เอกสารประกอบการสอนวิชา

531208

Method of Differential Equations in Metallurgical Engineering

วิธีของสมการเชิงอนุพันธ์ในวิศวกรรมโลหการ

ผศ.ดร.เจษฎา ตัณฑนุช
สาขาวิชาคณิตศาสตร์
สำนักวิชาวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี

สารบัญ

บทที่ 1
บทนำ

สมการเชิงอนุพันธ์เป็นส่วนสำคัญของปัญหาทางคณิตศาสตร์วิทยาศาสตร์วิศวกรรมศาสตร์เกษตร-ศาสตร์ แพทยศาสตร์ และสาขาอื่น ๆ อีกมากมาย เนื่องด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามารถนำไปใช้อธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติได้เป็นจำนวนมาก สำหรับการศึกษาวิชาสมการเชิงอนุพันธ์ในเบื้องต้น จะเริ่มต้นด้วย การศึกษา บทนิยาม การจำแนกประเภท และ ผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์

1.1 บทนิยามและการจำแนกประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์

บทนิยาม 1.1 (สมการเชิงอนุพันธ์). *สมการเชิงอนุพันธ์* (differential equation) คือ สมการซึ่งมีพจน์ของ อนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับ ตัวแปรอิสระ หนึ่งตัวหรือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับ ตัวแปรอิสระ หลายตัว

ตัวอย่าง 1.1.

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x^2} \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{dy}{dx} = \sin(xy) \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \tag{1.4}$$

$$y''' + xy' + x^2y = x^3 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = u \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1.7}$$

$$u_t = c^2 u_{ss} \tag{1.8}$$

$$u_{tt} + uu_{xx} = 0 \tag{1.9}$$

จากตัวอย่างข้างต้นพบว่า y เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า ของตัวแปร x, u เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่า

ของตัวแปร s และ t และ w เป็นฟังก์ชันไม่ทราบค่าของตัวแปร x_1, x_2 และ x_3 ในที่นี้เราเรียกตัวแปร u, w และ y ว่า *ตัวแปรไม่อิสระ* (dependent variable) และเรียกตัวแปร x, s, t, x_1, x_2 และ x_3 ว่า *ตัวแปรอิสระ* (independent variable)

สำหรับสมการ (1.1)-(1.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าเทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวแปร เราเรียกสมการดังกล่าวนี้ว่า*สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ* (ordinary differential equation, ODE) และ สมการ (1.6)-(1.9) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าเทียบกับตัวแปรอิสระมากว่าหนึ่งตัวแปร เราเรียกสมการดังกล่าวนี้ว่า*สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย* (partial differential equation, PDE)

เราสามารถแยกประเภทของสมการเชิงอนุพันธ์ทั้งสองแบบ ตามอันดับของอนุพันธ์สูงสุดที่ปรากฏในสมการ

บทนิยาม 1.2 (อันดับของสมการ). *อันดับ* (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึง*อันดับสูงสุด*ของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

จากตัวอย่าง 1.1

- สมการ (1.1)-(1.3) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง
- สมการ (1.6) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง
- สมการ (1.4) และ (1.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองและสาม ตามลำดับ
- และ สมการ (1.7) และ (1.9) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง

นอกจากนี้ ในทำนองเดียวกับการศึกษาเรื่องเส้น และ ระนาบ ในเรขาคณิต เราสามารถแบ่งสมการเชิงอนุพันธ์สามัญตามลักษณะความเป็น*เชิงเส้น*ได้

บทนิยาม 1.3 (สมการเชิงเส้น). เราเรียกสมการที่อยู่ในรูป

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$

เมื่อ $a_n(x)$ ไม่เท่ากับศูนย์สำหรับทุก ๆ ค่า x ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n* (linear ordinary differential equation of order n) และเรียก สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ที่ไม่สามารถเขียนอยู่ในรูปนี้ได้ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น* (nonlinear ordinary differential equation)

จากตัวอย่าง 1.1

- สมการ (1.1) และ (1.2) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่ง
- สมการ (1.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสาม
- แต่ สมการ (1.3) และ (1.4) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น

และเรายังสามารถแบ่งแยกสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น ได้ตามคุณสมบัติของ*สัมประสิทธิ์*ของตัวแปรและอนุพันธ์ ที่ปรากฏในสมการเชิงเส้นได้เป็น *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว* (constant coefficient linear ordinary differential equation) และ *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร* (variable coefficient linear ordinary differential equation)

จากตัวอย่าง 1.1 สมการ (1.1) และ (1.2) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และ สมการ (1.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

แบบฝึกหัด

จงระบุว่าสมการข้างล่างต่อไปนี้เป็น สมการเชิงอนุพันธ์*สามัญ* หรือ สมการเชิงอนุพันธ์*ย่อย* พร้อมทั้งระบุ *อันดับ*ของสมการและ สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ให้ระบุด้วยว่าเป็น *สมการเชิงเส้น* หรือ *สมการไม่เชิงเส้น*

1. $\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = xe^x$
2. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
3. $\dfrac{d^4 y}{dx^4} + 3\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right)^5 + 5y = 0$
4. $\left(\dfrac{dr}{ds}\right)^3 = \sqrt{\dfrac{d^2 r}{ds^2} + 1}$
5. $u_t = (c(x)u_x)_x$
6. $3y'' + 4y' + 9y = 2\cos(3x)$
7. $\dfrac{d^6 z}{dt^6} + \left(\dfrac{d^4 z}{dt^4}\right)\left(\dfrac{d^3 z}{dt^3}\right) + z = t$
8. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y\sin(x) = 0$
9. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$
10. $y^{(4)} + y'' + 5y = e^{5x}$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 235)

1.2 การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์

ดังที่กล่าวไว้ข้างต้นแล้วว่าสมการเชิงอนุพันธ์มีส่วนสำคัญในการอธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติมากมาย ตัวอย่างปัญหาทางธรรมชาติที่สามารถ ถูกอธิบายได้โดยสมการเชิงอนุพันธ์ อาทิเช่น

- ปัญหาการเคลื่อนที่วัตถุที่ตกลงอย่างอิสระลงสู่พื้นโลก ปัญหาการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ (projectile) การเคลื่อนที่ของดวงดาวในระบบสุริยจักรวาล
- ปัญหาการหาค่าประจุ และ กระแสในวงจรไฟฟ้า
- ปัญหาการหาค่าความร้อนของวัตถุ
- ปัญหาการเคลื่อนที่ของคลื่นน้ำ คลื่นอากาศ คลื่นกระแทก (shock wave) คลื่นแผ่นดินไหว (seismic wave)
- ปัญหาการสั่นของเส้นเชือก สายกีตาร์ การสั่นของสะพาน
- ปัญหาการเติบโต-ลดลง ของประชากร ปัญหาความสมดุลของประชากร
- ปัญหาเรื่องการศึกษาปฏิกิริยาฟิสิกส์ เคมี
- ปัญหาการความชันของเส้นโค้ง

ก่อนจะกล่าวเพิ่มเติมในเรื่องนี้ จะขอกล่าวถึง *อนุพันธ์* (derivative) ก่อน จากในวิชา *แคลคูลัส* (calculus) เราทราบแล้วว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน เทียบกับตัวแปร และสำหรับปรากฏการณ์ทางธรรมชาติโดยส่วนมาก ก็จะเกี่ยวข้องกับ อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณหนึ่ง หรือ หลายปริมาณ เทียบกับปริมาณอื่น ๆ ในการสร้างสูตรทางคณิตศาสตร์ที่สามารถอธิบายปัญหาข้างต้นได้ ก็จะต้องเกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลงทางธรรมชาติหลาย ๆอย่าง ซึ่งอัตราการเปลี่ยนแปลงทางธรรมชาติดังกล่าว สามารถอธิบายได้โดยอนุพันธ์แบบต่าง ๆ และโดยกฎทางวิทยาศาสตร์ เราจะนำ อนุพันธ์เหล่านั้นมาอธิบายปัญหาในรูปแบบของ สมการเชิงคณิตศาสตร์ที่มีพจน์ของอนุพันธ์เข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งนั้นคือ สมการเชิงอนุพันธ์ นั่นเอง

หลาย ๆ คนอาจจะมีคำถามว่า แล้วเราจะได้ประโยชน์อะไร หลังจากที่เราสามารถตั้ง สมการเชิงอนุพันธ์ ที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์ธรรมชาติต่าง ๆ แล้ว คำตอบก็คือถ้าเราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ได้ "*ผลเฉลย*" ของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นก็จะสามารถถูกนำไปใช้ในการ อธิบาย และ ทำนาย ปรากฏการณ์ธรรมชาตินั้นได้

สำหรับเนื้อหาที่จะกล่าวต่อไปภายหลังจากนี้ จะเกี่ยวข้องกับ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ เพื่อความสะดวก ถ้ากล่าวถึง "*สมการเชิงอนุพันธ์*" จะหมายถึง สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ยกเว้นว่าเนื้อหาในส่วนนั้นจะระบุเป็นอย่างอื่น

1.3 ผลเฉลย

บทนิยาม 1.4 (ผลเฉลย). พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{d^n x}\right) = 0, \tag{1.10}$$

เมื่อ F เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ซึ่งมีอาร์กิวเมนต์ (arguments) จำนวน $n+2$ อาร์กิวเมนต์ได้แก่ $x, y, \dfrac{dy}{dx}, \ldots, \dfrac{d^n y}{d^n x}$

- ให้ f เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ซึ่งนิยามสำหรับทุก ๆ x ซึ่งอยู่ในบางช่วง I และ สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ได้ถึงอันดับที่ n สำหรับทุก ๆ $x \in I$ ถ้าฟังก์ชัน f เป็นไปตามเงื่อนไขสองข้อ ต่อไปนี้

  1. ฟังก์ชัน
  $$F\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right)$$
  ถูกนิยาม สำหรับทุก ๆ $x \in I$, และ

  2. เมื่อแทนค่า y ด้วยฟังก์ชัน $f(x)$ และแทนอนุพันธ์ของ y ด้วยอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่มีอันดับสมนัยกันตามลำดับ ลงในสมการ(1.10) แล้วทำให้ F มีค่าเป็นศูนย์ทุก ๆ ค่า x ที่อยู่ใน I นั่นคือ
  $$F\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) = 0$$
  สำหรับทุก ๆ $x \in I$ (หรือเขียนอีกอย่างได้ว่า $F\left(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right) \equiv 0$)

  เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่า *ผลเฉลยชัดแจ้ง* (explicit solution)

- พิจารณาความสัมพันธ์
  $$g(x, y) = 0$$
  ถ้าเราสามารถจัดรูป หรือ ทำให้ความสัมพันธ์ดังกล่าว สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ได้ เราจะเรียกความสัมพันธ์นี้ว่า *ผลเฉลยโดยปริยาย* (implicit solution)

- เพื่อความสะดวก เราจะรวมเรียก *ผลเฉลยชัดแจ้ง* และ *ผลเฉลยโดยปริยาย* ว่า *ผลเฉลย* (solution)

ตัวอย่าง 1.2. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x^2}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.11}$$

วิธีทำ เราพบว่า $\phi'(x) = 2x + x^{-2}$ และ $\phi''(x) = 2 - 2x^{-3}$ เมื่อ $x \neq 0$

เมื่อแทนค่า y ด้วย $\phi(x)$ แทนค่า $\dfrac{dy}{dx}$ ด้วย $\phi'(x)$ และ แทนค่า $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ด้วย $\phi''(x)$ ลงในสมการ (1.11) ได้ว่า

$$\left(2 - 2x^{-3}\right) - \frac{2}{x^2}\left(x^2 - x^{-1}\right) = \left(2 - 2x^{-3}\right) - \left(2 - 2x^{-3}\right) \equiv 0$$

ซึ่ง สมการเป็นจริง สำหรับทุก ๆ ค่า $x \neq 0$ หรือกล่าวอีกอย่างได้ว่า

ฟังก์ชัน $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการ (1.11) บนช่วง$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

ตัวอย่าง 1.3. จงแสดงว่าสำหรับค่าคงตัว c_1 และ c_2 ใด ๆ ฟังก์ชัน

$$\phi(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$$

เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - y' - 2y = 0 \tag{1.12}$$

วิธีทำ จากการคำนวณพบว่า $\phi'(x) = -c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x}$ และ $\phi''(x) = c_1e^{-x} + 4c_2e^{2x}$

เมื่อแทนค่า $y,\ y'$, และ y'' ด้วย $\phi(x),\ \phi'(x)$, และ $\phi''(x)$ ตามลำดับลงในสมการ (1.12) ได้ว่า

$$\begin{aligned}&\left(c_1e^{-x} + 4c_2e^{2x}\right) - \left(-c_1e^{-x} + 2c_2e^{2x}\right) - 2\left(c_1e^{-x} + c_2e^{2x}\right)\\ &= (c_1 + c_1 - 2c_1)e^{-x} + (4c_2 - 2c_2 - 2c_2)e^{2x} \equiv 0\end{aligned}$$

ซึ่ง สมการเป็นจริง สำหรับทุก ๆ ค่า x หรือกล่าวอีกอย่างได้ว่า

ฟังก์ชัน $\phi(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการ (1.12) บนช่วง$(-\infty, \infty)$ สำหรับค่าคงตัว c_1 และ c_2 ใด ๆ

ตัวอย่าง 1.4. จงแสดงว่าความสัมพันธ์

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{1.13}$$

เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1.14}$$

บนช่วง $I = [-5, 5]$

วิธีทำ เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ (1.13) พบว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวนิยามเมื่อ $-5 \leq x \leq 5$ (หรือ x นิยามบนช่วง $[-5, 5]$) และ $-5 \leq y \leq 5$ เมื่อพิจาณาให้ y เป็นตัวแปรไม่อิสระที่ขึ้นกับตัวแปร x และหาอนุพันธ์ของความสัมพันธ์ (1.13) เทียบกับ x เราจะได้

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

ซึ่งสามารถจัดรูปสมการดังกล่าวได้เป็น

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

จากการคำนวณดังกล่าวพบว่า ความสัมพันธ์ (1.13) สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ (1.14) บนช่วง I ตรงนี้แสดงให้เห็นว่า ความสัมพันธ์ (1.13) เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ (1.14) บนช่วง I

จากตัวอย่าง (1.4) พิจารณาความสัมพันธ์

$$x^2 + y^2 = -25 \tag{1.15}$$

พบว่าเมื่อเราหาอนุพันธ์ของความสัมพันธ์ (1.15) เทียบกับ x เราพบว่า

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

เมื่อหารสมการด้วย 2 ทั้งสองข้าง เราจะได้

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

ซึ่งเป็นสมการ (1.14) เช่นเดียวกันตัวอย่างก่อนหน้านี้ **แต่เราไม่สามารถกล่าวได้ว่าความสัมพันธ์ (1.15) เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ (1.14)** เพราะ ความสัมพันธ์ (1.15) ไม่นิยามเมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่าง 1.5. จงแสดงว่าความสัมพันธ์

$$y^2 - x^3 + 8 = 0 \tag{1.16}$$

เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y} \tag{1.17}$$

บนช่วง $(2, \infty)$

วิธีทำเมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ (1.16) พบว่าความสัมพันธ์ดังกล่าวนิยามเมื่อ $x \geq 2$(ความสัมพันธ์นิยามเมื่อ x อยู่ในช่วง $[2, \infty)$) และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เช่นเดียวกันกับตัวอย่างก่อนหน้านี้ เมื่อพิจาณาให้ y เป็นตัวแปรไม่อิสระที่ขึ้นกับตัวแปร x และหาอนุพันธ์ของความสัมพันธ์ (1.16) เทียบกับ x เราจะได้

$$2y\frac{dy}{dx} - 3x^2 = 0$$

ซึ่งสามารถจัดรูปสมการดังกล่าวได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

จากการคำนวณดังกล่าวพบว่า ความสัมพันธ์ (1.16) สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ (1.17) เมื่อ $x > 2$

สำหรับกรณี $x = 2$ ความสัมพันธ์ (1.16) จะส่งผลให้ $y^2 - 2^3 - 8 = 0$ หรือได้ว่า $y = 0$ ทำให้สมการเชิงอนุพันธ์ (1.17) ไม่นิยาม ตรงนี้แสดงให้เห็นว่า ความสัมพันธ์ (1.16) เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ (1.17) ทุก ๆ ค่า x ที่อยู่ในช่วงเปิด $(2, \infty)$

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้ *ทางขวามือ* ของสมการเชิงอนุพันธ์ เป็น *ผลเฉลยชัดแจ้ง* ของสมการเชิงอนุพันธ์ นั้น พร้อมทั้งหา *ขอบเขต*ของตัวแปร x ที่ทำให้ ฟังก์ชันดังกล่าว เป็นผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์

   (a) $\dfrac{dy}{dx} + y = x + 1,$ $\qquad f(x) = x + 3e^{-x}$

   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = 0,$ $\qquad f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$

   (c) $y'' - 3y' + 2y = 4x^2,$ $\qquad f(x) = e^x + 2x^2 + 6x + 7$

   (d) $(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0,$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

   (e) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 + 2,$ $\qquad f(x) = \sin x + x^2$

   (f) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$ $\qquad f(x) = 3\cos x + 5\sin x$

   (g) $y'' - yy' + 3y = -2e^{2x},$ $\qquad f(x) = 2e^{3x} - e^{2x}$

   (h) $y'' + 4y = -5e^{-x},$ $\qquad f(x) = 3\sin 2x + e^{-x}$

2. จงแสดงว่า ความสัมพันธ์ ที่กำหนดให้ *ทางขวามือ* ของสมการเชิงอนุพันธ์ เป็น *ผลเฉลยโดยปริยาย* ของสมการเชิงอนุพันธ์ นั้น พร้อมทั้งหา *ขอบเขต*ของตัวแปร x ที่ทำให้ ฟังก์ชันดังกล่าว เป็นผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์

   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y},$ $\qquad x^2 - y^2 = 6$

   (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{y - 1},$ $\qquad y - \ln y = x^2 + 1$

   (c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-xy} - y}{e^{-xy} + x},$ $\qquad e^{xy} + y = x - 1$

   (d) $\dfrac{dy}{dx} = 2x\sec(x + y) - 1,$ $\qquad x^2 - \sin(x + y) = 1$

   (e) $y'' = \dfrac{6xy' + (y')^3 \sin y - 2\,(y')^2}{3x^2 - y},$ $\qquad \sin y + xy - x^3 = 2$

1.4 สรุป

สมการเชิงอนุพันธ์ คือ สมการซึ่งมีพจน์ของอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวหรือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับตัวแปรอิสระหลายตัว เราเรียก สมการเชิงอนุพันธ์ ที่มีอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัว ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ* และ เรียกสมการเชิงอนุพันธ์ ที่มีอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าเทียบกับตัวแปรอิสระหลายตัว ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย*

อันดับ ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ และ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย หมายถึง อันดับสูงสุด ของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ยังสามารถถูกแบ่งได้เป็น *สมการอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น* และ *สมการอนุพันธ์สามัญไม่เชิงเส้น* และ สำหรับสมการอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น สามารถถูกแบ่งได้ตามคุณสมบัติของสัมประสิทธิ์ ได้เป็น *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว* และ *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร*

สำหรับเนื้อหาเบื้องต้นในการศึกษาวิชาสมการเชิงอนุพันธ์จะเน้นในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ หรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งก็คือ การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั่นเอง ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ จะแบ่งเป็น *ผลเฉลยชัดแจ้ง* และ *ผลเฉลยโดยปริยาย* ซึ่งในเนื้อหาที่จะกล่าวถึงต่อไป จะเกี่ยวข้องกับการนำวิธีต่าง ๆ เข้ามาหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งวิธีการแต่ละแบบที่จะนำมาใช้ก็จะขึ้นกับ *ชนิด* ของสมการเชิงอนุพันธ์

บทที่ 2
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่หนึ่ง

เนื้อหาในบทนี้ เกี่ยวข้องกับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์*อันดับที่หนึ่ง*[1] (first-order differential equation) เนื่องด้วย เรามีวิธีการในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์มากมาย สิ่งสำคัญในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ก็คือ *การเลือกวิธีที่เหมาะสม*สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ๆ

2.1 รูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่จะศึกษา อาจจะเขียนให้อยู่ในรูป*อนุพันธ์* (derivative form)

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \tag{2.1}$$

หรือ รูป*ดิฟเฟอเรนเชียล* (differential form)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.2}$$

โดยสมการรูปดิฟเฟอเรนเชียล (2.2) จะสมมูลกับสมการรูปอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

เมื่อ $N(x,y) \neq 0$

ตัวอย่าง 2.1. สมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

เป็นสมการที่อยู่ในรูปอนุพันธ์ (2.1) ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล (2.2) ได้เป็น

$$\left(x^2+y^2\right)dx + (y-x)\,dy = 0$$

[1] ดูบทนิยามเรื่อง*อันดับ* หน้า 2

ตัวอย่าง 2.2. สมการ

$$(\sin x + y)\,dx + (x + 3y)\,dy = 0$$

เป็นสมการที่อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล (2.2) ซึ่งสมารถเขียนให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ (2.1) ได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x + y}{x + 3y}$$

