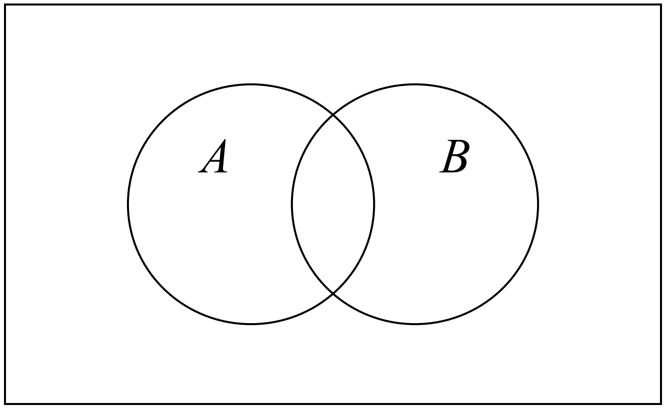
$$U^c =$$

$$\phi^c =$$

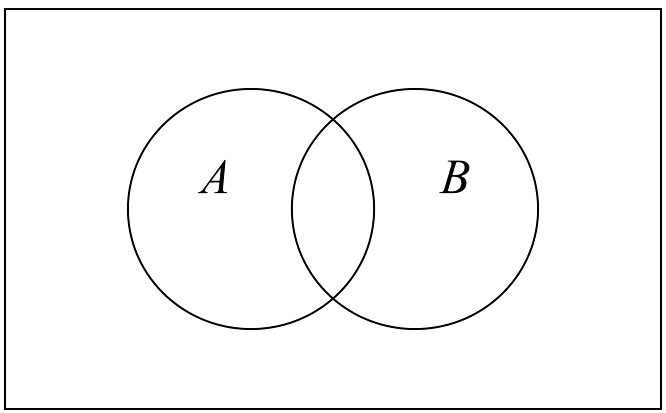
$$A \cap A^c =$$

$$A \cup A^c =$$

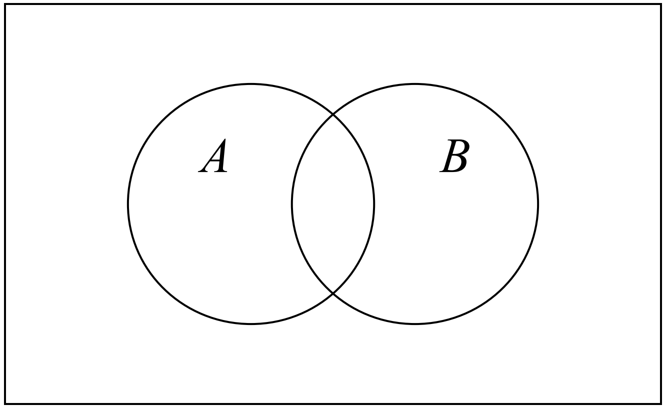
$$A \setminus B = A \cap B^c$$



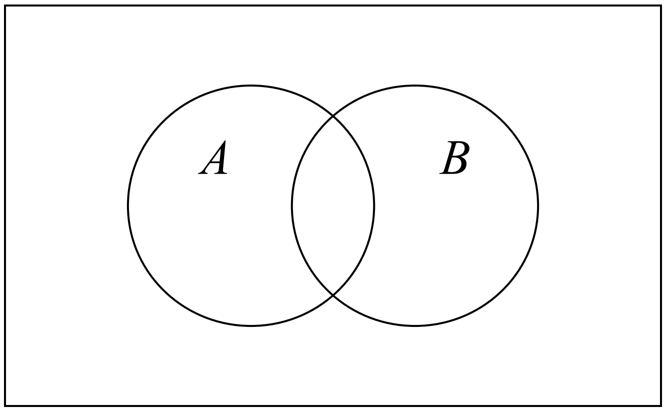
$A \cup B$ คือส่วนที่แรเงา



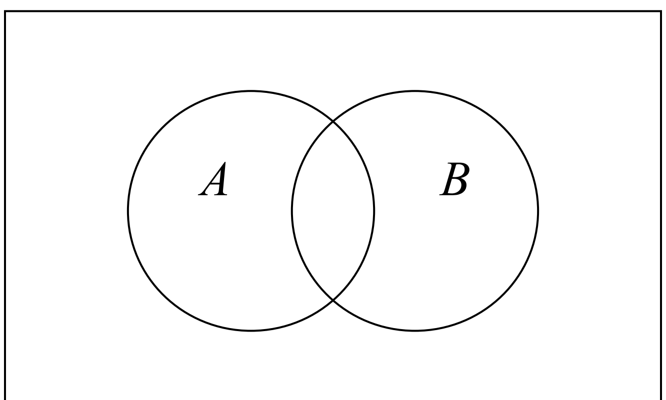
$(A \cup B)^c$ คือส่วนที่แรเงา



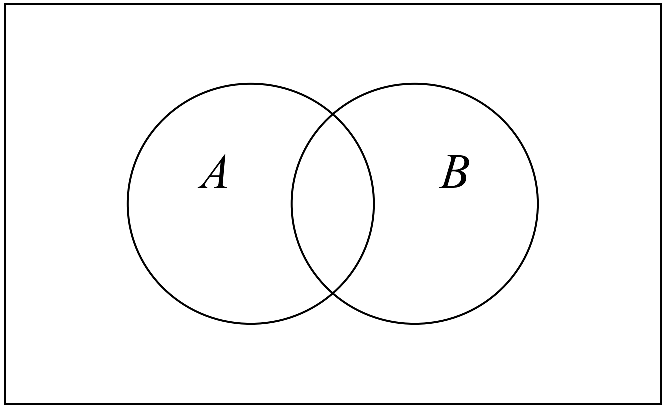