สำหรับรูปอนุพันธ์ (2.1) จะเป็นรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ที่เห็นได้บ่อย และ สื่อได้ชัดเจนว่า y เป็นตัวแปรไม่อิสระ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ ตัวแปรอิสระ x แต่ สำหรับ รูปดิฟเฟอเรนเชียล (2.2) ผู้อ่านอาจจะสับสนว่าตัวแปรใดเป็นตัวแปรอิสระ และ ตัวแปรใดเป็นตัวแปรไม่อิสระถ้าไม่ได้มีข้อความระบุไว้อย่างไรก็ตาม สำหรับเอกสารฉบับนี้จะกำหนดให้ y เป็นตัวแปรไม่อิสระ และ x เป็นตัวแปรอิสระ ยกเว้นว่าเนื้อหาในส่วนนั้นจะระบุเป็นอย่างอื่น

2.2 สมการเชิงอนุพันธ์อย่างง่าย

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ที่ง่ายต่อการหาผลเฉลยที่สุด จะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2.3}$$

การแก้สมการนี้ จะเป็นแค่การหาค่า*อินทิกรัล* (integral) เท่านั้นเองซึ่งผลเฉลยของสมการรูปแบบนี้คือ[2]

$$y = \int f(x)dx + c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 2.3. ตัวอย่างผลเฉลยของสมการอนุพันธ์อย่างง่าย

- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = 1$ คือ $y = x + c$
- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = x$ คือ $y = \dfrac{x^2}{2} + c$
- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ คือ $y = \sin x + c$
- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = e^x$ คือ $y = e^x + c$
- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = e^{x^2}$ คือ $y = \int e^{x^2}\,dx + c$

หมายเหตุ เราไม่สามารถเขียนฟังก์ขัน $\int e^{x^2}\,dx$ ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันพื้นฐานทั่วไปที่เรารู้จักได้

[2] ดูเรื่องการหาค่าอินทิกรัลได้ในหนังสือแคลคูลัสทั่วไป

2.3 สมการแยกกันได้

บทนิยาม 2.1 (สมการแยกกันได้). *สมการแยกกันได้* (separable equation) คือ สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, \tag{2.4}$$

เมื่อ g เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ h เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ในที่นี้ $f(x,y) = \dfrac{g(x)}{h(y)}$ นั่นเอง

หมายเหตุ ในบางครั้ง เราอาจจะเขียนสมการแยกกันได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y),$$

เมื่อ $p(y) = \dfrac{1}{h(y)}$

ตัวอย่าง 2.4. สมการต่อไปนี้เป็นสมการแยกกันได้

- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$
- $\dfrac{dy}{dx} = kx,$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ
- $\dfrac{dy}{dx} = ky,$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ (เพราะสามารถเขียนได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{k}{1/y}$)
- $y\dfrac{dy}{dx} = \cos y \ln x$ (เพราะสามารถเขียนได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{y/\cos y}$)
- $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ (เพราะสามารถเขียนได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1/x}{1/y}$)
- $3x\left(y^2+1\right)dx + y\left(x^2+1\right)dy = 0$ (เพราะสามารถเขียนได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\frac{3x}{x^2+1}}{\frac{y}{y^2+1}}$)
- $x\sqrt{1+y^2}dx = y\sqrt{1+x^2}dy$ (เพราะสามารถเขียนได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}$)
- $yy' = x^2$ (เพราะสามารถเขียนได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y}$)
- $y' = \sqrt[3]{64xy}$ (เพราะสามารถเขียนได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt[3]{64x}}{1/\sqrt[3]{y}}$)

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการแยกกันได้

1. จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล โดยที่ทางซ้ายมือของสมการ มีเฉพาะพจน์ที่เกี่ยวข้องกับ ตัวแปร y และทางขวามือของสมการ มีเฉพาะพจน์ที่เกี่ยวข้องกับ ตัวแปร x

$$h(y)dy = g(x)dx$$

2. ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

3. ผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูปผลเฉลยโดยปริยาย คือ

$$H(y) = G(x) + c,$$

เมื่อ $H(y) = \int h(y)dy$ $G(x) = \int g(x)dx$ และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

หมายเหตุ ค่าคงตัว c ที่ปรากฏในสมการ เป็นการรวมค่าคงตัวของการอินทิเกรตทางซ้ายมือ เข้ากับค่าคงตัวของการอินทิเกรตขวามือของสมการ

ตัวอย่าง 2.5. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} \tag{2.5}$$

วิธีทำ

1. จัดรูปสมการ

$$\frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x^2}dx$$

2. ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int \frac{1}{x^2}dx$$

3. ผลเฉลยโดยปริยายที่ได้คือ

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c, \tag{2.6}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เราสามารถตรวจสอบว่า ผลเฉลยโดยปริยายที่ได้ ถูกต้องหรือไม่ โดยการหาค่า y จากความสัมพันธ์ (2.6) ซึ่งจะได้ว่า

$$y = \frac{x}{1 - cx} \tag{2.7}$$

เราพบว่า

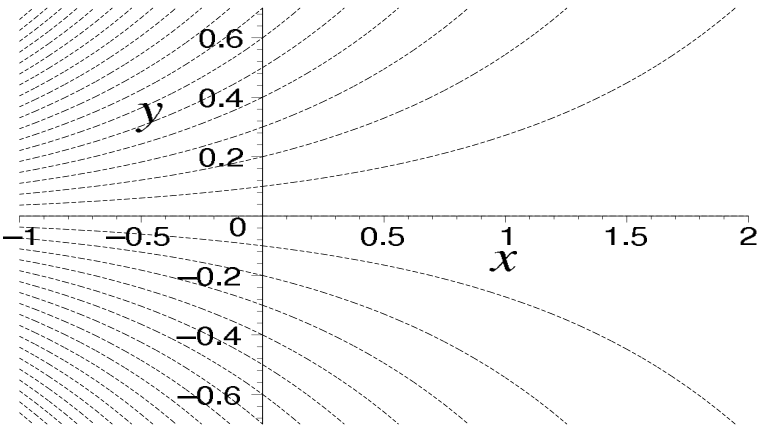
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - cx)(1) - x(-c)}{(1 - cx)^2} = \frac{1}{(1 - cx)^2}$$

และ

$$\frac{y^2}{x^2} = (\frac{x}{1 - cx})^2 \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(1 - cx)^2}$$

นี่แสดงให้เห็นว่า $y = x/(1 - cx)$ เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการ (2.5) หรือ กล่าวอีกอย่างหนึ่งได้ว่าความสัมพันธ์ (2.6) เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ (2.5)

จากผลเฉลย (2.7) ในตัวอย่าง 2.5 แสดงให้เห็นว่า ในบางครั้ง ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เราอาจจะได้ผลเฉลยจำนวนมากมายเป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งจำนวนผลเฉลยเหล่านั้น ขึ้นอยู่กับค่าคงตัว c ซึ่งเป็นค่าคงตัวใด ๆ เรารวมเรียกผลเฉลยที่หมดนี้ว่า*ผลเฉลยทั่วไป* (general solution) แต่ถ้าเรากำหนดเฉพาะเจาะจงค่า c เราจะเรียกผลเฉลยนั้นว่า *ผลเฉลยเฉพาะ* (particular solution)



รูปที่ 2.1. ผลเฉลยของสมการ $y' = y, y = ce^x$, เมื่อ c มีค่าเป็น $..., -.2, -.1, 0, .1, .2, ...$

ตัวอย่างเช่น $y = x/(1 - cx)$ เป็น*ผลเฉลยทั่วไป*ของสมการ (2.5) แต่ถ้ากำหนดให้ $c = 1$

$$y = \frac{x}{1 - x}$$

เป็น*ผลเฉลยเฉพาะ*ของสมการ (2.5)

ตัวอย่าง 2.6. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = ky, \tag{2.8}$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใด ๆ

วิธีทำ

1. จัดรูปสมการ

$$\frac{dy}{y} = kdx$$

2. ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdx \tag{2.9}$$

3. ดังนั้นผลเฉลยโดยปริยายที่ได้คือ

$$\ln|y| = kx + c \tag{2.10}$$

นำเลขฐานธรรมชาติ e มายกกำลังด้วยค่าทั้งสองข้างของสมการ เพื่อกำจัดค่า $\ln$ จากสมการ (2.10) ได้ว่า

$$|y| = e^c e^{kx}$$

เราได้ผลเฉลยชัดแจ้งเป็น

$$y = \pm e^c e^{kx} \tag{2.11}$$

ถ้ากำหนดให้ $\mathbf{C} = \pm e^c$ จะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.8) เป็น

$$y = \mathbf{C}e^{kx}$$

หมายเหตุ หนังสือหลายเล่ม ไม่ระวังในการหาค่าอินทิกรัล $\frac{1}{y}$ เทียบกับ y โดยไม่ใส่เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ (absolute value sign) หลังจากหาค่าอินทิกรัล ซึ่งจากสมการ (2.9) เขาเหล่านั้นจะได้

$$\ln y = kx + c$$

แทนที่จะได้สมการ (2.10) และจากค่าอินทิกรัลนี้ เราได้ค่า y คือ

$$y = e^c e^{kx}$$

ซึ่งจะพบว่า ความสัมพันธ์นี้จะมีเฉพาะค่า y ที่มากกว่าศูนย์ แต่ในความเป็นจริง $y = -e^c e^{kx}$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการ (2.8) ด้วยเหมือนกัน

ตัวอย่าง 2.7. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$x \sin y dx - (x^2+1)\cos y dy = 0 \tag{2.12}$$

วิธีทำ ในการแก้สมการ เราสามารถจัดรูปสมการได้เป็น

$$\frac{\cos y}{\sin y} dy = \frac{x}{x^2+1} dx$$

จากนั้น ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos y}{\sin y} dy &= \int \frac{x}{x^2+1} dx \\ \ln|\sin y| &= \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c \ = \ \ln\sqrt{x^2+1} + c \end{aligned}$$

กำจัดค่า $\ln$ ออกจากสมการ ได้เป็น

$$|\sin y| = e^c\sqrt{x^2+1},$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยโดยปริยาย คือ

$$\sin y = \pm e^c\sqrt{x^2+1},$$

ให้ $\mathbf{C} = \pm e^c$ เราก็ได้จะผลเฉลยทั่วไปของสมการ (2.12) เป็น

$$\sin y = \mathbf{C}\sqrt{x^2+1} \tag{2.13}$$

หมายเหตุ จากผลเฉลย (2.13) ถ้าจะหาผลเฉลยชัดแจ้งโดยใช้ฟังก์ชันฟังก์ชันไซน์ผกผัน[3] (inverse sine function) เราจะได้

$$y = \sin^{-1}\left(c\sqrt{x^2+1}\right)$$

พบว่า เราจะสูญเสียผลเฉลยบางผลเฉลยไป เพราะว่าฟังก์ชันไซน์ ไม่ใช่ฟังชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-to-one function)

ตัวอย่างผลเฉลยที่สูญเสียไป เช่น $\sin^{-1}\left(c\sqrt{x^2+1}\right) \pm 2\pi,\ \sin^{-1}\left(c\sqrt{x^2+1}\right) \pm 4\pi,\ \ldots$

[3]ฟังก์ชันไซน์ผกผัน มีโดเมนอยู่ในช่วง $[-1,1]$ และ เรนจ์อยู่ในช่วง $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

แบบฝึกหัด

จงแก้สมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $y' = e^{3x} - x$
2. $xy' = 1$
3. $y' + y\tan x = 0$
4. $y' - y\tan x = 0$
5. $y\ln y dx - xdy = 0$
6. $\left(1+x^2\right)y' = \tan^{-1} x$
7. $y' + 2xy = 0$
8. $\dfrac{dy}{dx} = y\sin x$
9. $(1+x)\dfrac{dy}{dx} = 4y$
10. $y' + 2xy^2 = 0$
11. $2\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$
12. $y' = \sqrt[3]{64xy}$
13. $xyy' = y - 1$
14. $\left(1+x^2\right)dy + \left(1+y^2\right)dx = 0$
15. $x^5y' + y^5 = 0$
16. $y'\sin y = x^2$
17. $\left(y^2-1\right)xdx + (x+2)ydy = 0$
18. $\tan\theta dr + 2rd\theta = 0$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 236)

2.4 ปัญหาค่าตั้งต้น

ก่อนที่จะกล่าวถึงบทนิยามของ*ปัญหาค่าตั้งต้น* เราจะพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ก่อน

ตัวอย่าง 2.8. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{2.14}$$

ซึ่ง ที่จุด $x = 2$ ผลเฉลยของสมการนี้มีค่าเป็น 5

วิธีทำ จากเนื้อหาในหัวข้อ 2.2 ทำได้เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ(2.14) ได้เป็น

$$y = x^2 + c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ จากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ เมื่อ $x = 2$ ผลเฉลยคือ $y = 5$ ทำให้เราได้ว่า

$$5 = 2^2 + c$$

เมื่อแก้สมการ เราได้ $c = 1$ ดังนั้น ผลเฉลยที่ทำให้สมการ (2.14) เป็นจริง และเป็นไปตามเงื่อนไข "*ที่จุด* $x = 2$ *ผลเฉลยของสมการนี้มีค่าเป็น* 5" คือ

$$y = x^2 + 1$$

จากตัวอย่าง 2.8 เราสามารถเขียนข้อปัญหาดังกล่าว ในเชิงภาษาคณิตศาสตร์ได้เป็น:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 2x, \\ y(2) &= 5 \end{aligned}$$

ในที่นี้ $y(2) = 5$ หมายถึง y เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่ง y มีค่าเป็น 5 เมื่อ $x = 2$

จากตัวอย่างข้างต้น เห็นได้ว่าข้อปัญหาที่ให้มา นอกจากเราจะต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์แล้ว ผลเฉลยที่ได้จากสมการเชิงอนุพันธ์นั้นต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดมาให้ด้วย เราให้บทนิยามข้อปัญหาในรูปแบบดังกล่าว ดังนี้

บทนิยาม 2.2 (ปัญหาค่าตั้งต้น). *ปัญหาค่าตั้งต้น* (initial-value problem)

เป็นข้อปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง หรือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ ซึ่งประกอบไปด้วย

1. *สมการเชิงอนุพันธ์*
2. *เงื่อนไข* ซึ่ง ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ โดยตัวเงื่อนไข อาจจะมีเพียงหนึ่งเงื่อนไข หรือหลายเงื่อนไขก็ได้ แต่ทุกเงื่อนไข จะต้องเป็นเงื่อนไขที่สัมพันธ์กับค่าของตัวแปร x **เพียงค่าเดียวเท่านั้น** และเรียกเงื่อนไขนี้ว่า *เงื่อนไขตั้งต้น* (initial condition)

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์เรื่องการมีอยู่จริง (existence) และความเป็นไปได้อย่างเดียว (uniqueness) ของผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นได้ใน [18]

ตัวอย่าง 2.9.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \cos 2x,$$
$$y(\frac{\pi}{4}) = 1,$$
$$y'(\frac{\pi}{4}) = -1$$

นี้เป็นปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งผลเฉลยของสมการ

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \cos 2x$$

จะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขคือ ผลเฉลยมีค่าเป็น 1 และอนุพันธ์ของผลเฉลย มีค่าเป็น -1 เมื่อ $x = \frac{\pi}{4}$

สำหรับรูปแบบมาตรฐานของปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งคือ

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

หรือ

$$\begin{aligned} M(x, y)dx + N(x, y)dy &= 0, \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

1. $\dfrac{dy}{dx} = ye^{-x},\ y(0) = 1$
2. $x\cos x\, dx + \left(1 - 6y^5\right) dy = 0,\ y(\pi) = 0$
3. $\sin x\, dx + y\, dy = 0,\ y(0) = -2$
4. $y' = \dfrac{-x}{y},\ y(1) = \sqrt{3}$
5. $\left(x^2 + 1\right) dx + \dfrac{1}{y} dy = 0,\ y(-1) = 1$
6. $xy' + y = 0,\ y(2) = -2$
7. $xe^{x^2}\, dx + \left(y^5 - 1\right) dy = 0,\ y(0) = 0$
8. $y' = \dfrac{x^2y - y}{y + 1},\ y(3) = -1$
9. $\dfrac{dy}{dx} = 8 - 3y,\ y(0) = 4$
10. $e^x y' = 2(x + 1)y^2,\ y(0) = \dfrac{1}{6}$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 237)

2.5 สมการเอกพันธุ์

บทนิยาม 2.3 (สมการเอกพันธุ์)**.** เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ว่า *สมการเอกพันธุ์* (homogeneous equation)

หมายเหตุ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่เขียนในรูปดิฟเฟอเรนเชียล

$$M\left(\frac{y}{x}\right) dx + N\left(\frac{y}{x}\right) dy = 0$$

เป็นสมการเอกพันธุ์ด้วยเหมือนกัน

ตัวอย่าง 2.10. ตัวอย่างสมการเอกพันธุ์

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+2xy}{x^2} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\dfrac{y}{x}\right)$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y-3x}{2x-y} = \dfrac{4\frac{y}{x}-3}{2-\frac{y}{x}}$
4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+3y^2}{2xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)} + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)$
5. $\left(x^2+3xy+y^2\right)dx - x^2dy = 0$ หรือ สามารถจัดรูปได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3xy+y^2}{x^2} = 1 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการเอกพันธุ์

1. สมมติให้ $v = \dfrac{y}{x}$ จะได้ว่า $y = vx$ ซึ่งทำให้

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

2. แทนค่าลงในสมการ $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = f(v) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

3. จัดรูปใหม่

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v)-v}{x}$$

4. เนื่องจากสมการที่ถูกจัดรูปใหม่ เป็นสมการแยกกันได้

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{f(v)-v}}$$

เราสามารถใช้*ขั้นตอนวิธีแก้สมการแยกกันได้*ในการหาผลเฉลย

5. แทนค่า v ด้วย $\dfrac{y}{x}$ ลงในผลเฉลยที่ได้

หมายเหตุ สำหรับกรณีเมื่อสมมติค่า $v = \dfrac{y}{x}$ แล้วการหาผลเฉลยมีความยุ่งยาก ซับซ้อน ให้ผู้อ่านลองสมมติค่า $v = \dfrac{x}{y}$ กรณีนี้อาจจะทำให้ การหาผลเฉลยทำได้ง่ายขึ้น

ตัวอย่าง 2.11. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \tag{2.15}$$

วิธีทำ เราสามารถจัดรูปสมการ (2.15) ได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} \tag{2.16}$$

เราพบว่า สมการ (2.15) เป็นสมการเอกพันธุ์ ดังนั้น เราสามารถแก้สมการนี้ได้โดย

1. สมมติให้ $v = \dfrac{y}{x}$ จะได้ว่า $y = vx$ ซึ่งทำให้

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

2. แทนค่า $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} = \frac{1+v}{1-v} = v + x\frac{dv}{dx}$$

3. จัดรูปใหม่

$$\begin{aligned} x\frac{dv}{dx} &= \frac{1+v}{1-v} - v = \frac{1+v^2}{1-v}, \\ \frac{1-v}{1+v^2}dv &= \frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

4. หาผลเฉลยโดยการอินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} \int \frac{1-v}{1+v^2}dv &= \int \frac{1}{x}dx, \\ \int \left(\frac{1}{1+v^2} - \frac{1}{2}\frac{2v}{1+v^2}\right) dv &= \ln|x| + c, \\ \tan^{-1} v - \frac{1}{2}\ln\left(1+v^2\right) &= \ln|x| + c, \end{aligned}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

5. แทนค่า v ด้วย $\dfrac{y}{x}$ ลงในผลเฉลยที่ได้

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) + \ln|x| + c$$

หรือจะเขียนในรูปที่ง่ายกว่าได้เป็น

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + c$$

อย่างที่กล่าวไว้ข้างต้นแล้วว่าสิ่งสำคัญในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ก็คือการเลือกวิธีที่เหมาะสมสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ๆ และเพื่อเป็นการประหยัดเวลา แทนที่เราจะต้องจัดรูปสมการเพื่อจะดูว่า สมการเชิงอนุพันธ์ดังกล่าว เป็นสมการเอกพันธุ์เราอาจจะใช้เงื่อนไขที่จะกล่าวต่อไปนี้ตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์นั้นเป็นสมการเอกพันธุ์หรือไม่

บทนิยาม 2.4 (ฟังก์ชันเอกพันธุ์). *ฟังชันก์เอกพันธุ์ระดับขั้น* n (homogenous function of degree n) คือ ฟังก์ชันที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

หมายเหตุ ในที่นี้เราใช้คำว่า*เอกพันธุ์*ในสองกรณีคือ *สมการเชิงเอกพันธุ์* [4] และ *ฟังก์ชันเอกพันธุ์*

ตัวอย่าง 2.12.

- ฟังก์ชัน $f(x, y) = x^2 + xy$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้นสอง เพราะว่า

$$f(tx, ty) = (tx)^2 + (tx)(ty) = t^2(x^2 + xy) = t^2 f(x, y)$$

- ฟังก์ชัน $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้นหนึ่ง เพราะว่า

$$g(tx, ty) = \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = tg(x, y) \qquad (t \geq 0)$$

- ฟังก์ชัน $h(x, y) = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น $\dfrac{3}{2}$ เพราะว่า

$$h(tx, ty) = (tx)\sqrt{ty} + (ty)\sqrt{tx} = t^{\frac{3}{2}} h(x, y) \qquad (t \geq 0)$$

- ฟังก์ชัน $F(x, y) = x^2y + xy$ เป็น *ไม่เป็น*ฟังก์ชันเอกพันธุ์ เพราะว่า

$$F(tx, ty) = (tx)^2(ty) + (tx)(ty) = t^2(tx^2y + xy)$$

  ไม่สามารถเขียนได้ในรูป $t^n F(x, y)$ ได้

จากบทนิยามข้างต้น ถ้าเราทราบแล้วว่าฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องในสมการเป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ เราสามารถตรวจสอบได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ ดังกล่าวเป็นสมการเอกพันธุ์หรือไม่ โดยทฤษฎีบทต่อไปนี้

[4] ดูบทนิยามเรื่องสมการเอกพันธุ์ในหน้า 21

ทฤษฎีบท 2.1. *พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.17}$$

*ถ้าฟังก์ชัน $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็น**ฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีระดับขั้นเดียวกัน**แล้ว สมการ (2.17) เป็น **สมการเอกพันธุ์***

พิสูจน์ สมการ (2.17) สามารถเขียนใหม่ในรูปอนุพันธ์ได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

เนื่องจาก ฟังก์ชัน $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ ที่มีระดับขั้นเดียวกัน (สมมติว่ามีระดับขั้น n) นั่นคือ$M(tx,ty) = t^n M(tx,ty)$ และ $N(tx,ty) = t^n N(tx,ty)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \\
&= -\frac{M(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x})}{N(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x})} \\
&= -\frac{x^n M(1, \frac{y}{x})}{x^n N(1, \frac{y}{x})} \\
&= -\frac{M(1, \frac{y}{x})}{N(1, \frac{y}{x})}
\end{aligned}$$

กำหนดให้ $f(s) = -\dfrac{M(1,s)}{N(1,s)}$ เราได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$$

ซึ่งเป็นสมการเอกพันธุ์ นั่นเอง □

ตัวอย่าง 2.13. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$\left(x^2 + 3xy + y^2\right) dx - x^2 dy = 0, \qquad y(1) = 0 \tag{2.18}$$

วิธีทำ ในที่นี้

$$M(x,y) = \left(x^2 + 3xy + y^2\right) \qquad \text{และ} \qquad N(x,y) = -x^2$$

เราสามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า ทั้ง $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ลำดับขั้นสอง ดังนั้นสมการ (2.18) เป็นสมการเอกพันธุ์ โดยสามารถจัดรูปได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2} = 1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

เราสามารถหาผลเฉลยได้ดังนี้

1. สมมติให้ $v = \dfrac{y}{x}$ จะได้ว่า $y = vx$ ซึ่งทำให้

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

2. แทนค่าลงในสมการ $\dfrac{dy}{dx} = f(\dfrac{y}{x})$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = 1 + 3v + v^2 = 1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

3. จัดรูปใหม่

$$\begin{aligned} x\frac{dv}{dx} &= 1 + 2v + v^2 = (1+v)^2, \\ \frac{1}{(1+v)^2}dv &= \frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

4. หาผลเฉลยโดยการอินทิเกรตทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1+v)^2}dv &= \int \frac{1}{x}dx \\ -\frac{1}{1+v} &= \ln|x| + c \\ 1+v &= \frac{-1}{\ln|x|+c} \\ v &= \frac{-1}{\ln|x|+c} - 1, \end{aligned}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

5. แทนค่า v ด้วย $\dfrac{y}{x}$ ลงในผลเฉลยที่ได้

$$\frac{y}{x} = \frac{-1}{\ln|x|+c} - 1,$$

คูณด้วย x ทั้งสองข้าง

$$y = \frac{-x}{\ln|x|+c} - x,$$

6. จากเงื่อนไขค่าตั้งต้นที่ว่า $y = 0$ เมื่อ $x = 1$ แทนค่าลงในผลเฉลยเพื่อหาค่า c

$$0 = \frac{-1}{\ln 1 + c} - 1,$$

เมื่อแก้สมการได้ค่า $c = -1$

ดังนั้นผลเฉลยเฉพาะรายของปัญหาค่าตั้งต้น (2.18) คือ[5]

$$y = \frac{x}{1-\ln x} - x$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   (a) $(x+y)\,y' = x - y$

   (b) $x\,y' = y + 2\sqrt{xy}$

   (c) $2xy\,y' = x^2 + 2y^2$

   (d) $x\,y' = x + y$

   (e) $x\,y' = 2x + 3y$

   (f) $(x^2 - 2y^2)dx + xy\,dy = 0$

   (g) $x^2\,y' - 3xy - 2y^2 = 0$

   (h) $x\sin\dfrac{y}{x}\,y' = y\sin\dfrac{y}{x} + x$

   (i) $x\,y' = y + 2xe^{-y/x}$

   (j) $x\,y' = \sqrt{x^2+y^2} + y$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

   (a) $y' = -\dfrac{x}{y},\ \ y(1) = \sqrt{4}$

   (b) $y^3y' + x^3 = 0,\ \ y(0) = 1$

   (c) $x\dfrac{dy}{dx} + y = 0,\ \ y(2) = -2$

   (d) $xyy' = 2y^2 + 4x^2,\ \ y(2) = 4$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 237)

[5] ในการศึกษาเรื่องการมีจริงของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (existence of a solution of differential equation) เราจะศึกษาผลเฉลยเฉพาะในย่านใกล้เคียง (neighborhood) กับค่าตั้งต้นเท่านั้น ซึ่งสำหรับข้อปัญหาข้อนี้ เราจะพิจารณาผลเฉลยในย่านใกล้เคียง $x = 1$ ซึ่งค่า x ในย่านใกล้เคียงจะมีค่ามากกว่าศูนย์ นั้นทำให้เราสามารถละเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ได้

2.6 สมการเชิงเส้น

สำหรับรูปแบบทั่วไปของ*สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น* (first order linear differential equation) คือ

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x), \tag{2.19}$$

เมื่อ $a_1(x) \not\equiv 0$.

เนื่องจาก $a_1(x)$ ไม่ได้เป็นฟังก์ชันศูนย์ ดังนั้นเราสามารถหารสมการดังกล่าวด้วย $a_1(x)$ ทำได้สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{2.20}$$

เมื่อ $p(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ และ $q(x) = \dfrac{b(x)}{a_1(x)}$

หมายเหตุ เรามักนิยมเขียนแทนสมการอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น ด้วยรูปสมการ (2.20) มากกว่ารูปสมการ (2.19)

นอกจากนี้เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (2.20) ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล ได้เป็น

$$[p(x)y - q(x)]\,dx + dy = 0$$

ตัวอย่าง 2.14. ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น

- $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x},$ $\quad (a_1(x) = 1,\ a_0(x) = 1,\ b(x) = e^{-x})$
- $xy' + x^2y = x^3,$ $\quad \left(a_1(x) = x,\ a_0(x) = x^2,\ b(x) = x^3 \right)$
- $\dfrac{dy}{dx} + \sin x\ y = \tan x,$ $\quad (a_1(x) = 1,\ a_0(x) = \sin x,\ b(x) = \tan x)$
- $\dfrac{dy}{dx} = x^2,$ $\quad \left(a_1(x) = 1,\ a_0(x) = 0,\ b(x) = x^2 \right)$
- $\dfrac{dy}{dx} + x^2y = 0,$ $\quad \left(a_1(x) = 1,\ a_0(x) = x^2,\ b(x) = 0 \right)$
- $\dfrac{dy}{dx} = 0,$ $\quad (a_1(x) = 1,\ a_0(x) = 0,\ b(x) = 0)$
- $[x^2y - x]dx + dy = 0,$ $\quad \left(a_1(x) = 1,\ a_0(x) = x^2,\ b(x) = x \right)$

จากตัวอย่างข้างต้น พบว่า ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (2.20) มีค่า $p(x)$ เป็นศูนย์ นั่นคือ

$$\frac{dy}{dx} = q(x)$$

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นนี้ ก็จะกลายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อย่างง่าย[6] โดยมีผลเฉลย คือ

$$y = \int q(x)dx + c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ แต่ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น มีค่า $q(x)$ เป็นศูนย์ หรือ

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

สมการนี้ จะกลายเป็นสมการแยกกันได้[7]

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

และมีผลเฉลยคือ

$$y = Ce^{-\int p(x)dx},$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จากการสังเกต เราอาจตั้งสมมติฐาน ว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (2.20) อยู่ในรูป

$$y = \mathcal{C}(x)e^{-\int p(x)dx}, \tag{2.21}$$

เมื่อ $\mathcal{C}$ เป็นฟังก์ชันของ x, แทนที่จะอยู่ในรูปค่าคงตัวคูณด้วย $e^{-\int p(x)dx}$ เมื่อนำค่า y มาแทนในสมการ (2.20) เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\mathcal{C}(x)e^{-\int p(x)dx}\right] + p(x)\left[\mathcal{C}(x)e^{-\int p(x)dx}\right] &= q(x) \\
\left[-\mathcal{C}(x)p(x) + \mathcal{C}'(x) + p(x)\mathcal{C}(x)\right]e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \\
\mathcal{C}'(x)e^{-\int p(x)dx} &= q(x) \\
\mathcal{C}'(x) &= q(x)e^{\int p(x)dx}
\end{aligned}$$

เมื่อทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ เราจะได้ค่าของฟังก์ชัน $\mathcal{C}$ คือ

$$\mathcal{C}(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ ดังนั้น เมื่อแทนค่า $\mathcal{C}(x)$ ลงใน (2.21) เราก็จะได้ผลเฉลยของสมการ (2.20)

[6] ดูวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์อย่างง่าย หน้า 12

[7] ดูวิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์แยกกันได้ หน้า 13

ทฤษฎีบท 2.2. *ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

คือ

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right],$$

เมื่อ c *เป็นค่าคงตัวใด ๆ*[8] □

ตัวอย่าง 2.15. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y' + 3y = 2xe^{-3x} \tag{2.22}$$

วิธีทำ จากโจทย์ เราได้ว่า สมการ (2.22) เป็นสมการเชิงเส้น โดยมีสัมประสิทธิ์

$$p(x) = 3, \qquad q(x) = 2xe^{-3x}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ (2.22) คือ

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int 3dx}\left[\int 2xe^{-3x}e^{\int 3dx}dx + c\right] \\ &= e^{-3x}\left[\int 2xe^{-3x}e^{3x}dx + c\right] \\ &= e^{-3x}\left[\int 2xdx + c\right] \\ &= e^{-3x}\left[x^2 + c\right] \\ &= x^2e^{-3x} + ce^{-3x} \end{aligned}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 2.16. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y' + (\tan x)y = \sin(2x), \qquad y(0) = 1 \tag{2.23}$$

วิธีทำ จากโจทย์ เราได้ว่า สมการ (2.23) เป็นสมการเชิงเส้น โดยมีสัมประสิทธิ์

$$p(x) = \tan x, \qquad q(x) = \sin(2x)$$

[8] ดูการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้นด้วยวิธีการอื่น ๆ ใน [1, 13, 14, 18, 20]

พบว่า

$$\begin{aligned} e^{\int p(x)dx} &= e^{\int \tan x dx} \\ &= e^{\ln|\sec x|} \\ &= |\sec x| \end{aligned}$$

เพื่อความสะดวก ในที่นี้จะขอละเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ ดังนั้นเราจะได้

$$e^{\int p(x)dx} = \sec x$$

และ ในทำนองเดียวกัน

$$e^{-\int p(x)dx} = \cos x$$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการ 2.23 คือ

$$\begin{aligned} y &= \cos x \left[\int \sin(2x) \sec x dx + c\right] \\ &= \cos x \left[\int 2 \sin x \cos x \sec x dx + c\right] \\ &= \cos x \left[\int 2 \sin x dx + c\right] \\ &= \cos x \left[-2 \cos x + c\right] \\ &= -2 \cos^2 x + c \ \cos x \end{aligned}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จากเงื่อนไขค่าตั้งต้น : $y = 1$ เมื่อ $x = 0$ ดั้งนั้น

$$\begin{aligned} 1 &= -2 \cos^2 0 + c \ \cos 0 \\ &= -2 \cdot 1 + c \cdot 1 \\ c &= 3 \end{aligned}$$

เราได้ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น (2.23) คือ

$$y = 3 \cos x - 2 \cos^2 x$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(a) $y' + y = 1$

(b) $y' + y = e^{-x}$

(c) $y' - 2y = e^{3x}$

(d) $xy' + y = \cos x$

(e) $x\dfrac{dy}{dx} - 3y = x^4$

(f) $y' + y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$

(g) $\left(1 + x^2\right) dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx$

(h) $y' + y = 2xe^{-x} + x^2$

(i) $y' + y \cot x = 2x \csc x$

(j) $\left(2y - x^3\right) dx = x\, dy$

(k) $y - x + xy \cot x + xy' = 0$

(l) $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 6xe^{x^2}$

(m) $(x \ln x)\, y' + y = 3x^3$

(n) $\left(y - 2xy - x^2\right) dx + x^2 dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

(a) $y' + 2y = 2,\ \ y(0) = 1$

(b) $xy' - y = x,\ \ y(1) = 2$

(c) $y' = (1 - y) \cos x,\ \ y(\pi) = 0$

(d) $xy' + 3y = 2x^5,\ \ y(2) = 1$

(e) $y' = 1 + x + y + xy,\ \ y(0) = 0$

(f) $\left(x^2 + 4\right) y' + 3xy = x,\ \ y(0) = 1$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 238)

2.7 สมการแบร์นูลลี

บทนิยาม 2.5 (สมการแบร์นูลลี)**.** เราเรียกสมการที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n, \tag{2.24}$$

เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วงเปิด (a, b) และ n เป็นจำนวนจริงใด ๆ, ว่า**สมการแบร์นูลลี** (Bernoulli equation)[9]

จากบทนิยาม 2.5 ของสมการแบร์นูลลี สังเกตได้ว่า ถ้า n มีค่าเป็น 0 หรือ 1 สมการแบร์นูลลี (2.24) ก็จะเป็นสมการเชิงเส้น และสามารถหาผลเฉลยได้ดังที่ได้แสดงในเนื้อหาก่อนหน้านี้แล้ว

สำหรับกรณีค่า n อื่น ๆ เราสามารถหาผลเฉลยของสมการ โดยการแปลงสมการแบร์นูลลีให้เป็นสมการเชิงเส้นดังนี้

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบร์นูลลี

1. หารสมการ (2.24) ด้วย y^n ทำให้ได้

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x) \tag{2.25}$$

2. ให้

$$v = y^{1-n}$$

ซึ่งมีอนุพันธ์เทียบกับ x คือ

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

3. แทนค่า v และ $\frac{dv}{dx}$ ลงในสมการ (2.25) ได้

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x)$$

---

[9]สมการนี้ได้ถูกนำเสนอครั้งแรกโดยเจมส์ แบร์นูลลี (Bernoulli, James) ในปีคริสตศักราช 1695 ซึ่งสมการดังกล่าวสามารถถูกแก้ครั้งแรกได้โดยจอห์น แบร์นูลลี (Bernoulli, John) ซึ่งเป็นน้องชายของเจมส์นั่นเอง ต่อมาภายหลัง ในปีคริสตศักราช 1696 กอทท์ฟรีด วิลเฮล์ม ไลบ์นิทซ์ (Leibnitz, Gottfried Wilhelm) สามารถแสดงได้ว่า เราสามารถแปลงสมการแบร์นูลลี ให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นได้

4. เนื่องจาก $\dfrac{1}{1-n}$ เป็นค่าคงตัว ดังนั้นเราสามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นได้คือ

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)p(x)\,v = (1-n)q(x) \tag{2.26}$$

5. หาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น (2.26) ได้คือ

$$v(x) = e^{-(1-n)\int p(x)\,dx}\left[\int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)\,dx}dx + c\right]$$

6. ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (2.25) คือ

$$y^{1-n} = e^{-(1-n)\int p(x)\,dx}\left[\int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)\,dx}dx + c\right]$$

หรือ สมการ (2.25) มีผลเฉลยชัดแจ้งคือ

$$y = \left\{e^{-(1-n)\int p(x)\,dx}\left[\int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)\,dx}dx + c\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

ตัวอย่าง 2.17. จงแก้สมการ

$$\frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3 \tag{2.27}$$

วิธีทำ พบว่าสมการ (2.27) เป็นสมการแบร์นูลลีซึ่งมี $n = 3, p(x) = -5$ และ $q(x) = -\dfrac{5x}{2}$

1. หารสมการ (2.27) ด้วย y^3 ทำให้ได้

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - 5y^{-2} = -\frac{5}{2}x$$

2. ให้ $v = y^{1-3} = y^{-2}$ ดังนั้น

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx}$$

3. แทนค่า $\dfrac{dv}{dx}$ ลงในสมการ ได้

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - 5v = -\frac{5}{2}x$$

4. สามารถจัดรูปสมการให้อยู่ในรูปเชิงเส้นได้เป็น

$$\frac{dv}{dx} + 10v = 5x \tag{2.28}$$

5. หาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น (2.28) ได้คือ

$$\begin{aligned} v(x) &= e^{-\int 10\,dx}\left[\int 5x\, e^{\int 10\,dx} dx + c\right], \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + ce^{-10x}, \end{aligned}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

6. ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (2.27) คือ

$$v = y^{-2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + ce^{-10x}$$

หรือ ผลเฉลยชัดแจ้งคือ

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{2} - \frac{1}{20} + ce^{-10x}}}$$

หมายเหตุ สังเกตได้ว่า $y \equiv 0$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการ (2.27) แต่จากการหารสมการ (2.27) ด้วย y^3 ทำให้ผลเฉลยที่หาได้ในตัวอย่าง 2.17 ไม่ปรากฏว่ามีผลเฉลย $y \equiv 0$ ประกอบอยู่ด้วย ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากโดยขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบร์นูลลีที่จะต้องหารทั้งสมการด้วย y^n ทำให้ต้องพิจารณาสมการใหม่ที่ได้**เฉพาะกรณี** $y \neq 0$ แต่อย่างไรก็ตาม $y \equiv 0$ เป็นผลเฉลยของสมการแบร์นูลลี (2.24) (กรณี $n > 0$) เสมอ

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = x^2y^2$
2. $\dfrac{dy}{dx} - y = e^{2x}y^3$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} - x^2y^2$
4. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x-2} = 5(x-2)y^{1/2}$
5. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{y^2}{x}$
6. $dy + (4y - 8y^{-3})x\,dx = 0$
7. $\dfrac{dy}{dx} + y^3x + y = 0$
8. $\dfrac{dy}{dx} + y = e^xy^{-2}$
9. $x\dfrac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4$
10. $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r^2 + 2r\theta}{\theta^2}$
11. $\dfrac{dx}{dt} + tx^3 + \dfrac{x}{t} = 0$
12. $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{t+1}{2t}x = \dfrac{t+1}{xt}$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 238)

2.8 สมการแบบแม่นตรง

สมมติว่าเรามีวงศ์เส้นโค้ง[10] (family of curves)

$$f(x, y) = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

จากเนื้อหาในวิชาแคลคูลัส ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ที่มีอนุพันธ์ย่อยเทียบกับ x (ซึ่งก็คือ $\dfrac{\partial f}{\partial x}$) และ อนุพันธ์ย่อยเทียบกับ y (ซึ่งก็คือ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$) เป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่อง** แล้ว*ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม* (total differential) ของฟังก์ชัน f คือ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

และเนื่องจาก $f(x, y) = c$ ซึ่งมีค่าเป็นค่าคงตัว ดังนั้น $df = 0$ ซึ่งทำให้เราได้ว่า

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \tag{2.29}$$

เราพบว่า สมการ (2.29) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียลทำให้เรากล่าวได้ว่า $f(x, y) = c$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.29) นั่นเอง

ตัวอย่าง 2.18. วงศ์ของเส้นโค้ง

$$x^2y^3 = c, \tag{2.30}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0 \tag{2.31}$$

เนื่องจาก เส้นโค้ง (2.30) สามารถนิยามฟังก์ชัน

$$y = \sqrt[3]{cx^{-2}}$$

ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3}{3x^2y^2}$$

ซึ่งเป็นสมการในรูปอนุพันธ์ ที่สมมูลกับสมการ (2.31)