A^c คือส่วนที่แรเงา



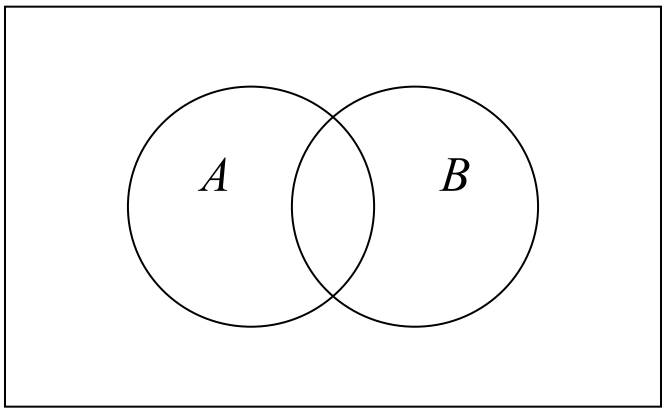
B^c คือส่วนที่แรเงา



$A^c \cap B^c$ คือส่วนที่แรเงา

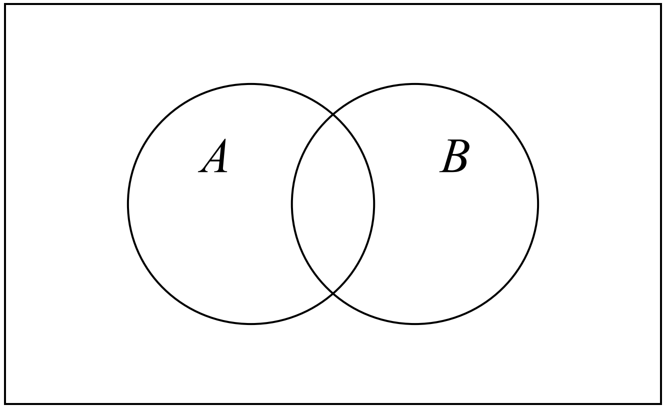


$(A \cup B)^c$ คือส่วนที่แรเงา

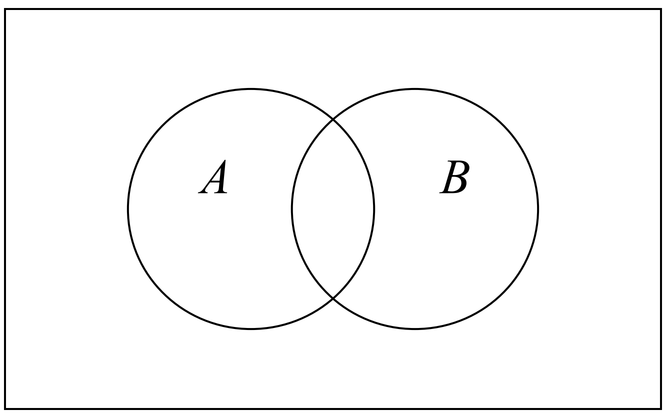


$A^c \cap B^c$ คือส่วนที่แรเงา

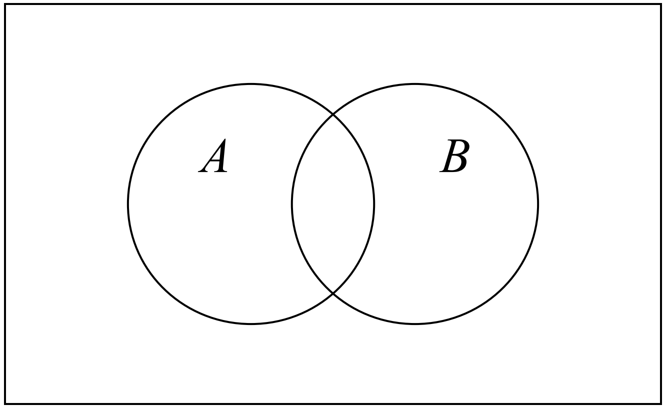
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$