[10] วงศ์เส้นโค้ง หมายถึง เซตของเส้นโค้ง เนื่องจากเรานิยมใช้คำว่า “วงศ์ของเซต” แทนคำว่า “เซตของเซต” และเส้นโค้ง คือ เซตของจุดที่เป็นไปตามเงื่อนไขหรือสมการดังนั้น เราจึงใช้คำว่า “วงศ์ของเส้นโค้ง” แทนคำว่า “เซตของเส้นโค้ง”

บทนิยาม 2.6 (สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง). เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.32}$$

ที่สามารถหาฟังก์ชัน $f(x,y)$ ซึ่ง

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง* (exact differential equation) และเรียก

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

ว่า *ดิฟเฟอร์เรนเชียลแบบแม่นตรง* (exact differential) ซึ่งสมการ (2.32) มีผลเฉลยคือ

$$f(x,y) = c$$

เพื่อความสะดวก ภายหลังจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงเพียงสั้น ๆ ว่า *สมการแบบแม่นตรง* (exact equation)

ตัวอย่าง 2.19. จงตรวจสอบว่าสมการ

$$y\,dx + x\,dy = 0 \tag{2.33}$$

เป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่

วิธีทำ ลองตรวจสอบโดยการหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = xy$ ซึ่งจะได้

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

ซึ่งพบว่าสมการ (2.33) สามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

ดังนั้นสมการ (2.33) เป็นสมการแบบแม่นตรง โดยมีผลเฉลยคือ

$$f(x,y) = c$$

หรือ นั่นคือ

$$xy = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

วิธีการตรวจสอบว่า สมการเชิงอนุพันธ์ เป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่ นอกจากจะใช้ การแทนค่าฟังก์ชัน f โดยตรงดังตัวอย่าง เรามีวิธีอื่น ที่สามารถตรวจสอบได้อย่างรวดเร็วกว่า นั่นคือ

ทฤษฎีบท 2.3. *พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ (2.32) เมื่อฟังก์ชัน* $M,\ N,\ \dfrac{\partial M}{\partial y},\ \dfrac{\partial N}{\partial x}$ *ต่อเนื่องทุก ๆ จุด* (x, y) *ในโดเมนชนิดสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนระนาบ* xy *(xy-plain)*

1. *ถ้าสมการ (2.32) เป็นสมการแบบแม่นตรงแล้ว*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ทุก ๆ (x, y) *ในโดเมน*

2. *ในทางกลับกัน ถ้า*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ทุก ๆ (x, y) *ในโดเมน แล้ว สมการ (2.32) เป็นสมการแบบแม่นตรง*

พิสูจน์ (ส่วนที่หนึ่ง) ถ้าสมการ (2.32) เป็นสมการแบบแม่นตรงแล้วโดยบทนิยาม 2.6 เราสามารถหาฟังก์ชัน f ซึ่ง

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

ทุก (x, y) ในโดเมน ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ทุก (x, y) ในโดเมน แต่โดยความต่อเนื่องของ $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ (ซึ่งก็คือ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ และ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ มีความต่อเนื่อง) โดยทฤษฎีบท[11] ทำให้ได้ว่า

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ทุก (x, y) ในโดเมน

[11] ดูทฤษฎีบทและการพิสูจน์ใน [16], Theorem 7.5

(ส่วนที่สอง) ส่วนนี้จะเป็นส่วนกลับของส่วนที่หนึ่ง และเป็น**ขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบบแม่นตรง**ด้วย การพิสูจน์จะแบ่งเป็นขั้นตอนดังนี้

1. โดยเริ่มจากสมมติฐานที่ว่า
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$
ทุก (x, y) ในโดเมน

2. เนื่องจากเราต้องการแสดงให้เห็นว่าสมการ (2.32) เป็นสมการแบบแม่นตรง นั่นคือ สามารถหาฟังก์ชัน f ซึ่ง
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \tag{2.34}$$
และ
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y) \tag{2.35}$$
ทุก (x, y) ในโดเมน เนื่องจาก ฟังก์ชัน f เป็นไปตามเงื่อนไข (2.34) ดังนั้น
$$f(x, y) = \int M(x, y)dx + \phi(y), \tag{2.36}$$
เมื่อ $\int M(x, y)dx$ หมายถึง การหาค่าอินทิกรัลของ $M(x, y)$ เทียบกับ x โดยมองว่าตัวแปร y เป็นเพียงค่าคงตัว[12] และ $\phi(y)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ y

3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ได้เทียบกับตัวแปร y
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + \frac{d\phi(y)}{dy}$$
ซึ่งจากสมการ (2.35) เราได้ว่า
$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + \frac{d\phi(y)}{dy}$$
ดังนั้น
$$\frac{d\phi(y)}{dy} = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx$$

[12] ค่าอินทิกรัลทางขวามือของสมการ (2.36) อาจจะดูแปลกตาสำหรับผู้อ่านที่คุ้นเคยกับรูปแบบ
$$f(x, y) = \int M(x, y)dx + c,$$
เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ แต่อย่างที่กล่าวไว้แล้วว่า ในการหาค่าอินทิกรัล เราจะมองว่าตัวแปร y เป็นค่าคงตัวก่อน ดังนั้น แทนที่ด้านขวามือของสมการ (2.36) จะบวกด้วยค่าคงตัวใด ๆ เราต้องเปลี่ยนเป็นบวกด้วยฟังก์ชันใด ๆ ของ y แทน

4. เนื่องจาก $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx$$

และได้ว่า

$$\phi(y) = \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx\right] dy$$

5. แทนค่าลงในสมการ (2.36) ได้ว่า

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx\right] dy$$

นี่แสดงว่า เราสามารถหาฟังก์ชัน f ที่เป็นไปตามเงื่อนไข (2.34) และ (2.35) ดังนั้นสมการ (2.32) เป็นสมการแบบแม่นตรง □

หมายเหตุ จากทฤษฎีบท 2.3 ในการพิสูจน์ส่วนที่สอง ขั้นตอนที่ 2 ผู้อ่านอาจจะเริ่มสมมติให้ f เป็นไปตามเงื่อนไข (2.36) ก่อน นั่นคือ

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + \psi(x),$$

โดยที่ $\psi(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ x และในการพิสูจน์ทำนองเดียวกัน เราก็จะได้

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + \int \left[M(x,y) - \int \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dy\right] dx$$

ตัวอย่าง 2.20. จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$\left(3x^2 + 4xy\right) dx + \left(2x^2 + 2y\right) dy = 0 \tag{2.37}$$

วิธีทำ เราจะหาผลเฉลยของสมการได้โดย

1. ตรวจสอบว่าสมการดังกล่าวเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่ ซึ่งในที่นี้

$$M(x,y) = 3x^2 + 4xy \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 4x$$

และ

$$N(x,y) = 2x^2 + 2y \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4x$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (2.37) เป็นสมการแบบแม่นตรง

2. หาค่า f

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y) \\ &= \int \left(3x^2 + 4xy\right) dx + g(y) \\ &= x^3 + 2x^2y + g(y) \end{aligned}$$

3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + \frac{d\, g(y)}{dy}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} N(x,y) \;=\; 2x^2 + 2y &= 2x^2 + g'(y) \\ g'(y) &= 2y \end{aligned}$$

4. หาค่า $g(y)$

$$g(y) = \int g(y)dy = \int 2ydy = y^2 + c_1,$$

เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

5. เราได้ฟังก์ชัน f คือ

$$f(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2 + c_1$$

เนื่องจากเราทราบว่าผลเฉลยของสมการแบบแม่นตรงอยู่ในรูป $f(x,y) = c$ เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของสมการ (2.37) คือ

$$x^3 + 2x^2y + y^2 + c_1 = c$$

เมื่อรวม ค่าคงตัวทั้งสองข้างเข้าด้วยกัน จะได้ผลเฉลยของสมการ (2.37) เป็น

$$x^2 + 2x^2y + y^2 = \tilde{c}$$

เมื่อ $\tilde{c}$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

หมายเหตุ ในขั้นตอนที่ 5 เราอาจเขียนโดยละ ค่าคงตัว c_1 ก็ได้ เพราะท้ายที่สุด ในขั้นตอนสุดท้าย ค่า c_1 จะต้องถูกนำมารวมกับค่า c จากเงื่อนไข $f(x,y) = c$ เป็นค่าคงตัวตัวใหม่ $\tilde{c}$

ตัวอย่าง 2.21. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$\left(2x\cos y + 3x^2y\right)dx + \left(x^3 - x^2\sin y - y\right)dy = 0, \quad y(0) = 2 \tag{2.38}$$

วิธีทำ เราจะหาผลเฉลยของสมการได้โดย

1. ตรวจสอบว่าสมการดังกล่าวเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่ ซึ่งในที่นี้

$$M(x,y) = 2x\cos y + 3x^2y \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -2x\sin y + 3x^2$$

และ

$$N(x,y) = x^3 - x^2\sin y - y \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x\sin y + 3x^2$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (2.38) เป็นสมการแบบแม่นตรง

2. หาค่า f

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y) \\ &= \int \left(2x\cos y + 3x^2y\right)dx + g(y) \\ &= x^2\cos y + x^3y + g(y) \end{aligned}$$

3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2\sin y + x^3 + \frac{d\,g(y)}{dy}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} N(x,y) \;=\; x^3 - x^2\sin y - y &= -x^2\sin y + x^3 + g'(y) \\ g'(y) &= -y \end{aligned}$$

4. หาค่า $g(y)$

$$g(y) = \int g(y)dy = \int -ydy = -\frac{y^2}{2},$$

หมายเหตุ จะละค่าคงตัวจากการอินทิเกรตไว้ก่อน ซึ่งค่าคงตัวจะไปปรากฏในเทอม $f(x,y) = c$

5. เราได้ฟังก์ชัน f คือ

$$f(x,y) = x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = c$$

แทนเงื่อนไขตั้งต้น $y(0) = 2$ เพื่อหาค่า c

$$\begin{aligned} 0 + 0 - \frac{4}{2} &= c \\ c &= -2 \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น (2.38) คือ

$$x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = -2$$

ตัวอย่าง 2.22. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(ye^{xy} + \sin y)\,dx + (xe^{xy} + x\cos y)\,dy = 0 \tag{2.39}$$

วิธีทำ เราจะหาผลเฉลยของสมการได้โดย

1. ตรวจสอบว่าสมการดังกล่าวเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่ ซึ่งในที่นี้

$$M(x,y) = ye^{xy} + \sin y \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + \cos y$$

และ

$$N(x,y) = xe^{xy} + x\cos y \qquad \text{ดังนั้น} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + \cos y$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (2.39) เป็นสมการแบบแม่นตรง

2. หาค่า f

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int M(x,y)dx + g(y) \\ &= \int (ye^{xy} + \sin y)\,dx + g(y) \\ &= e^{xy} + x\sin y + g(y) \end{aligned}$$

3. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} + x\cos y + \frac{d\,g(y)}{dy}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} N(x,y) = xe^{xy} + x\cos y &= xe^{xy} + x\cos y + g'(y) \\ g'(y) &= 0 \end{aligned}$$

4. เนื่องจาก $g'(y) = 0$ ดังนั้น g เป็นค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งในที่นี้จะขอละไว้

5. เราได้ฟังก์ชัน f คือ

$$f(x,y) = e^{xy} + x\sin y$$

หรือ คำตอบของสมการคือ

$$e^{xy} + x\sin y = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

แบบฝึกหัด

1. จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่ ถ้าใช่ จงหาผลเฉลยของสมการ

   (a) $(2x+3y)\,dx+(3x-4)\,dy=0$

   (b) $\left(3x^2-2y^2\right)dx+\left(6y^2-4xy\right)dy=0$

   (c) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y^2-4x+5}{2y-4xy-4}$

   (d) $\cos x\cos^2 y dx+2\sin x\sin y\cos y dy=0$

   (e) $(\sin x\tan y+1)\,dx-\cos x\sec^2 y dy=0$

   (f) $\left(x^2+\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(y^2+\ln x\right)dy=0$

   (g) $(e^x\sin y+\tan y)\,dx+\left(e^x\cos y+x\sec^2 y\right)dy=0$

   (h) $(\sin x\sin y-xe^y)\,dy=(e^y+\cos x\cos y)\,dx$

   (i) $2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx=\sqrt{x^2-y}dy$

   (j) $\left(\theta^2+1\right)\cos r\; dr+2\theta\sin r\; d\theta=0$

   (k) $(x+\sin y)\,dx+(x\cos y-2y)\,dy=0$

   (l) $y'=\dfrac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

   (a) $y'=\dfrac{-2xy}{1+x^2},\;\; y(2)=-5$

   (b) $-\dfrac{2y}{x^3}dx+\dfrac{1}{x^2}dy=0,\;\; y(2)=-2$

   (c) $e^{x^3}\left(3x^2y-x^2\right)dx+e^{x^3}dy=0,\;\; y(0)=-1$

   (d) $y'=\dfrac{-y^2}{2xy+1},\;\; y(1)=-2$

   (e) $y'=\dfrac{2y^2(y-x)}{4y^3-6xy^2+2x^2y},\;\; y(2)=3$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 239)

2.9 ตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.40}$$

ในบางครั้งเราพบว่า $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ หรือนั่นคือ สมการ (2.40) ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรงนั่นเอง แต่อาจจะมีฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ ซึ่งเมื่อนำไปคูณกับสมการ (2.40) ได้

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{2.41}$$

แล้วทำให้สมการ (2.41) เป็นสมการแบบแม่นตรง หรือก็คือ

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

2.9.1 ตัวประกอบปริพันธ์

บทนิยาม 2.7 (ตัวประกอบปริพันธ์)**.** ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง (2.40) ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง แต่สมการ (2.41) ซึ่งได้จากการคูณฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ กับสมการ (2.40) เป็นสมการแบบแม่นตรงแล้ว เราเรียกฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ ว่า*ตัวประกอบปริพันธ์* ของสมการ (2.40) (integrating factor of equation (2.40))

ตัวอย่าง 2.23. จงแสดงว่า $\mu(x,y) = xy^2$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0 \tag{2.42}$$

และ ใช้ตัวประกอบปริพันธ์หาผลเฉลยของสมการ

วิธีทำ ให้ $M(x,y) = 2y - 6x$ และ $N(x,y) = 3x - 4x^2y^{-1}$ พบว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \qquad \neq \qquad 3 - 8xy^{-1} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (2.42) ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง

เมื่อคูณสมการ (2.42) ด้วย $\mu(x,y) = xy^2$ ได้

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0 \tag{2.43}$$

ให้ $\overline{M}(x,y) = 2xy^3 - 6x^2y^2$ และ $\overline{N}(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y$ พบว่า

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = 6xy^2 - 12x^2y = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$$

นั่นคือ สมการ (2.43) เป็นสมการแบบแม่นตรง ดังนั้น $\mu(x,y) = xy^2$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.42)

โดยขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบบแม่นตรง (หน้า 39) เราได้ผลเฉลยคือ

$$f(x,y) = \int (2xy^3 - 6x^2y^2)dx + g(y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 + g(y)$$

และ

$$g'(y) = \overline{N}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y} = (3x^2y^2 - 4x^3y) - (3x^2y^2 - 4x^3y) = 0$$

เนื่องจาก $g'(y) = 0$ ให้ $g(y) \equiv 0$ ดังนั้น

$$f(x,y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ, เป็นผลเฉลยของทั้งสมการ (2.42) และสมการ (2.43)

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 2.23 เราพบว่าผลเฉลยที่ได้เป็นผลเฉลยของทั้งสมการ (2.42) และสมการ (2.43) แต่สำหรับกรณีทั่วไป การใช้ตัวประกอบปริพันธ์คูณเข้ากับสมการแรกเริ่ม เพื่อให้ได้สมการใหม่ ผลเฉลยที่ได้จากสมการใหม่อาจจะมีจำนวนมากกว่าหรือน้อยกว่าผลเฉลยของสมการแรกเริ่ม ดังเช่น $y \equiv 0$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2.43) แต่ไม่เป็นผลเฉลยของสมการ (2.42) เหตุเพราะว่าเราคูณสมการ (2.42) ด้วย $\mu(x,y) = xy^2$ ซึ่งเมื่อ $y \equiv 0$ ก็เท่ากับว่าเราคูณสมการ (2.42) ด้วย 0 นั่นเอง นั่นทำให้ $y \equiv 0$ เป็นเฉพาะผลเฉลยของสมการ(2.43) แต่ไม่เป็นผลเฉลยของสมการ (2.42)

ตัวอย่าง 2.24. จงแสดงว่า $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2}$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ

$$(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0 \tag{2.44}$$

และ ใช้ตัวประกอบปริพันธ์หาผลเฉลยของสมการ

วิธีทำ ให้ $M(x,y) = 2x^2 + y$ และ $N(x,y) = x^2y - x$ พบว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \qquad \neq \qquad 2xy - 1 = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสมการ (2.44) ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง

เมื่อคูณสมการ (2.42) ด้วย $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2}$ ได้

$$(2 + yx^{-2})dx + (y - x^{-1})dy = 0 \tag{2.45}$$

ให้ $\overline{M}(x,y) = 2 + yx^{-2}$ และ $\overline{N}(x,y) = y - x^{-1}$ พบว่า

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{1}{x^2} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}$$

นั่นคือ สมการ (2.45) เป็นสมการแบบแม่นตรง ดังนั้น $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2}$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.44)

โดยวิธีการแก้สมการแบบแม่นตรง เราได้ผลเฉลยคือ

$$f(x,y) = \int (2 + yx^{-2})dx + g(y) = 2x - yx^{-1} + g(y)$$

และ

$$g'(y) = \overline{N}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y} = (y - x^{-1}) - (-x^{-1}) = y$$

เนื่องจาก $g'(y) = y$ ดังนั้น $g(y) = \dfrac{y^2}{2} + c_1,$ เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ดังนั้น

$$f(x,y) = 2x - yx^{-1} + \frac{y^2}{2} + c_1 = c_2,$$

เมื่อ $c2$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ, เป็นผลเฉลยของทั้งสมการ (2.44) และสมการ (2.45) หรือผลเฉลยของสมการทั้งสอง อยู่ในรูป

$$2x - yx^{-1} + \frac{y^2}{2} = C, \qquad \text{เมื่อ } C = c_2 - c_1$$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 2.24 พบว่า $x \equiv 0$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2.44) แต่ไม่เป็นผลเฉลยของสมการ (2.45) นั่นเป็นเพราะ เราได้สมการ (2.45) จากการคูณสมการ (2.44) ด้วยตัวประกอบปริพันธ์ $\mu = \dfrac{1}{x^2}$

ตัวอย่าง 2.23 แสดงให้เห็นว่าเมื่อเราคูณสมการด้วยตัวประกอบปริพันธ์ แล้วหาผลเฉลยของสมการ เราได้คำตอบของสมการใหม่มีจำนวนมากกว่า คำตอบของสมการดั้งเดิมแต่ตัวอย่าง 2.24 แสดงให้เห็นว่าเมื่อเราคูณสมการด้วยตัวประกอบปริพันธ์แล้วหาผลเฉลยของสมการเรากลับสูญเสียบางคำตอบไป

2.9.2 การหาตัวประกอบปริพันธ์

จากในเนื้อหาที่ผ่านมาพบว่า ถ้าเราทราบตัวประกอบปริพันธ์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเราก็จะสามารถหาผลเฉลยของสมการดังกล่าวได้เนื้อหาในส่วนนี้จะนำเสนอวิธีการหาตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{2.46}$$

โดยทฤษฎีบท 2.6 สมการ (2.46) เป็นสมการแบบแม่นตรงก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)M(x,y)\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)N(x,y)\right] \\ \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x} \end{aligned}$$

ซึ่งจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{2.47}$$

ในการหาผลเฉลยของสมการ (2.47) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยนั้นเป็นเรื่องที่ยุ่งยากและซับซ้อนซึ่งอาจจะยุ่งยากกว่าการหาผลเฉลยของสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ โดยตรงด้วยซ้ำไป แต่สำหรับกรณีต่อไปนี้อาจจะทำให้เราสามารถหาตัวประกอบปริพันธ์ได้

- **ตัวประกอบปริพันธ์เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น**

  เพราะว่าตัวประกอบปริพันธ์เป็นฟังก์ชันของ x, $\mu = \mu(x)$, ดังนั้น $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ และสามารถจัดรูปสมการ (2.47) ได้เป็น

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right) \tag{2.48}$$

  เมื่อ $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ **เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น** [13]

[13] เนื่องจากสมมติให้ μ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น จึงเป็นการบังคับให้ $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ เป็นฟังก์ชันของ x โดยปริยาย

สังเกตได้ว่าสมการ (2.48) เป็นสมการแบบแยกกันได้ ทำให้เราสามารถหาค่า μ ได้โดย

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu}{\mu} &= \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx \\
\int \frac{d\mu}{\mu} &= \int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx \\
\ln|\mu| &= \int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx \\
|\mu| &= \exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right),
\end{aligned}$$

เมื่อ $\exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right) = e^{\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right)}$, และเนื่องจากเราพิจารณาหาตัวประกอบปริพันธ์เพียงฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่ง เราสามารถละเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ และได้ว่า ตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$\mu(x) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right)$$

- **ตัวประกอบปริพันธ์เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น**

  เพราะว่าตัวประกอบปริพันธ์เป็นฟังก์ชันของ y, $\mu = \mu(y)$, ดังนั้น $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ และสามารถจัดรูปสมการ (2.47) ได้เป็น

$$\frac{d\mu}{dy} = \mu\left(\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right) \tag{2.49}$$

  เมื่อ $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$ **เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เท่านั้น** [14]

  สังเกตได้ว่าสมการ (2.49) เป็นสมการแบบแยกกันได้ ทำให้เราสามารถหาค่า μ ได้ และได้ว่า ตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$\mu(y) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right] dy\right)$$

จากทั้งสองกรณี ทำให้เราสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ว่า

[14]เนื่องจากสมมติให้ μ เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น จึงเป็นการบังคับให้ $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$ เป็นฟังก์ชันของ y โดยปริยาย

ทฤษฎีบท 2.4. *พิจารณาสมการ*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.50}$$

ถ้า $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และขึ้นกับตัวแปร* x *เท่านั้น แล้ว*

$$\mu(x) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right) \tag{2.51}$$

เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.50)

ถ้า $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และขึ้นกับตัวแปร* y *เท่านั้น แล้ว*

$$\mu(y) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right] dy\right) \tag{2.52}$$

เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.50)

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยของสมการด้วยตัวประกอบปริพันธ์

1. พิจารณาสมการ $M\ dx + Ndy = 0$ ว่าไม่ใช่สมการแบบแม่นตรง (หรือสมการแบบอื่น ๆ ที่เราสามารถหาคำตอบได้โดยวิธีการที่ได้กล่าวมาแล้ว)

2. คำนวณหาค่า $\partial M/\partial y$ และ $\partial N/\partial x$

3. (a) ถ้า $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ เป็นฟังก์ชันของ x **เท่านั้น** ตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.50) คือ

   $$\mu(x) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right)$$

   (b) ถ้า $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$ เป็นฟังก์ชันของ y **เท่านั้น** ตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.50) คือ

   $$\mu(y) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right] dy\right)$$

4. นำ μ ที่หาได้ไปคูณเข้ากับสมการ (2.50)

   $$\mu M\ dx + \mu N\ dy = 0$$

   แล้วนำสมการที่ได้ใหม่นี้ไปหาคำตอบ โดยพิจารณาสมการดังกล่าวเป็นสมการแบบแม่นตรง

ตัวอย่าง 2.25. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.53}$$

วิธีทำ เราสามารถจัดรูปสมการ (2.53) ใหม่ได้เป็น

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \tag{2.54}$$

พบว่า $M(x, y) = 3xy + y^2$ และ $N(x, y) = x^2 + xy$ และได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + y,$$
$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{x + y}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น ดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{1}{x}dx\right) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$$

เมื่อนำ μ ที่ได้คูณกับสมการ (2.54) ได้

$$(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$$

และพบว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + xy^2) = 3x^2 + 2xy = \frac{\partial}{\partial x}(x^3y + x^2y)$$

โดยขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบบแม่นตรง ทำให้เราได้ผลเฉลยของสมการ (2.53) คือ

$$f(x, y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 2.26. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y\,dx + (2x - ye^y)\,dy = 0 \tag{2.55}$$

วิธีทำ พบว่า $M(x, y) = y$ และ $N(x, y) = 2x - ye^y$ และได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2,$$
$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} = \frac{1}{y}$$

เนื่องจาก $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$ เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น ดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$\mu(y) = \exp\left(\int \frac{1}{y} dy\right) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$$

เมื่อนำ μ ที่ได้คูณกับสมการ (2.55) ได้

$$y^2\,dx + (2xy - y^2e^y)\,dy = 0$$

และพบว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - y^2e^y)$$

โดยขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบบแม่นตรง ทำให้เราได้ผลเฉลยของสมการ (2.55) คือ

$$f(x,y) = xy^2 - y^2e^y + 2ye^y - 2e^y = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

แบบฝึกหัด

จงหาตัวประกอบปริพันธ์ พร้อมทั้งหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

1. $dx - 2x\,dy = 0$
2. $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$
3. $y' = e^{2x} + y - 1$
4. $dx + (x/y - \sin y)dy = 0$
5. $(3x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$
6. $y\,dx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$
7. $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)dy = 0$
8. $\left[4\dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{3}{y}\right] dx + \left[3\dfrac{x}{y^2} + 4y\right] dy = 0$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 240)

2.10 สรุป

โดยทั่วไป เราจะเขียนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ในรูป*อนุพันธ์*

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

หรือ รูป*ดิฟเฟอเรนเชียล*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

โดยที่ x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรไม่อิสระ

ในบทนี้ ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหา สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งรูปแบบต่าง ๆ ได้แก่

- สมการเชิงอนุพันธ์อย่างง่าย (หัวข้อ 2.2 หน้า 12)

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

- สมการแยกกันได้ (หัวข้อ 2.3 หน้า 13)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

- สมการเอกพันธุ์ (หัวข้อ 2.5 หน้า 21)

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

- สมการเชิงเส้น (หัวข้อ 2.6 หน้า 28)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

- สมการแบร์นูลลี (หัวข้อ 2.7 หน้า 33)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$$

- และ สมการแบบแม่นตรง (หัวข้อ 2.8 หน้า 36)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ในการศึกษาเรื่องผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ผลเฉลยที่ได้ เป็น*ผลเฉลยทั่วไป* ซึ่งเป็นผลเฉลยที่มีค่าคงตัวใด ๆ ปรากฏอยู่แต่ในการศึกษาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์ บางครั้งผลเฉลยที่ได้ ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขบางอย่างที่กำหนดให้ ซึ่งเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาเรื่องนี้ ได้ถูกกล่าวถึงในหัวหัวข้อ*ปัญหาค่าตั้งต้น* (หัวข้อ 2.4 หน้า 19)

ในการหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นนั้น เริ่มต้นโดยการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ และผลเฉลยที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขค่าตั้งต้นที่กำหนด นั่นทำให้ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นเป็น*ผลเฉลยเฉพาะ*

บทที่ 3
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สอง

เนื้อหาที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ คือ ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์*อันดับที่สอง*[1] (second-order differential equation) และ การหาผลเฉลยของสมการ

เนื่องด้วย ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง มีเนื้อหาบางส่วนที่เกี่ยวข้องกับ *จำนวนเชิงซ้อน* ดังนั้นเนื้อหาในส่วนแรกของบท จะกล่าวถึงจำนวนเชิงซ้อนพอสังเขปและเนื้อหาในส่วนที่เหลือของบท จะนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองในบางรูปแบบ รวมทั้งการหาผลเฉลยของ *ปัญหาค่าตั้งต้น* และ *ปัญหาค่าขอบ*

3.1 จำนวนเชิงซ้อน

พิจารณาสมการกำลังสอง $x^2+1=0$, พบว่าสมการนี้ไม่มีผลเฉลยเป็นจำนวนจริง เพราะว่า*ไม่มีจำนวนจริงใด ๆ ที่ยกกำลังสองแล้วมีค่าเป็นลบ* ในต้นคริสต์ศตวรรตที่ 16 สัญลักษณ์ $\sqrt{-1}$ ได้ถูกเสนอขึ้นมา เพื่อจะให้เป็นผลเฉลยของสมการกำลังสอง $x^2+1=0$ เราเรียกสัญลักษณ์นี้ (ซึ่งภายหลังนิยมเขียนแทนสัญลักษณ์นี้ด้วย i) ว่า*จำนวนจินตภาพ* (imaginary number) โดยที่จำนวนจินตภาพนี้ เราสามารถนำมาใช้ในระบบพีชคณิตทั่วไป (บวก, ลบ, คูณ, หาร และ ถอดราก) ได้เหมือนกับจำนวนจริง ๆ เพียงแต่แตกต่างกันที่ กำลังสองของค่านี้มีค่าเป็น -1 ดังนั้น เราสามารถหาผลเฉลยของสมการกำลังสอง $x^2+1=0$ ได้เป็น

$$x^2+1=x^2-i^2=(x+i)(x-i)$$

ซึ่งได้ว่าผลเฉลยของสมการคือ $x=\pm i$

เรารวมเรียนจำนวนจริง, จำนวนจินตภาพและค่าพีชคณิตระหว่างจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ (เช่น $2i$, $-9i$, $\frac{10}{11}i$, $2+3i$, $\dfrac{2-3i}{4}$, $-5+i$ เป็นต้น) ว่า*จำนวนเชิงซ้อน* (complex numbers)[2]

---

[1]ดูบทนิยามเรื่อง*อันดับ* หน้า 2

[2]อ่านเนื้อหาเรื่องจำนวนเชิงซ้อนเพิ่มเติมได้ใน [5, 13]

3.1.1 รูปแบบและคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

เรามักเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป

$$z = a + bi,$$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $i = \sqrt{-1}$

- เราเรียก a ว่า *ส่วนจริง* (real part) ของจำนวนเชิงซ้อน z เราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{Re}(z)$
- และเรียก b ว่า *ส่วนจินตภาพ* (imaginary part) ของจำนวนเชิงซ้อน z เราเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathbf{Im}(z)$

ในบางครั้ง เราอาจเขียนจำนวนเชิงซ้อน z ในรูปคู่อันดับ[3] (a, b) แทน

คุณสมบัติต่าง ๆ ของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ และ $z_3 = e + fi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ โดย a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

- **การเท่ากัน**: $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$
- **การบวก** :$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- **การลบ** :$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$
- **การคูณ** : $z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$
- **การสลับที่การบวก** : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- **การสลับที่การคูณ** : $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- **การเปลี่ยนกลุ่มการบวก** : $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- **การเปลี่ยนกลุ่มการคูณ** : $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

[3] ในช่วงต้นศตวรรษที่ 19 คาร์ล ฟรีดริช เกาส์ (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855) และ เซอร์ วิลเลียม โรแวน แฮมิลตัน (Sir William Rowan Hamilton, 1805-1865) เป็นผู้เสนอถึงแนวคิดการนิยามจำนวนเชิงซ้อนในรูปของคู่อันดับของจำนวนจริง (a, b) และคุณสมบัติต่าง ๆของจำนวนเชิงซ้อน ทั้งเกาส์และแฮมิลตันได้นำเสนอเรื่องนี้ในช่วงเวลาใกล้เคียงกัน โดยที่ทั้งคู่ไม่ได้คิดเรื่องนี้ร่วมกันมาก่อนแนวความคิดที่ทั้งคู่ได้นำเสนอ ยังคงใช้อยู่จนถึงปัจจุบัน

- **การกระจาย** : $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

- **สังยุคเชิงซ้อน (complex conjugate)** : $\overline{z_1} = \overline{a + bi} = a - bi$

- **ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) หรือ มอดุลัส (modulus)** : $|z_1| = \sqrt{z_1\overline{z_1}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ ซึ่งได้ว่า $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2$

- **การหาร** : $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1}{z_2}\dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$

- **อาร์กิวเมนต์จำนวนเชิงซ้อนหลัก (principal argument)** : $\mathrm{Arg}(z_1) = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$, ดังนั้น $\mathrm{Arg}(z_1) \in (-\pi, \pi]$

- **อาร์กิวเมนต์จำนวนเชิงซ้อน (argument of a complex number)** : $\arg(z_1) = \theta$, โดยที่ $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$ ดังนั้น $\arg(z_1) = \mathrm{Arg}(z_1) + 2n\pi, n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

ตัวอย่าง 3.1. ให้ $z_1 = 3 + 4i$ และ $z_2 = 2 - 5i$ เราได้ว่า

- **การบวก**: $z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (2 - 5i) = (3 + 2) + (4 - 5)i = 5 - i$

- **การลบ**: $z_1 - z_2 = (3 + 4i) - (2 - 5i) = (3 - 2) + (4 + 5)i = 1 + 9i$

- **การคูณ**: $z_1z_2 = (3 + 4i)(2 - 5i) = (3 \cdot 2 - 4 \cdot (-5)) + (3 \cdot (-5) + 4 \cdot 2)\, i = 26 + 2i$

- **สังยุคเชิงซ้อน**: $\overline{z_1} = \overline{3 + 4i} = 3 - 4i$ และ $\overline{z_2} = \overline{2 - 5i} = 2 + 5i$,

- **ค่าสัมบูรณ์**: $|z_1| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ และ $|z_2| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$

- **การหาร**: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3 + 4i}{2 - 5i} = \left(\dfrac{3 + 4i}{2 - 5i}\right)\left(\dfrac{\overline{2 + 5i}}{\overline{2 + 5i}}\right) = \dfrac{(3 + 4i)(2 + 5i)}{29} = -\dfrac{14}{29} + \dfrac{13}{29}i$

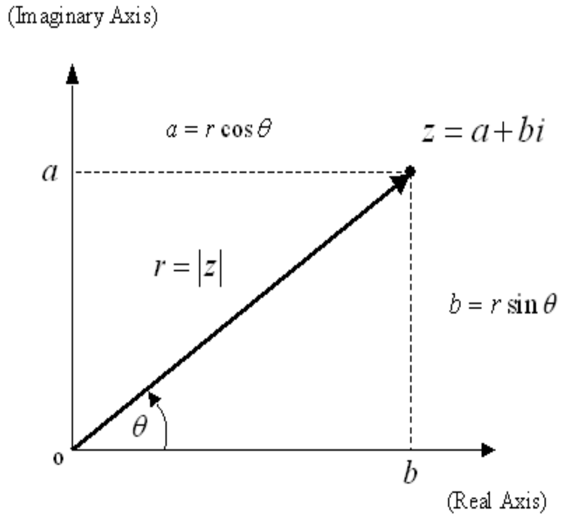
- **อาร์กิวเมนต์จำนวนเชิงซ้อนหลัก**: $\mathrm{Arg}(z_1) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ และ $\mathrm{Arg}(z_2) = \tan^{-1}\left(-\frac{5}{2}\right)$

- **อาร์กิวเมนต์จำนวนเชิงซ้อน**: $\arg(z_1)$ คือ มุม θ ซึ่ง $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$
  และ $\arg(z_2)$ คือ มุม θ ซึ่ง $\tan\theta = -\dfrac{5}{2}$

3.1.2 จำนวนเชิงซ้อนในเชิงเรขาคณิต

จากจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ ถ้าเราพิจารณาในเชิงคู่อันดับ (a, b) เราอาจจะแทนจำนวนเชิงซ้อนในลักษณะของจุดในระนาบ หรือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด และจุดปลายที่จุด (a, b) ก็ได้ เราเรียกระนาบดังกล่าวว่า*ระนาบเชิงซ้อน* (complex plane)

เราเรียกแกน x ในระนาบเชิงซ้อนว่า *แกนจริง* (real axis) และเรียกแกน y ว่า *แกนจินตภาพ* (imaginary axis)



รูปที่ 3.1. ระนาบเชิงซ้อน

ถ้า $(a, b) \neq (0, 0)$ เราสามารถแทนค่า a และ b ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate) ได้เป็น

$$a = r\cos\theta, \qquad b = r\sin\theta,$$

เมื่อ $r = |(a, b)|$ และ θ เป็นมุมที่เวกเตอร์ (a, b) ทำกับแกนจริง (ดูรูป 3.1 ประกอบ) ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ สามารถเขียนได้ใน*รูปเชิงขั้วเชิงซ้อน* (complex polar form) ได้เป็น

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

และเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า[4] $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ดังนั้น เพื่อความสะดวก บางครั้งเราอาจจะเขียน z ใน*รูปฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อน* (complex exponential form)

$$z = re^{i\theta},$$

เมื่อ $r = |z|$ และ $\theta = \arg z$

[4]ดูการพิสูจน์ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ใน [6]

ตัวอย่าง 3.2.

- ถ้า $z = \sqrt{3} + i$ ดังนั้น

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2, \quad \text{และ} \quad \theta = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

ดังนั้น เราสามารถเขียน z ในรูปพิกัดเชิงขั้วได้เป็น

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{หรือ} \quad z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

- ถ้า $z = -1 + i$ ดังนั้น

$$r = |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \text{และ} \quad \tan\theta = \frac{1}{-1} = -1,$$

เราทราบว่า ทั้ง $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ และ $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ จะมีค่าเท่ากับ -1 เหมือนกันแต่เนื่องจาก z อยู่ในจตุภาคที่สอง (second quadrant) เราจะได้ว่ามุม $\theta = \frac{3\pi}{4}$ นั่นคือ เราสามารถเขียนz ในรูปพิกัดเชิงขั้วได้เป็น

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{หรือ} \quad z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

หมายเหตุ สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ,

$$re^{i\theta+2n\pi} = r\left(\cos(\theta+2n\pi) + i\sin(\theta+2n\pi)\right) = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = re^{i\theta}$$

นี้แสดงให้เห็นว่า*ไม่ได้มีรูปพิกัดเชิงขั้วเพียงหนึ่งเดียว*ที่ใช้แทนจำนวนเชิงซ้อน z ดังนั้น จากตัวอย่าง 3.2 เราอาจเขียน$\sqrt{3} + i$ ในรูปเชิงขั้วได้เป็น $\ldots, 2e^{i\frac{-11}{6}\pi}, 2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{13}{6}\pi}, \ldots, 2e^{i\left[\frac{\pi}{6}+2n\pi\right]}, \ldots$ แต่เรามักนิยมให้ θ เป็นอาร์กิวเมนต์จำนวนเชิงซ้อนหลัก หรือ $\theta \in (-\pi, \pi]$ นั่นเอง

3.1.3 ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อน และ แคลคูลัสของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อน

เราสามารถขยายแนวความคิดจากฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^x, เมื่อ x เป็นจำนวนจริงไปสู่*ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อน* e^z (complex exponential function) เมื่อ $z = a + bi$ และ a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ ได้เป็น

$$e^z = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a\left(\cos b + i\sin b\right)$$

คุณสมบัติต่าง ๆ ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อน[5]

ให้ $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ โดย a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

1. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2} = e^{(a+b)+(c+d)i} = e^{a+b}\left[\cos(c+d) + i\sin(c+d)\right]$
2. $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2} = e^{(a-b)+(c-d)i} = e^{a-b}\left[\cos(c-d) + i\sin(c-d)\right]$
3. $(e^{z_1})^n = e^{nz_1} = e^{na}\left[\cos(nb) + i\sin(nb)\right]$, เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ
4. $\sqrt[n]{e^{z_1}} = e^{\frac{a+(b+2k\pi)i}{n}} = e^{a/n}\left[\cos\dfrac{b+2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{b+2k\pi}{n}\right], k = 1, \ldots, n-1.$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ
5. $e^{2n\pi i} = \cos(2n\pi) + i\sin(2n\pi) = 1 + 0i = 1, \qquad e^{z+2n\pi i} = e^z e^{2n\pi i} = e^z \cdot 1 = e^z$
6. $e^{(2n+1)\pi i} = \cos\left((2n+1)\pi\right) + i\sin\left((2n+1)\pi\right) = -1 + 0i = -1$
7. $\left|e^{i\theta}\right| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$
8. $|e^{z_1}| = |e^a\left[\cos b + i\sin b\right]| = e^a$
9. $|e^{z_1}e^{z_2}| = |e^{z_1}|\,|e^{z_2}|$
10. $\arg(e^{z_1}) = \arg\left(e^a\left[\cos b + i\sin b\right]\right) = b$

และนอกจากนี้ เรายังสามารถนิยามอนุพันธ์และการหาค่าอินทิกรัล ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อนได้ โดยจะมีลักษณะเหมือนกับการหาอนุพันธ์ และ การหาค่าอินทิกรัล ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังของจำนวนจริง

11. ให้ $f(z) = e^z$ ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อนคือ
$$\frac{de^z}{dz} = f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = e^z$$
12. $\dfrac{de^{az}}{dz} = ae^z$
13. $\displaystyle\int e^z dz = e^z + c,$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
14. $\displaystyle\int e^{az} dz = \frac{e^{az}}{a} + c,$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

[5] ดูการพิสูจน์คุณสมบัติของฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อนได้ใน [5, 6, 13]

3.1.4 ผลเฉลยเชิงซ้อนของสมการพหุนาม

ในปีคริสต์ศักราช 1799, เกาส์สามารถพิสูจน์ได้ว่า สมการพนุนาม

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{3.1}$$

เมื่อ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, มีผลเฉลยเป็นจำนวนเชิงซ้อน[6] และนอกเหนือกว่านั้น เขาสามารถพิสูจน์ได้ว่า ถ้าสัมประสิทธิ์$a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ผลเฉลยของสมการเชิงพหุนามนี้ ก็ยังคงอยู่ในระบบจำนวนเชิงซ้อนเช่นกันเราเรียกสิ่งที่เกาส์พิสูจน์นี้ว่า**ทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต** (fundamental theorem of algebra) ตัวทฤษฎีนี้ได้แสดงให้เห็นว่าเราไม่จำเป็นต้องสร้างระบบตัวเลขที่ทั่วไปกว่าจำนวนเชิงซ้อนอีก เพื่อจะใช้ในการแก้สมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อนเหมือนกับที่เราต้องสร้างระบบจำนวนเชิงซ้อน เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยของสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและเราเรียกผลเฉลยของสมการพหุนามนี้ว่า *ราก* (roots) ของสมการ

เราอาจจะเขียนทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต[7] ในเชิงภาษาคณิตศาสตร์ได้เป็น

ทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต 3.1. *สำหรับพหุนามกำลัง n (3.1) ใด ๆ เราสามารถแยกตัวประกอบให้อยู่ในรูป*

$$a_n(x - z_1)(x - z_2)\cdots(x - z_n) = 0$$

จำนวน n ตัวประกอบ ได้เสมอ, เมื่อ $z_1, \ldots, z_n$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน (ที่อาจจะมีบางค่าซ้ำกันก็ได้) และเรียก $z_1, \ldots, z_n$ ว่ารากของสมการ (3.1)

ตัวอย่างรากของสมการพหุนาม

- **รากของสมการกำลังสอง** (roots of quadratic equation)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$a(x - z_1)(x - z_2) = 0$$

[6]เราสามารถพิจารณา**จำนวนจริง** a ใด ๆ ว่าเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้ โดยให้ a มีค่าเป็น $a + 0i$ หรือ $(a, 0)$ ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

[7]ดูแนวคิดในการพิสูจน์ในได้ [9]

ผลเฉลย : $z_1, z_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง เราเรียก $D = b^2 - 4ac$ ว่า*ดิสคริมิแนนต์* (discriminant) ของสมการกำลังสอง และ

$$z_1, z_2 = \begin{cases} \text{จำนวนจริงที่แตกต่างกัน} & \text{ถ้า } D > 0 \\ \text{จำนวนจริงที่เหมือนกัน} & \text{ถ้า } D = 0 \\ \text{จำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน} & \text{ถ้า } D < 0 \end{cases}$$

- **รากของสมการกำลังสาม** (roots of cubic equation)

$$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) = 0$$

ให้

$$\begin{aligned} Q &= \tfrac{3a_1 - (a_2)^2}{9}, & R &= \tfrac{9a_1 a_2 - 27a_0 - 2(a_2)^2}{54}, \\ S &= \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, & T &= \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}} \end{aligned}$$

$$\textbf{ผลเฉลย} : \begin{cases} z_1 = S + T - \frac{1}{3}a_2 \\ z_2 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \\ z_3 = -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{1}{3}a_2 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S - T) \end{cases}$$

ถ้า a_0, a_1 และ a_2 เป็นจำนวนจริง เราเรียก $D = Q^3 + R^2$ ว่า*ดิสคริมิแนนต์*ของสมการกำลังสาม และ

$$z_1, z_2, z_3 = \begin{cases} \text{จำนวนจริงหนึ่งจำนวนและจำนวนเชิงซ้อน} & \\ \text{ซึ่ง เป็น สัง ยุค เชิงซ้อน ซึ่งกันและกัน สอง} & \text{ถ้า } D > 0 \\ \text{จำนวน} & \\ \text{จำนวนจริงทั้งสามจำนวน} & \\ \text{และมีอย่างน้อยสองจำนวนที่เหมือนกัน} & \text{ถ้า } D = 0 \\ \text{จำนวนจริงที่แตกต่างกัน} & \text{ถ้า } D < 0 \end{cases}$$

นอกจากนี้ยังพบว่า

$$z_1 + z_2 + z_3 = a_2, \quad z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = a_1, \quad z_1 z_2 z_3 = -a_0$$

ตัวอย่าง 3.3. จงแยกตัวประกอบสมการ

$$2x^2 + 2x + 3 = 0$$

วิธีทำ เราได้ว่าผลเฉลยของสมการคือ

$$z_1, z_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-20}}{4} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} i$$

ดังนั้นเราแยกตัวประกอบได้เป็น

$$2(x - z_1)(x - z_2) = 2(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} i)(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} i)$$

ตัวอย่าง 3.4. จงหารากของสมการ

$$z^2 - (4 + 3i)z + (1 + 5i) = 0$$

วิธีทำ โดยสูตรการหาผลเฉลยของสมการเราได้ว่า

$$\begin{aligned} z_1, z_2 &= \frac{4 + 3i \pm \sqrt{(4 + 3i)^2 - 4(1 + 5i)}}{2} \\ &= \frac{4 + 3i \pm \sqrt{3 + 4i}}{2} \end{aligned}$$

ต้องการหาค่า $\sqrt{3 + 4i}$: สมมติให้ $x + yi = \sqrt{3 + 4i}$, โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง ดังนั้น

$$\begin{aligned} (x + yi)^2 &= 3 + 4i \\ (x^2 - y^2) + 2xyi &= 3 + 4i \end{aligned}$$

เมื่อเปรียบเทียบส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพเราได้ว่า

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \text{และ} \quad 2xy = 4$$

จากสมการทางด้านขวามือ เราได้ $y = \dfrac{2}{x}$ เมื่อนำไปแทนค่าในสมการทางด้านซ้ายมือ เราได้

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{4}{x^2} &= 3 \\ x^4 - 3x^2 - 4 &= 0 \\ (x^2 - 4)(x^2 + 1) &= 0 \end{aligned}$$

จากตรงนี้ เราได้ $x = \pm 2, \pm i$ แต่เนื่องจากเรากำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงดังนั้น เราจะได้ $x = \pm 2$

เมื่อ $x = 2$ ได้ $y = \dfrac{2}{x} = 1$ และเมื่อ $x = -2$ ได้ $y = -1$ ดังนั้น ผลเฉลยของสมการคือ

$$z_1, z_2 = \frac{4 + 3i \pm (2 + i)}{2}$$
$$z_1 = 3 + 2i \qquad z_2 = 1 + i$$

ตัวอย่าง 3.5. จงหารากที่ 4 ของ -4

วิธีทำ จากโจทย์เราอาจจะเขียนเป็นสมการพหุนามได้เป็น

$$z^4 = -4 \quad \text{หรือ} \quad z^4 + 4 = 0$$

ในการหาผลเฉลยของสมการ เราจะเขียน -4 ในรูปฟังก์ชันยกกำลังเชิงซ้อนได้เป็น[8]

$$z^4 = e^{\ln 4 + i\pi}$$

ดังนั้น

$$z = e^{\frac{\ln 4 + (\pi + 2k\pi)i}{4}}, \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

ซึ่งจะมีผลเฉลยเป็น

$$z_1 = e^{\frac{\ln 4}{4} + \frac{\pi}{4}i}, \quad z_2 = e^{\frac{\ln 4}{4} + \frac{3\pi}{4}i},$$
$$z_3 = e^{\frac{\ln 4}{4} + \frac{5\pi}{4}i}, \quad z_4 = e^{\frac{\ln 4}{4} + \frac{7\pi}{4}i}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned}
z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 1 + i, \\
z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i} &= \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = -1 + i, \\
z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i} &= \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -1 - i, \\
z_4 = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}i} &= \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = 1 - i
\end{aligned}$$

[8] เราจะเขียน $-|a|$ ในรูปของฟังก์ชันเลขยกกำลัง $e^{\ln|a| + i\pi}$ หรือ ในรูปเชิงขั้ว $|a|\,(cos\pi + i\sin\pi)$, เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เป็น 0

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่า

$$i^{4n+1} = i,\ i^{4n+2} = -1,\ i^{4n+3} = -i,\ i^{4n+4} = 1,$$

และ

$$\frac{1}{i^{4n+1}} = -i,\ \frac{1}{i^{4n+2}} = -1,\ \frac{1}{i^{4n+3}} = i,\ \frac{1}{i^{4n+4}} = 1,$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

2. จงหารูปเชิงขั้วเชิงซ้อน และ รูปฟังก์ชันเลขชี้กำลังเชิงซ้อนของ

(a) $3 + 4i$
(b) $5 - 2i$
(c) -14
(d) $23i$
(e) $-12 + 13i$
(f) $-12 - 13i$
(g) 7
(h) $\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{-\sqrt{3} + \sqrt{2}i}$
(i) $\sqrt{3} + \sqrt{5}i$
(j) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$
(k) $-\dfrac{2i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$
(l) $\ln 2 + i \ln 4$

3. ถ้า $z_1 = 3 + 4i$ และ $z_2 = 5 - 2i$ จงหาค่าต่อไปนี้ในรูป $x + yi$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(a) $z_1 + z_2$
(b) $z_1 - z_2$
(c) $z_1 z_2$
(d) $\dfrac{1}{z_1}$
(e) $\dfrac{1}{z_2}$
(f) $\dfrac{z_1}{z_2}$
(g) $4z_1 + 2z_2$
(h) $-z_1 + z_2 i$
(i) $(z_1)^{108}$
(j) $\dfrac{z_1}{z_1 + z_2}$
(k) $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$
(l) $\dfrac{z_1 z_2}{z1 - z2}$

4. จงแสดงว่า

(a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
(b) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
(c) $\overline{|z_1|} = |\overline{z_1}|$
(d) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
(e) $|z_1^n| = |z_1|^n$
(f) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
(g) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
(h) $\mathrm{Arg}(z_1) = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arg}(\overline{z_1})$

5. จงหาผลเฉลย**ทั้งหมด**ของสมการพหุนามต่อไปนี้

(a) $z^2 + 5 = 0$

(b) $z^2 + z + 1 - i = 0$

(c) $z^4 = 4$

(d) $z^4 = 4i$

(e) $z^2 - (5 + i)z + 8 + i = 0$

(f) $z^4 - 2(1 + 3i)z^2 - 8 + 6i = 0$

(g) $z^8 = 1$

(h) $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z + 1 = 0$

3.2 รูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองคือ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}),$$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ x, y และ $\frac{dy}{dx}$, x เป็นตัวแปรอิสระ, y เป็นตัวแปรไม่อิสระและ $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}$ เป็นอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x อันดับที่หนึ่ง และ ที่สอง ตามลำดับ

หรือในบางครั้ง เราอาจเขียนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ในรูป

$$y'' = f(x, y, y'),$$

เมื่อ y'' หมายถึง $\frac{d^2y}{dx^2}$ และ y' หมายถึง $\frac{dy}{dx}$

ตัวอย่าง 3.6. ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

- $F = m\frac{d^2y}{dt^2}$ — กฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law)
- $F_{\text{สปริง}} = m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$ — กฎของฮุก (Hooke's law)
- $F_{\text{แรงเสียดทาน}} = my'' = -by'$ — สมการการเคลื่อนที่แบบการสั่น (vibration motion equation)
- $my'' + by' + ky = F_{\text{ภายนอก}}(t)$ — สมการการเคลื่อนที่แบบการสั่นชนิดมีแรงภายนอก (vibration motion equation with external force)
- $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t)$ — กฎของคีร์ชฮอฟฟ์ (Kirchhoff's loop law)

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ที่ง่ายต่อการหาผลเฉลยที่สุด จะอยู่ในรูป

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \quad \text{หรือ} \quad y'' = f(x)$$

ซึ่ง สามารถหาผลเฉลยของสมการได้ โดยการหาค่าอินทิกรัลโดยตรง

$$\begin{aligned} y' &= \int f(x)dx + c_1, \\ y &= \int \left[\int f(x)dx + c_1 \right] dx + c_2 \\ &= \int \left[\int f(x)dx \right] dx + c_1 x + c_2, \end{aligned}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

3.3 ปัญหาค่าขอบ

ในการหาผลเฉลย ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง เราพบว่าผลเฉลยทั่วไปที่หาได้ จะมี*ค่าคงตัวใด ๆ* (arbitrary constant) ปรากฏอยู่ 1 จำนวน และสำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ผลเฉลยทั่วไปที่ได้ ก็จะปรากฏค่าคงตัวใด ๆ 2 จำนวนและโดยทฤษฎีบท[9] พบว่า สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ n นั้น ผลเฉลยทั่วไปจะปรากฏค่าคงตัวใด ๆ อยู่ n จำนวน

ในบทที่ผ่านมา ได้กล่าวถึง*ปัญหาค่าตั้งต้น* [10] ซึ่งประกอบด้วย

- สมการเชิงอนุพันธ์
- เงื่อนไข ซึ่งต้องเป็นเงื่อนไขที่สัมพันธ์กับค่า x เพียงค่าเดียวเท่านั้น

ในการจะกำจัดค่าคงตัวใด ๆ ที่ปรากฏอยู่ในผลเฉลย สำหรับปัญหาค่าตั้งต้นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ซึ่งผลเฉลยมีค่าคงตัวใด ๆ ปรากฏอยู่เพียงค่าเดียว เราใช้เงื่อนไขเพียง 1 เงื่อนไข เราก็สามารถหาผลเฉลยเฉพาะได้ แต่สำหรับผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง เราจำเป็นต้องมี*อย่างน้อยสองเงื่อนไข* เพื่อที่จะสามารถกำจัดค่าคงตัวทั้งสองค่าที่ปรากฏอยู่ในผลเฉลย ยกตัวอย่างเช่น

[9] ดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน [18]

[10] ดูบทนิยามและรายละเอียดเรื่องปัญหาค่าตั้งต้นในหัวข้อ 2.4 หน้า 19

ตัวอย่าง 3.7. สมการ

$$y'' + y = 0 \tag{3.2}$$

มีผลเฉลยทั่งไปคือ $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ (ผู้อ่านสามารถตรวจสอบได้ ว่าเป็นเฉลยโดยการแทนค่า y ลงในสมการ (3.2))

ถ้าสมการ (3.2) มีเงื่อนไขค่าตั้งต้นเพียง $y(0) = 0$ เราจะได้ว่า

$$0 = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1$$

ดังนั้น ผลเฉลยของข้อปัญหา

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0$$

คือ $y = c_2 \sin x$ แต่ถ้าสมการ (3.2) มีทั้งเงื่อนไข $y(0) = 0$ และ $y'(0) = 1$ เราได้

$$\begin{aligned} y' &= c_2 \cos x \\ y'(0) &= c_2 \cos 0 = c_2 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

ซึ่งได้ว่าผลเฉลยเฉพาะของข้อปัญหา คือ $y = \sin x$

และสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n เราจำเป็นต้องมี*อย่างน้อย n เงื่อนไข* เพื่อใช้ในการหาผลเฉลยเฉพาะ

ตัวอย่าง 3.8. พิจารณาปัญหาค่าตั้งต้น ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สี่

$$\begin{gathered} (x^2 - 4)\frac{d^4y}{dx^4} + 2x\frac{d^2y}{dx^2} + (\sin x)y = 0 \\ y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y''(0) = 0, \qquad y'''(0) = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

ข้อปัญหาดังกล่าว ประกอบด้วย*สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสี่* และ *เงื่อนไขตั้งต้น 4 เงื่อนไข* และข้อปัญหานี้มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว[11] คือ

$$y(x) = 0$$

[11] ดูทฤษฎีบทการมีจริง และ มีอยู่หนึ่งเดียว ของผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น(existence and uniqueness theorem) ได้ใน [18]

สำหรับข้อปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสองต้องการสองเงื่อนไขเพื่อหาผลเฉลยเฉพาะ แต่บางครั้งเงื่อนไขไม่ได้ถูกให้มาในลักษณะของ*เงื่อนไขค่าตั้งต้น*

แต่ให้มาในลักษณะ

$$y(x_1) = k_1 \quad \text{และ} \quad y(x_2) = k_2, \tag{3.4}$$

โดยเป็นเงื่อนไขที่จุด x_1 และ x_2 **ที่แตกต่างกัน**

เราเรียกเงื่อนไข (3.4) ว่า*เงื่อนไขขอบ* (boundary condition) และเรียกข้อปัญหา ที่มีสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง และ เงื่อนไข (3.4) ว่า*ปัญหาค่าขอบ* (boundary-valued problem)

และสำหรับผลเฉลยที่ได้ จะพิจารณาเฉพาะในช่วง$x \in [m, M]$, เมื่อ m คือ ค่าที่น้อยกว่าระหว่าง x_1 และ x_2 และ M คือค่าที่มากกว่าระหว่าง x_1 และ x_2 ($m = \min\{x_1, x_2\}$, $M = \max\{x_1, x_2\}$) ซึ่งจะแตกต่างจากปัญหาค่าตั้งต้น ที่เราจะพิจารณาผลเฉลยเฉพาะในย่านใกล้เคียงกับค่าตั้งต้น x_0

ตัวอย่าง 3.9. พิจารณาปัญหาค่าขอบ

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y(\frac{\pi}{2}) = -3 \tag{3.5}$$

จากตัวอย่าง 3.7 เราทราบแล้วว่าผลเฉลยของสมการคือ$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ และเมื่อแทนเงื่อนไขเราได้ว่า

$$\begin{aligned} 3 &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) \\ &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \\ &= c_1 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} -3 &= 3\cos(\frac{\pi}{2}) + c_2 \sin(\frac{\pi}{2}) \\ &= c_2 \cdot 1 \\ &= c_2 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของข้อปัญหา (3.5) คือ

$$y = 3\cos x - 3\sin x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

ที่ผ่านมา ได้กล่าวไว้ว่า ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n เราต้องการเงื่อนไขอย่างน้อย n เงื่อนไข เพื่อใช้กำจัดค่าคงตัวใด ๆ จำนวน n ตัว แต่ตัวอย่างถัดไป จะแสดงให้เห็นว่าในทางกลับกันอาจจะไม่จริง นั่นคือ ถึงแม้มีเงื่อนไขจำนวน n เงื่อนไข แต่เรา**อาจจะไม่สามารถกำจัดค่าคงตัวใด ๆ ให้หมดไปได้**

ตัวอย่าง 3.10. พิจารณาปัญหาค่าขอบ

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 3, \qquad y(\pi) = -3 \tag{3.6}$$

จากตัวอย่าง 3.7 เราทราบแล้วว่าผลเฉลยของสมการคือ

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ และเมื่อแทนเงื่อนไขเราได้ว่า

$$\begin{aligned} 3 &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) \\ &= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 \\ &= c_1 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} -3 &= 3\cos(\pi) + c_2 \sin(\pi) \\ &= 3 \cdot (-1) \\ &= -3 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของข้อปัญหา (3.6) คือ

$$y = 3\cos x + c_2 \sin x, \qquad x \in [0, \pi]$$

จากตัวอย่างนี้ ผู้อ่านเห็นได้ว่า ถึงแม้ว่าปัญหาค่าขอบ (3.6) ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองและมีเงื่อนไขขอบสองเงื่อนไขก็ตามเงื่อนไขดังกล่าว ไม่ได้ช่วยให้สามารถหาผลเฉลยเฉพาะได้

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยเฉพาะของปัญหาค่าขอบต่อไปนี้

1. $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 3,\ y(\pi/2) = -3$
   เมื่อผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$, c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. $y'' - 25y = 0,\ y(-2) = y(2) = \cosh 10$
   เมื่อผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1 e^{5x} + c_2 e^{5x}$, c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ
   $$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3. $y'' + 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y(\pi/2) = 0$
   เมื่อผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^{-x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right)$, c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

4. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y(1) = e$
   เมื่อผลเฉลยทั่วไปคือ $y = e^x\left(c_1 + c_2 x\right)$, c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

3.4 สมการเชิงเส้น

จากบทนิยาม 1.3 สมการเชิงเส้น (หน้า 2) เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สอง ได้เป็น
$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$
เมื่อ $a_2(x) \neq 0$ และ $a_2,\ a_1,\ a_0,\ b$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

เนื่องจาก $a_2(x) \neq 0$ เราสามารถหารสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สองดังกล่าวด้วย $a_2(x)$ และ เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สองได้เป็น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{3.7}$$

เมื่อ $p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $q(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ และ$r(x) = \dfrac{b(x)}{a_2(x)}$

ถ้า $r(x) \equiv 0$ (นั่นคือ $r(x) = 0$ ทุก ๆ ค่า x ที่อยู่ในช่วงที่พิจารณา) สมการ (3.7) จะสามารถถูกเขียนได้เป็น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.8}$$

และเราเรียกสมการนี้ว่า *สมการเอกพันธุ์*[12] (homogeneous equation) แต่ ถ้า $r(x) \neq 0$ เราเรียกสมการ (3.7) ว่า *สมการไม่เอกพันธุ์* (nonhomogeneous equation)

เพื่อความสะดวกในบทนี้เราจะใช้คำว่า“สมการเชิงเส้น”แทนคำว่า“สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สอง”

ถ้า $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นค่าคงตัว เราเรียกสมการ ว่า*สมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว*

ตัวอย่าง 3.11.