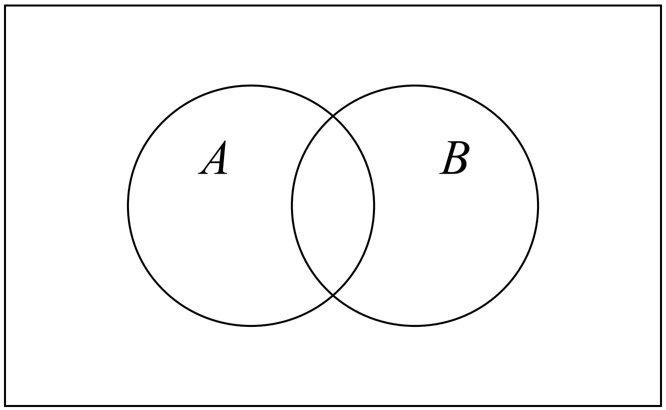
$A \cap B$ คือส่วนที่แรเงา



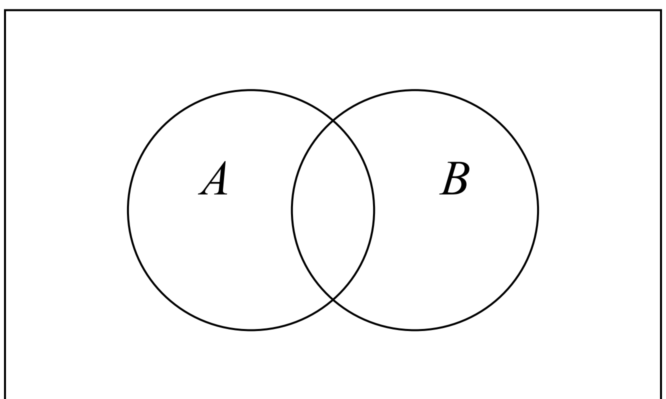
$(A \cap B)^c$ คือส่วนที่แรเงา



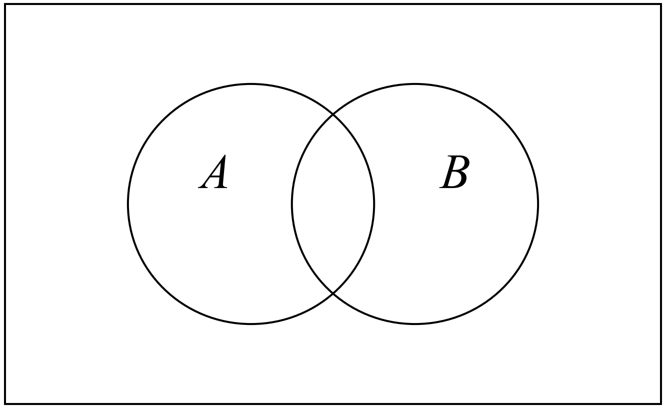
A^c คือส่วนที่แรเงา



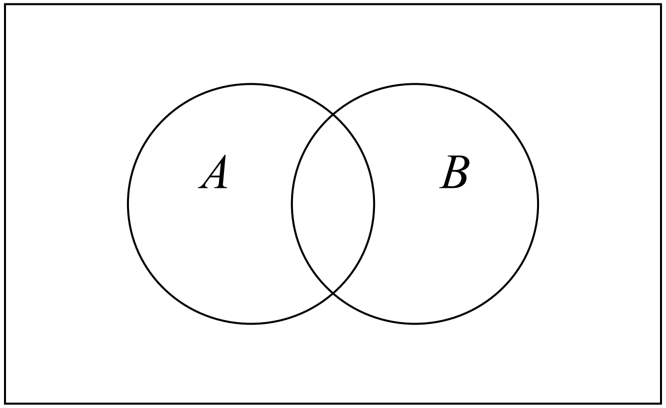
B^c คือส่วนที่แรเงา



$A^c \cup B^c$ คือส่วนที่แรเงา



$(A \cap B)^c$ คือส่วนที่แรเงา



$A^c \cup B^c$ คือส่วนที่แรเงา

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

กฎของ De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

กฎของการกระจาย

$$A \cup (B \cap C) =$$

$$A \cap (B \cup C) =$$

แบบฝึกหัด

จริงหรือเท็จ?

1. จำนวนสมาชิกของเพาว์เวอร์เซตเป็นจำนวนคู่เสมอ?

$P(A) \neq \phi \qquad P(\phi) = \{\phi\}$

2. $A \subseteq \phi \Rightarrow A = \phi$

3. $\phi \in P(A)$ และ $\phi \subseteq P(A)$

4. $A \in P(A)$ และ $A \subseteq P(A)$

5. $A \subseteq B$ แล้ว $P(A) \subseteq P(B)$

6. $P(A) \cup P(B) = P(A \cup B)$

$A = \{1\}, B = \{2\}$

7. $A \setminus B = \phi$ แล้ว $P(A) \setminus P(B) = \phi$

$A \cap B^c = \phi \Rightarrow A \subseteq B$

จงตอบคำถามต่อไปนี้?

$$\left| P\ P\ P\ P\ P\ \phi \right| =$$

โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนชาย 600 คน นักเรียนหญิง 500 คน ในจำนวนนี้เป็นนักเรียนต่างจังหวัด 300 คน เป็นนักกีฬา 50 คน นักเรียนชายต่างจังหวัด 200 คน นักกีฬาชาย 30 คน นักเรียนต่างจังหวัดที่เป็นนักกีฬา 25 คน ซึ่งหนึ่งในจำนวนนี้เป็นชายเสีย 15 คน นักเรียนหญิงที่มาจากต่างจังหวัดและไม่เป็นนักกีฬา มีกี่คน

โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนจำนวน 750 คน พบว่ามีนักเรียนจำนวน 30 คนไม่เล่นกีฬาอะไรเลย นอกนั้นเล่นกีฬาอย่างน้อยหนึ่งประเภทคือ ปิงปอง แบดมินตัน เทนนิส จากการสำรวจเฉพาะกลุ่มนักเรียนที่เล่นกีฬา พบว่ามีนักเรียนจำนวน 630 คน เล่นกีฬาเพียงประเภทเดียวเท่านั้น มีนักเรียน 30 คน เล่นเทนนิสและปิงปอง มีนักเรียน 50 คน เล่นปิงปองและแบดมินตัน มีนักเรียน 40 คน เล่นเทนนิสและแบดมินตัน มีนักเรียนไม่เล่นเทนนิสจำนวน 250 คน จงหาว่ามีนักเรียนกี่คนที่เล่นเทนนิสเพียงอย่างเดียว

PAT1 5 มีนาคม 2554

กำหนดให้ A B และ C เป็นเซตใด ๆ ถ้า $n(A)+n(B)+n(C)=301$ และ $n(A \cup B \cup C) = 102$ แล้ว $n(A \cap B \cap C)$ มีค่าอย่างน้อยเท่ากับเท่าใด

PAT1 9 ตุลาคม 2553


ELEVEN
OF AYUDHYA


ROCKSTAR ENERGY DRINK
PULL
MIX OR MATCH
2 for $4.00
NOS
WIIG


PEPTEIN


Panasonic
EVOLTA
Panasonic
EVOLTA
Panasonic
EVOLTA
Panasonic


เม็ดใหญ่ขึ้น!
ฮอลล์
คูล


OCEANSTAR
Shave Cream
Sensitive Skin
Bonus Size!
OCEANSTAR
Extra Thick
Shave Cream
OCEANSTAR
Shave Cream
Regular