- สมการ $y'' + 3xy' + x^3y^2 = e^x$
  ไม่เป็นสมการเชิงเส้น

- สมการ $(\sin x)y'' + (\cos x)y' + \tan\sqrt{x} = 0$
  เป็นสมการเชิงเส้น แต่**ไม่เป็น**สมการเอกพันธุ์

- สมการ $y'' + 3xy' + x^3y = e^x$
  เป็นสมการเชิงเส้น แต่**ไม่เป็น**สมการเอกพันธุ์

- สมการ $y'' + 3xy' + x^3y = 0$
  เป็นสมการเชิงเส้น และเป็นสมการเอกพันธุ์

- สมการ $y'' + 3y' + 5y = e^x$
  เป็นสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว แต่**ไม่เป็น**สมการเอกพันธุ์

- สมการ $y'' + 3y' + 5y = 0$
  เป็นสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และเป็นสมการเอกพันธุ์

[12] สังเกตว่า คำว่า‘‘สมการเอกพันธุ์” ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง จะใช้ในความหมายที่แตกต่างกัน

แบบฝึกหัด

จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองต่อไปนี้ เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่ ถ้าใช่ ให้ระบุว่าเป็นสมการเอกพันธุ์หรือสมการไม่เอกพันธุ์พร้อมทั้งระบุด้วยว่าสมการดังกล่าวมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวหรือไม่

1. $6\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=xy$
2. $y''+(1-x)y'+xy=\sin x$
3. $xy''-yy'=\sin x$
4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}+y=0$
5. $3t^2\dfrac{d^2x}{dt^2}=t\dfrac{dx}{dt}+4x-\ln t$
6. $\dfrac{d^2\theta}{dx^2}=\cos\theta$
7. $\dfrac{d^2y}{d\theta^2}+y=\tan\theta$
8. $\dfrac{d^2s}{dx^2}+3\dfrac{ds}{dx}-s^{1/2}=x^2$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 241)

3.5 ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธุ์

ก่อนที่จะกล่าวถึง*ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธุ์* เราจะพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ก่อน

ตัวอย่าง 3.12. พิจารณาสมการเอกพันธุ์

$$y''-3y'+2y=0 \tag{3.9}$$

เราสามารถตรวจสอบได้ว่า $y_1=e^x$ และ $y_2=e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.9) นอกจากนี้ยังพบว่า $2e^x+3e^{2x}$, $-e^x+\sqrt{2}e^{2x}$ และ $\dfrac{(\ln 2)e^x-(\ln 3)e^{2x}}{2}$ ก็คงเป็นผลเฉลยของสมการ (3.9) ด้วย ไม่เพียงเท่านี้ ไม่ว่าจะเลือกค่าคงตัวใด ๆ c_1 และ c_2 และให้

$$y=c_1e^x+c_2e^{2x}$$

ซึ่งได้ว่า

$$y'=c_1e^x+2c_2e^{2x} \qquad \text{และ} \qquad y''=c_1e^x+4c_2e^{2x}$$

ทำให้

$$y''-3y'+2y=\left(c_1e^x+4c_2e^{2x}\right)-3\left(c_1e^x+2c_2e^{2x}\right)+2\left(c_1e^x+c_2e^{2x}\right)\equiv 0$$

นี้แสดงว่า ถ้า e^x และ e^{2x} เป็นผลเฉลยของสมการ (3.9) $y = c_1e^x + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ (3.9) ด้วยเหมือนกัน

บทนิยาม 3.1. ให้ f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่นิยามบนโดเมนและโดเมนร่วมเกี่ยว (codomain) เดียวกันเราเรียกฟังก์ชัน

$$f(x) = c_1f_1(x) + c_2f_2(x),$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ว่า *ผลรวมเชิงเส้น* (linear combination) ของ f_1 และ f_2

จากแนวความคิดที่ได้กล่าวมาเกี่ยวกับ ผลเฉลยที่อยู่ในรูปของผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยอื่น นำไปสู่ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ (fundamental theorem on homogeneous equations) ดังนี้

ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ 3.2. *สำหรับสมการเอกพันธุ์*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.10}$$

*ถ้า y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยของ**สมการเอกพันธุ์เชิงเส้น**แล้ว ผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยทั้งสอง*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ก็ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น (3.10) ด้วย

พิสูจน์ เราทำการพิสูจน์โดยการแทนค่า y ลงในสมการ (3.10)

เนื่องจาก

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' \quad \text{และ} \quad y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''$$

เมื่อแทนลงในสมการ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
y'' + p(x)y' + q(x)y &= \left(c_1y_1'' + c_2y_2''\right) + p(x)\left(c_1y_1' + c_2y_2'\right) + q(x)\left(c_1y_1 + c_2y_2\right) \\
&= c_1 \underbrace{\left(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1\right)}_{=0 \text{ เนื่องจาก } y_1 \text{ เป็นคำตอบของสมการ}} + c_2 \underbrace{\left(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2\right)}_{=0 \text{ เนื่องจาก } y_2 \text{ เป็นคำตอบของสมการ}} \\
&= c_10 + c_20 = 0
\end{aligned}$$

นี้แสดงให้เห็นว่า ผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยใด ๆ ของสมการเอกพันธุ์ (3.10) ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการด้วย □

ทฤษฎีบทนี้ ได้กล่าวถึงผลเฉลยใหม่ ที่ได้จากการรวมเชิงเส้น ของผลเฉลยที่เราหามาได้ก่อนหน้านี้ แต่ทฤษฎีบทถัดไปจะกล่าวถึง รูปแบบผลเฉลยทั่วไปทั้งหมด*ที่เป็นไปได้* ของสมการเชิงเส้นอันดับที่สองทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงนี้ ผู้แต่งจะไม่แสดงการพิสูจน์ไว้ แต่ผู้อ่านสามารถดูการพิสูจน์ได้ใน [18]

ทฤษฎีบท 3.3. *ถ้า y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.11}$$

ซึ่งนิยามบนช่วง I บางช่วง, โดย $\dfrac{y_1}{y_2}$ ไม่เป็นค่าคงตัวแล้วผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.3) บนช่วง I ต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ, ***เท่านั้น***

ทฤษฎีบทนี้บอกให้เรารู้ว่า ในการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับที่สอง ถ้าเราพบผลเฉลยสองผลเฉลย ที่ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันบนช่วง I หรือ

$$y_1 \neq ky_2, \qquad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

แล้ว เราไม่จำเป็นต้องหาผลเฉลยในรูปแบบอื่น ๆ อีก

คำว่า “ฟังก์ชันไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกัน” จะสมมูลกับคำว่า “ฟังก์ชันเป็น*อิสระเชิงเส้น* (linearly independent) ซึ่งกันและกัน” นั่นคือ ถ้า $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน จะหมายถึง$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ ค่าคงตัว c_1 และ c_2 มีค่าเป็นศูนย์เท่านั้น

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0 \Leftrightarrow c_1 = 0,\ c_2 = 0$$

ในบางครั้ง อาจจะใช้คำว่า “ฟังก์ชันเป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน” แทนค่าว่า “ฟังก์ชันไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกัน”

บทนิยาม 3.2. เราเรียกเซตของผลเฉลย y_1 และ y_2 ของสมการเอกพันธุ์

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

หรือ $\{y_1, y_2\}$ ซึ่ง y_1 และ y_2 ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันบนช่วง I ว่า*เซตของผลเฉลยมูลฐาน* (fundamental solution set)

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นไปได้ของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับสอง

1. หาผลเฉลย y_1 และ y_2 ที่ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันบนช่วง I

2. ผลเฉลยทั่วไปต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

หมายเหตุ ในหนังสือบางเล่ม อาจมีขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นไปได้ ของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับสอง แตกต่างกันคือ

1. หาผลเฉลย y_1 และ y_2 ที่

$$W[y_1, y_2](x) := y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) \neq 0$$

บนช่วง I แทนที่จะหาผลเฉลยที่ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันบนช่วง I

2. ผลเฉลยทั่วไปต้องอยู่ในรูป $y = c_1y_1 + c_2y_2$

และเรียก $W[y_1, y_2]$ ว่า*รอนสเกียนของ* y_1 *และ* y_2 (Wronskian of y_1 and y_2)

ซึ่งจริง ๆ แล้วทั้งสองกรณีสมมูลกัน สามารถแสดงให้เห็นโดยง่าย คือ

- ถ้า y_1 และ y_2 ที่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกัน ดังนั้น

$$y_1 = ky_2$$

แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) := y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) &= [ky_2(x)]\, y_2'(x) - y_2(x)\, [ky_2(x)]' \\ &= k\left[y_2(x)y_2'(x) - y_2(x)y_2'(x)\right] \equiv 0 \end{aligned}$$

- ในทางกลับกัน ถ้า $W[y_1, y_2](x) = 0$

$$\begin{aligned} y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x) &= 0 \\ y_2(x)y_1'(x) &= y_1(x)y_2'(x) \\ \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} &= \frac{y_2'(x)}{y_2(x)} \\ \int \frac{y_1'(x)}{y_1(x)}dx &= \int \frac{y_2'(x)}{y_2(x)}dx \\ \ln|y_1(x)| &= \ln|y_2(x)| + c, \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ} \\ y_1(x) &= ky_2(x),\ k = e^c \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.13. พิจารณาสมการเอกพันธุ์

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{3.12}$$

เราทราบแล้วว่า $y_1 = e^x$ และ $y_2 = e^{2x}$ ต่างเป็นผลเฉลยของสมการ (3.12) บนช่วง $(-\infty, \infty)$ และ $\dfrac{y_1}{y_2} = e^{-x}$ ไม่เป็นค่าคงตัว ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.3 เราสามารถสรุปได้ทันทีว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์(3.12) คือ

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 3.14. ถ้า $y_1 = \cos(3x)$ และ $y_2 = \sin(3x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ$y'' + 9y = 0$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$, จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + 9y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3 \tag{3.13}$$

วิธีทำ เราพบว่า $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{\cos(3x)}{\sin(3x)} = \cot(3x)$ ไม่เป็นค่าคงตัวดังนั้น โดยทฤษฎีบท เราได้ผลเฉลยทั่วไป

$$y = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x),$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ และเราสามารถหาค่า c_1 ได้ คือ

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &= c_1\cos 0 + c_2\sin 0 \\ &= c_1 \cdot 1 + 0 = c_1 \end{aligned}$$

และเราสามารถหาค่า c_2 ได้ คือ

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= \frac{d\ \cos(3x)}{dx} + \frac{d\, c_2 \sin(3x)}{dx} \\
&= -3\sin 3x + 3c_2 \cos 3x \\
y'(0) = 3 &= -\sin 0 + 3c_2 \cos 0 \\
&= 0 + 3c_2 \cdot 1 \\
&= 3c_2 \\
c_2 &= 1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหา (3.13) คือ $y = \cos 3x + \sin 3x$

แบบฝึกหัด

1. ตรวจสอบว่าฟังก์ชัน y_1 และ y_2 ต่อไปนี้ เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน(หรือนั่นคือ ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกัน) หรือไม่ (อาจจะตรวจสอบโดยตรง หรือ หาค่ารอนสเกียน ก็ได้)

   (a) $y_1(x) = e^{-x}\cos 2x, \qquad y_2(x) = e^{-x}\sin 2x$

   (b) $y_1(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, \qquad y_2(x) = \sin^2 3x + \cos^2 3x$

   (c) $y_1(x) = x^2\cos(\ln x), \qquad y_2(x) = x^2\sin(\ln x)$

   (d) $y_1(x) = \tan^2 x - \sec^2 x, \qquad y_2(x) = 3$

   (e) $y_1(x) = \ln\left(\sqrt{x}\right), \qquad y_2(x) = 3\ln x$

   (f) $y_1(x) = xe^{2x}, \qquad y_2(x) = e^{2x}$

   (g) $y_1(x) = e^{3x}, \qquad y_2(x) = e^{-4x}$

   (h) $y_1(x) = 0, \qquad y_2(x) = e^{x}$

2. ตรวจสอบว่า ฟังก์ชัน y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยของสมการต่อไปนี้หรือไม่ ถ้าใช่ ตรวจสอบดูว่า y_1 และ y_2 เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันหรือไม่ (อาจจะตรวจสอบโดยตรง หรือ หาค่ารอนสเกียน ก็ได้) และถ้า y_1 และ y_2 เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกันจงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการดังกล่าว และหาผลเฉลยของปัญหาที่สอดคล้องตามเงื่อนไขตั้งต้นที่ระบุให้

   (a) สมการ : $xy'' - 2y = 0$
   เงื่อนไขตั้งต้น : $y(1) = -2,\ y'(1) = -7$
   $y_1 = x^2,\ y_2 = x^{-1}$

   (b) สมการ $y'' - 5y' + 6y = 0$
   เงื่อนไขตั้งต้น : $y(0) = -1,\ y'(0) = -4$
   $y_1 = e^{2x},\ y_2 = e^{3x}$

   (c) สมการ $y'' - 2y' + 5y = 0$
   เงื่อนไขตั้งต้น : $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$
   $y_1 = e^{x}\cos 2x,\ y_2 = e^{x}\sin 2x$

(d) สมการ $y'' - 5y' = 0$

เงื่อนไขตั้งต้น : $y(0) = 2,\ y'(0) = 5$

$y_1 = 2,\ y_2 = e^{5x}$

(e) สมการ $xy'' - (x+2)y' + 2y = 0$

เงื่อนไขตั้งต้น : $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$

$y_1 = e^x,\ y_2 = x^2 + 2x + 2$

(f) สมการ $y'' - y = 0$

เงื่อนไขตั้งต้น : $y(0) = 1,\ y'(0) = -1$

$y_1 = \cosh x,\ y_2 = \sinh x$ โดยที่

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{และ} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

3. พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' + 5y' - 6y = 0 \tag{3.14}$$

(a) จงแสดงว่า $S_1 := \{e^x, e^x - e^{-6x}\}$ เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการ (3.14)

(b) จงแสดงว่า $S_2 := \{e^x, 3e^x + e^{-6x}\}$ เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการ (3.14)

(c) จงตรวจสอบว่า $\phi(x) = e^{-6x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.14) และจงเขียน ϕ ในรูปผลรวมเชิงเส้นของสมาชิกใน S_1 และ S_2

4. ตรวจสอบว่าผลเฉลย $y_1 = 1$ และ $y_2 = \ln x$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกันของสมการต่อไปนี้หรือไม่

$$y'' + \left(y'\right)^2 = 0, \qquad (x > 0)$$

ตรวจสอบว่าผลเฉลย $y = c_1y_1 + c_2y_2$ เป็นผลเฉลยของทั่วไปของสมการด้วยหรือไม่? ถ้าไม่ จงวิเคราะห์ว่าทำไม ถึงขัดแย้งกับทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธุ์

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 241)

3.6 สมการเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

หัวข้อนี้ จะแสดงการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.15}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว

จากแนวความคิดในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

$$y' - \lambda y = 0, \tag{3.16}$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงตัว, เราพบว่าผลเฉลยของสมการ (3.16) จะอยู่ในรูป $y = c_1 e^{\lambda x}$, เมื่อ c_1 เป็นค่าคงตัวใด ๆ โดยแนวความคิดนี้ เราจะสมมติให้ผลเฉลยของสมการ (3.15) อยู่ในรูป

$$y = c_1 e^{\lambda x},$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงตัว และ c_1 เป็นค่าคงตัวใด ๆ, และเมื่อแทนค่า y และ อนุพันธ์

$$y' = c_1 \lambda e^{\lambda x} \quad \text{และ} \quad y'' = c_1 \lambda^2 e^{\lambda x}$$

ลงในสมการ (3.15) เราได้ว่า

$$a(c_1 \lambda^2 e^{\lambda x}) + b(c_1 \lambda e^{\lambda x}) + c(c_1 e^{\lambda x}) = (a\lambda^2 + b\lambda + c)(c_1 e^{\lambda x}) = 0$$

ซึ่งตรงนี้ เราสามารถสรุปได้ว่า $y = c_1 e^{\lambda x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.15) ก็ต่อเมื่อ λ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3.17}$$

เราเรียกสมการ (3.17) นี้ว่า*สมการแคแรกเทอริสติก* (characteristic equation) หรือ*สมการช่วย* (auxiliary equation) ของสมการ (3.15)

ผลเฉลยหรือราก ของสมการแคแรกเทอริสติก (3.17) ประกอบด้วย

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ซึ่งทำให้ $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ และ $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.15)

เราพบว่าค่า λ_1 และ λ_2 จะเป็นไปได้ 3 กรณี เมื่อแบ่งตามเครื่องหมายของค่าดิสคริมิแนนต์ $b^2 - 4ac$ นั่นคือ

- $b^2 - 4ac > 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใด ๆ ที่แตกต่างกัน**

- $b^2 - 4ac = 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**

- $b^2 - 4ac < 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**[13]

3.6.1 กรณีรากของสมการแคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่แตกต่างกัน

เนื่องจาก เราทราบแล้วว่า

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad \text{และ} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

เป็นผลเฉลยของสมการ (3.15) และ

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x}} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \quad \text{ไม่เป็นค่าคงตัว}$$

แสดงว่า y_1 และ y_2 ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกัน ดังนั้น เราสามารถสรุปได้ว่าในกรณีนี้ผลเฉลยทั่วไป ต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 3.15. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \tag{3.18}$$

วิธีทำ เนื่องจากสมการ (3.18) เป็นสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังนั้นเราจะพิจารณาผลเฉลยจาก สมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการเป็น

$$\lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = 2 \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = 1$$

[13] ดูบทนิยาม “สังยุคเชิงซ้อน” หน้า 59

และมี $y_1 = e^{2x}$ และ $y_2 = e^x$ เป็นผลเฉลยของสมการ

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป ของสมการ (3.18) คือ

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^x,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 3.16. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ

$$y'' - y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 2(e - \frac{1}{e}) \tag{3.19}$$

วิธีทำ เนื่องจากสมการ (3.19) เป็นสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังนั้นเราจะพิจารณาผลเฉลยจาก สมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการเป็น

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = -1$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป ของสมการ (3.18) คือ

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

พิจารณาค่าขอบ เมื่อ $x = 0$

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &= c_1e^0 + c_2e^0 \\ &= c_1 + c_2 \\ c_2 &= -c_1 \end{aligned}$$

พิจารณาค่าขอบ เมื่อ $x = 1$

$$\begin{aligned} y(1) = 2(e - \frac{1}{e}) &= c_1e^1 - c_1e^{-1} \\ &= c_1(e - \frac{1}{e}) \\ c_1 &= 2 \\ \text{และ} \quad c_2 &= -c_1 = -2 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหา (3.19) คือ

$$y = 2e^x - 2e^{-x}$$

3.6.2 กรณีรากของสมการแคแรกเทอริสติก เป็นจำนวนจริงที่เหมือนกัน

ในกรณีนี้ ผลเฉลยของสมการคาแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$$

ซึ่งทำให้ $y_1 = y_2 = e^{-b/2a}$

เนื่องจาก $\dfrac{y_1}{y_2} = 1$ เราไม่อาจจะระบุได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปอยู่ในรูป $y = c_1 e^{-\frac{b}{2a}x} + c_2 e^{-\frac{b}{2a}x}$ ซึ่งมีค่าเป็น $y = c_0 e^{-\frac{b}{2a}x}$, เมื่อ $c_0 = c_1 + c_2$ ซึ่งจะดูเหมือนว่า มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น

แต่จากการสังเกต พบว่า ถ้า λ เป็นผลเฉลยของสมการแคแรกเทอริส (3.17) และให้ $y = xe^{\lambda x}$ แล้ว

$$\begin{aligned}
ay'' + by' + cy &= a\left(xe^{\lambda x}\right)'' + b\left(xe^{\lambda x}\right)' + c\left(xe^{\lambda x}\right) \\
&= a\left(\lambda^2 xe^{\lambda x} + 2\lambda e^{\lambda x}\right)'' + b\left(\lambda xe^{\lambda x} + e^{\lambda x}\right)' + c\left(xe^{\lambda x}\right) \\
&= (2a\lambda + b)\, e^{\lambda x} + \left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right) xe^{\lambda x} \\
&= (2a\lambda + b)\, e^{\lambda x} + 0 \cdot xe^{\lambda x} = (2a\lambda + b)\, e^{\lambda x}
\end{aligned}$$

และ สำหรับกรณีผลเฉลยของรากของสมการแคแรกเทอริสติก เป็นจำนวนจริงที่เหมือนกัน (หรือก็คือกรณี $b^2 - 4ac = 0$) ผลเฉลยของสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda = \frac{-b}{2a}$$

นั่นทำให้ได้ว่า

$$ay'' + by' + cy \equiv 0$$

หรือ $y = xe^{\lambda}$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการ (3.15) ด้วยเหมือนกัน

เนื่องด้วย ทั้ง $y_1 = e^{\lambda x}$ และ $y_2 = xe^{\lambda x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.15) โดยที่ $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{1}{x}$ ไม่เป็นค่าคงตัว โดยทฤษฎีบท 3.3 ทำให้เราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 xe^{\lambda x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 3.17. จงแก้สมการ

$$2y'' + 12y' + 18y = 0 \tag{3.20}$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอริสติกสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ข้อนี้คือ

$$\begin{aligned} 2\lambda^2 + 12\lambda + 18 &= 0 \\ 2(\lambda + 3)^2 &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งรากของสมการแคแรกเทอริสติก มีเพียงค่าเดียวคือ

$$\lambda = -3$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.20) คือ

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} = (c_1 + c_2 x)e^{-3x}$$

ตัวอย่าง 3.18. หาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอริสติกสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ข้อนี้คือ

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

ซึ่งสามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

ซึ่งรากของสมการแคแรกเทอริสติก มีเพียงค่าเดียวคือ

$$\lambda = 2$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

สำหรับเงื่อนไขค่าตั้งต้น $y(0) = 1$

$$\begin{aligned} 1 &= (c_1 + 0)e^0 \\ c_1 &= 1 \end{aligned}$$

และ สำหรับเงื่อนไขค่าตั้งต้น $y'(1) = 0$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} y' &= c_2e^{2x} + 2(1 + c_2x)e^{2x} \\ &= c_2(1 + 2x)e^{2x} + 2e^{2x} \\ y'(0) = 0 &= c_2e^0 + 2e^0 \\ -2 &= c_2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y = (1 - 2x)e^{2x}$$

3.6.3 กรณีรากของสมการแคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน

กรณีนี้เกิดขึ้นเมื่อ $b^2 - 4ac < 0$ ทำให้เราได้รากของสมการแคแรกเทอริสติกเป็น

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

ดังนั้น ถ้าให้

$$r = -\frac{b}{2a}, \quad s = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{และ} \quad i = \sqrt{-1}$$

เราสามารถเขียนรากของสมการได้เป็น

$$\lambda_1 = r + is, \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = r - is$$

ซึ่งจะได้ผลเฉลยของสมการเป็น

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\lambda_1 x} = e^{(r+is)x} = e^{rx}e^{isx} = e^{rx}\left[\cos(sx) + i\sin(sx)\right] \\ y_2 &= e^{\lambda_2 x} = e^{(r-is)x} = e^{rx}e^{-isx} = e^{rx}\left[\cos(sx) - i\sin(sx)\right] \end{aligned}$$

ซึ่งมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned} y &= \overline{c_1}y_1 + \overline{c_2}y_2, \quad \text{เมื่อ } \overline{c_1}, \overline{c_2} \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ} \\ &= \overline{c_1}e^{rx}\left[\cos(sx) + i\sin(sx)\right] + \overline{c_2}e^{rx}\left[\cos(sx) - i\sin(sx)\right] \\ &= e^{rx}\left[(\overline{c_1} + \overline{c_2})\cos(sx) + i(\overline{c_1} - \overline{c_2})\sin(sx)\right] \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\overline{c_1}, \overline{c_2}$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ i เป็นค่าคงตัว ถ้าให้ $c_1 = \overline{c_1} + \overline{c_2}$ และ $c_2 = i(\overline{c_1} - \overline{c_2})$ ดังนั้นเราได้ว่า c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ เขียนผลเฉลยทั่วไปได้ในรูป

$$y = e^{rx}\left[c_1\cos(sx) + c_2\sin(sx)\right] \tag{3.21}$$

หมายเหตุ ถึงแม้ว่าในการพิสูจน์ จะแสดงให้เห็นว่า พจน์ c_2 ปรากฏเป็นจำนวนเชิงซ้อน แต่เราสามารถพิจารณา c_2 เป็นแค่ค่าคงตัวใด ๆ ที่เป็นจำนวนจริงก็ได้ เพราะถ้าพิจารณา

$$y_1 = e^{rx}\cos(sx) \quad \text{และ} \quad y_2 = e^{rx}\sin(sx)$$

พบว่าทั้งสองฟังก์ชัน ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันเพราะ $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{e^{rx}\cos(sx)}{e^{rx}\sin(sx)} = \cot(sx)$ และเมื่อแทนค่า y ด้วย y_1 หรือ y_2 ลงไปในสมการเชิงอนุพันธ์ (3.15) พบว่าทั้งสองฟังก์ชันก็เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยนั่นแสดงว่า ผลเฉลยทั่วไปต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1e^{rx}\cos(sx) + c_2e^{rx}\sin(sx) = e^{rx}\left[c_1\cos(sx) + c_2\sin(sx)\right],$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งเป็นผลเฉลยที่มีหน้าตาเหมือนกับผลเฉลย (3.21) โดยไม่ต้องพิจารณา c_2 ในกรณีที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 3.19. หาผลเฉลยของสมการ

$$y'' + 4y = 0$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอริสติกสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ข้อนี้คือ

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

ซึ่งรากของสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^2 = -4$$
$$\lambda_1, \lambda_2 = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$$

ซึ่งรากทั้งสองเป็นจำนวนจินตภาพเพียงอย่างเดียว ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x),$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 3.20. หาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \qquad y(0) = -2, \qquad y(\frac{\pi}{6}) = 2e^{\frac{\pi}{24}}$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอริสติกสำหรับสมการเชิงอนุพันธ์ข้อนี้คือ

$$16\lambda^2 - 8\lambda + 145 = 0$$

ซึ่งรากของสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16 \cdot 145}}{2 \cdot 16} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 145}}{4} = \frac{1}{4} \pm 3i$$

ซึ่งรากทั้งสองเป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y = e^{x/4}\left[c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right],$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

พิจารณาค่าขอบ เมื่อ $x = 0$

$$\begin{aligned} y(0) = -2 &= e^0\left[c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0\right] \\ &= c_1 \end{aligned}$$

พิจารณาค่าขอบ เมื่อ $x = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} y(\frac{\pi}{6}) = 2e^{\frac{\pi}{24}} &= e^{\frac{\pi}{24}}\left[-2\cos\frac{\pi}{2} + c_2 \sin\frac{\pi}{2}\right] \\ &= c_2 e^{\frac{\pi}{24}} \\ c_2 &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบคือ

$$y = 2e^{x/4}\left(\sin 3x - \cos 3x\right)$$

3.6.4 สรุป

ในการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.22}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว เราจะพิจารณาสมการแคแรกเทอริสติก

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3.23}$$

ผลเฉลยหรือราก ของสมการแคแรกเทอริสติก (3.23) ประกอบด้วย

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เราพบว่าค่า λ_1 และ λ_2 จะเป็นไปได้ 3 กรณี เมื่อแบ่งตามเครื่องหมายของค่าดิสคริมิแนนต์ $b^2 - 4ac$ นั่นคือ

- $b^2 - 4ac > 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใด ๆ ที่แตกต่างกัน**
  ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

  $$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

- $b^2 - 4ac = 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**
  ถ้า $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

  $$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

- $b^2 - 4ac < 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**
  ถ้า $\lambda_1 = r + is$ และ $\lambda_2 = r - is$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

  $$y = e^{rx}\left[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)\right]$$

  เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

แบบฝึกหัด

1. หาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ต่อไปนี้

(i) $y'' + y' - 6y = 0$

(ii) $y'' + 2y' + y = 0$

(iii) $y'' + 8y = 0$

(iv) $2y'' - 4y' + 8y = 0$

(v) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(vi) $y'' - 9y' + 20y = 0$

(vii) $2y'' + 2y' + 3y = 0$

(viii) $4y'' - 12y' + 9y = 0$

(ix) $y'' + y' = 0$

(x) $y'' + 5y' + 6y = 0$

(xi) $y'' + 8y' + 16y = 0$

(xii) $y'' + y' - y = 0$

(xiii) $y'' - 6y' + 10y = 0$

(xiv) $2y'' + 7y' - 4y = 0$

(xv) $2y'' + 13y' - 7y = 0$

(xvi) $y'' - y' - 11y = 0$

(xvii) $4y'' + 20y' + 25y = 0$

(xviii) $y'' - 6y' + 25y = 0$

(xix) $4y'' + 20y' + 24y = 0$

(xx) $y'' + 2y' + 3y = 0$

(xxi) $y'' = 4y$

(xxii) $4y'' - 8y' + 7y = 0$

(xxiii) $2y'' + y' - y = 0$

(xxiv) $y'' + 4y' + 5y = 0$

(xxv) $16y'' - 8y' + y = 0$

(xxvi) $y'' + 4y' - 5y = 0$

(xxvii) $y'' - y' - 2y = 0$

(xxviii) $y'' - 10y' + 26y = 0$

(xxix) $y'' + 6y' + 9y = 0$

(xxx) $y'' = 4y' - 7y$

(xxxi) $y'' - 5y' + 6y = 0$

(xxxii) $6y'' + y' - 2y = 0$

(xxxiii) $4y'' - 4y' + y = 0$

(xxxiv) $3y'' + 11y' - 7y = 0$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

(a) $y'' - 5y' + 6y = 0,$ $\quad y(1) = e^2,\ \ y'(1) = 3e^2$

(b) $y'' - 6y' + 5y = 0,$ $\quad y(0) = 3,\ \ y'(0) = 11$

(c) $y'' - 6y' + 9y = 0,$ $\quad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 5$

(d) $y'' + 4y' + 5y = 0,$ $\quad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0$

(e) $y'' + 4y' + 2y = 0,$ $\quad y(0) = -1,\ \ y'(0) = 2 + 3\sqrt{2}$

(f) $y'' + 8y' - 9y = 0,$ $\quad y(1) = 2,\ \ y'(1) = 0$

(g) $y'' + 2y' - 8y = 0,$ $\quad y(0) = 3,\ \ y'(0) = -12$

(h) $y'' + y' = 0,$ $\quad y(0) = 2,\ \ y'(0) = 1$

(i) $y'' + 2y' + y = 0,$ $\quad y(0) = 1,\ \ y'(0) = -3$

(j) $y'' - 4y' + 3y = 0,$ $\quad y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1/3$

(k) $y'' - 2y' - 2y = 0,$ $\quad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 3$

(l) $y'' - 6y' + 9y = 0,$ $\quad y(0) = 2,\ \ y'(0) = 25/3$

(m) $y'' - 4y' - 5y = 0,$ $\quad y(-1) = 3,\ \ y'(-1) = 9$

(n) $y'' - 4y' + 4y = 0,$ $\quad y(1) = 1,\ \ y'(1) = 1$

(o) $y'' - 2y' + 2y = 0,$ $\quad y(\pi) = e^{\pi},\ \ y'(\pi) = 0$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 242)

3.7 การใช้ผลเฉลยหนึ่งหาอีกผลเฉลยหนึ่งในสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น

เนื่องจากเราทราบแล้วว่าสำหรับสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองใด ๆ

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \tag{3.24}$$

ผลเฉลยทั่วไปต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยที่อิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน

ที่ผ่านมา ได้กล่าวถึงการหาผลเฉลย y_1 และ y_2 กรณีเฉพาะสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สอง**ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว**เท่านั้น แต่สำหรับกรณีสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองทั่ว ๆไป โดยปกติแล้วเป็นการยากที่จะหาผลเฉลย y_1 และ y_2 ถ้าโชคดี เราอาจจะได้ผลเฉลยหนึ่งผลเฉลยจากการ*เดาและลองแทนค่า*

ขั้นตอนวิธีที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ จะกล่าวถึงการใช้ผลเฉลยหนึ่งผลเฉลยที่ได้มาก่อน มา*ลดอันดับ*ของสมการเชิงอนุพันธ์ จากสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเป็น*สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งอย่างง่าย* ซึ่งเราสามารถแก้ได้ และผลเฉลยที่ได้จากการแก้ จะเป็นผลเฉลยอีกผลเฉลย *ที่เป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกันกับผลเฉลยแรก*

สมมติว่า เรามี y_1 ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (3.24) เนื่องจากเราต้องการผลเฉลย y_2 ที่ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันกับ y_1 ดังนั้น เราจะให้

$$y_2 = v(x)y_1,$$

$v(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว และพบว่าอนุพันธ์ของ y_2 คือ

$$y_2' = v'(x)y_1 + v(x)y_1'$$
$$y_2'' = v''(x)y_1 + 2v'(x)y_1' + v(x)y_1''$$

เนื่องจาก y_2 ผลเฉลยของสมการ (3.24)

$$a(x)\left(v''(x)y_1 + 2v'(x)y_1' + v(x)y_1''\right) + b(x)\left(v'(x)y_1 + v(x)y_1'\right) + c(x)v(x)y_1 = 0$$

จัดรูปได้เป็น

$$\left(a(x)y_1\right)v''(x) + \left(2a(x)y_1' + b(x)y_1\right)v'(x) + \underbrace{\left(a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1\right)}_{=0 \text{ เพราะว่า } y_1 \text{ เป็นผลเฉลยของ (3.24)}}v(x) = 0$$

นั่นคือเราได้สมการ

$$(a(x)y_1)\, v''(x) + \big(2a(x)y_1' + b(x)y_1\big)\, v'(x) = 0 \tag{3.25}$$

ให้ $u = v'$ ดังนั้น $\dfrac{du}{dx} = u' = v''$ และสามารถเขียนสมการ (3.25) ใหม่ได้เป็น

$$(a(x)y_1)\,\frac{du}{dx} + \big(2a(x)y_1' + b(x)y_1\big)\, u = 0$$

ซึ่งนี้เป็นสมการแยกกันได้[14] และมีผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned}
\frac{1}{u}du &= \left(-\frac{2a(x)y_1' + b(x)y_1}{a(x)y_1}\right)dx = \left(-2\frac{y_1'}{y_1} - \frac{b(x)}{a(x)}\right)dx \\
\int \frac{1}{u}du &= \int \left(-2\frac{y_1'}{y_1} - \frac{b(x)}{a(x)}\right)dx = -2\int \frac{y_1'}{y_1}dx - \int \frac{b(x)}{a(x)}dx \\
\ln u &= -2\ln y_1 - \int \frac{b(x)}{a(x)}dx \\
u &= \frac{1}{(y_1)^2}e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}
\end{aligned}$$

เมื่อ แทนค่า $u = v'$ กลับ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
v' &= \frac{1}{(y_1)^2}e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} \\
v &= \int \frac{1}{(y_1)^2}e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}dx
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $y_2 = vy_1$ ดังนั้น เราได้ผลเฉลยอีกผลเฉลยหนึ่งคือ

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2}e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}dx$$

หมายเหตุที่ละเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์หลังจากหาค่าอินทิกรัล $\int \frac{1}{u}du$ และ $\int \frac{y_1'}{y_1}dx$ และละเครื่องหมายค่าคงตัวของการอินทิเกรต เพราะว่าเราต้องการแค่อีก*หนึ่งผลเฉลยที่ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันกับผลเฉลย* y_1 เท่านั้น ซึ่งในการหาผลเฉลยทั่วไป $y = c_1y_1 + c_2y_2$ จะปรากฏค่าคงตัวใด ๆ และโดยทฤษฎีบท 3.3 แสดงให้เราเห็นแล้วว่าเราจะได้ผลเฉลยทั้งหมดที่เป็นไปได้ของสมการ (3.24)

[14]ดูเรื่องสมการแยกกันได้หน้า 13

ตัวอย่าง 3.21. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2y'' + xy' - y = 0 \tag{3.26}$$

วิธีทำ จากการหาลองแทนค่า เราพบว่า

$$y_1 = x$$

เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (3.26)

สมการ (3.26) มีสัมประสิทธิ์ $a(x) = x^2$, $b(x) = x$ นั่นคือ

$$\frac{b(x)}{a(x)} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

ดังนั้นผลเฉลยอีกหนึ่งผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} dx \\ &= x \int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx \\ &= x \int \frac{1}{x^2} e^{-\ln x} dx \\ &= x \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \int \frac{1}{x^3} dx \\ &= -\frac{1}{2}(x\frac{1}{x^2}) \\ &= -\frac{1}{2x} \end{aligned}$$

ซึ่ง ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.26) คือ

$$\begin{aligned} y &= c_1y_1 + c_2y_2 \\ &= c_1x + c_2(-\frac{1}{2x}) \\ &= c_1x + c_2^*\frac{1}{x}, \end{aligned}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ $c_2^* = -c_2/2$

ตัวอย่าง 3.22. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.27}$$

เมื่อ a, b, c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ $b^2 - 4ac = 0$

วิธีทำ เราทราบแล้วว่า $y_1 = e^{\lambda x}$, เมื่อ $\lambda = -\frac{b}{2a}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (3.27)

และได้ว่าอีกผลเฉลยหนึ่งคือ

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{\int \frac{b(x)}{a(x)}dx} dx \\ &= e^{\lambda x} \int e^{-2\lambda x} e^{-\int \frac{b}{a}dx} dx \\ &= e^{\lambda x} \int e^{-2(-\frac{b}{2a})x} e^{-\frac{b}{a}x} dx \\ &= e^{\lambda x} \int e^{\frac{b}{a}x} e^{-\frac{b}{a}x} dx \\ &= e^{\lambda x} \int 1 dx \\ &= e^{\lambda x} x \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.27) คือ

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ ซึ่งสอดคล้องกับเนื้อหาเรื่อง **3.6.2 กรณีผลเฉลยของรากของสมการแคแรกเทอริสติก เป็นจำนวนจริงที่เหมือนกัน** หน้า 86

แบบฝึกหัด

จงใช้ผลเฉลยที่ให้มาของสมการเชิงอนุพันธ์หาอีกผลเฉลยหนึ่งของสมการ รวมทั้งหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นด้วย

1. $y'' + 2y' - 15y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = e^{3x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = e^{x}$
3. $x^2y'' - 2xy' - 4y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = x^{-1}$
4. $x^2y'' + 6xy' + 6y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = x^{-2}$
5. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = x^{2}$
6. $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = x$
7. $x^2y'' + 3xy' + y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = x^{-1}$
8. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = x$
9. $xy'' - y' + 4x^3y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = \sin(x^2)$
10. $(x-1)y'' - xy' + y = 0,\ x > 1,$ $\qquad y_1(x) = e^{x}$
11. $xy'' - (x+1)y' + y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = e^{x}$
12. $x^2y'' - (x - 0.1875)y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = x^{1/4}e^{2\sqrt{x}}$
13. $xy'' - (1-2x)y' + (x-1)y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = e^{x}$
14. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0.25)y = 0,\ x > 0,$ $\qquad y_1(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 243)

3.8 สมการไม่เอกพันธุ์

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษา การหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{3.28}$$

เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันของ x และ $r(x) \neq 0$

ในการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.28) เราจำเป็นต้องใช้**สมการเอกพันธุ์**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{3.29}$$

ช่วยในการหาผลเฉลย เราเรียกสมการ (3.29) ว่า*สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง(related homogeneous equation) กับสมการไม่เอกพันธุ์* (3.28) สมมติว่าเรามี y_p เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (3.28) นั่นคือ

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = r(x)$$

ให้ y_{p_2} เป็นผลเฉลยใด ๆ ของสมการ (3.28) ดังนั้น

$$y_{p_2}'' + p(x)y_{p_2}' + q(x)y_{p_2} = r(x)$$

เช่นกัน และพบว่า

$$\begin{aligned}
& (y_{p_2} - y_p)'' + p(x)(y_{p_2} - y_p)' + q(x)(y_{p_2} - y_p) \\
= \; & \big(y_{p_2}'' + p(x)y_{p_2}' + q(x)y_{p_2}\big) - \big(y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p\big) \\
= \; & r(x) - r(x) \\
= \; & 0
\end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า $y_{p_2} - y_p$ เป็น*ผลเฉลยทั่วไป*ของสมการเอกพันธุ์ (3.29)

ให้ y_h เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ (3.29) ดังนั้น $y_h = y_{p_2} - y_p$ และได้ว่าผลเฉลยใด ๆของสมการ (3.28) ต้องอยู่ในรูป $y_{p_2} = y_h + y_p$ หรือกล่าวได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.28) คือ

$$y = y_h + y_p$$

ซึ่งเราสามารถตรวจสอบความถูกต้องได้โดย แทนค่า $y = y_h + y_p$ ลงในสมการ

$$\begin{aligned}
& (y_h + y_p)'' + p(x)(y_h + y_p)' + q(x)(y_h + y_p) \\
= \;& \left(y_h'' + p(x)y_h' + q(x)y_h\right) + \left(y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p\right) \\
= \;& 0 + r(x) \\
= \;& r(x)
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 3.4. *สมมติให้ y_p เป็น**ผลเฉลยเฉพาะ**ผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.28) ดังนั้น**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการ (3.28) คือ*

$$y = y_h + y_p$$

เมื่อ y_h เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ (3.29) ที่เกี่ยวข้องกับสมการไม่เอกพันธุ์ (3.28)

จากตรงนี้ทำให้เราได้ว่า

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง
2. หาผลเฉลยเฉพาะ y_p ผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์
3. ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = y_h + y_p$$

ตัวอย่าง 3.23. พิจารณาสมการ

$$y'' + 3y' + 2y = e^x$$

ดังนั้นสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

ซึ่งสมการเอกพันธุ์นี้ มีสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0$$

เนื่องจากผลเฉลยของสมการแคแรกเทอริสติกคือ $\lambda_1 = -1$ และ $\lambda_2 = -2$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ

$$y_h = c_1e^{-x} + c_2e^{x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

และเราพบว่า $y_p = \dfrac{e^x}{6}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์

$$\begin{aligned}\left(\frac{e^x}{6}\right)'' + 3\left(\frac{e^x}{6}\right)' + 2\frac{e^x}{6} &= \frac{e^x}{6} + \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{3} \\ &= e^x\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = h_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + \frac{e^x}{6}$$

ในเนื้อหาที่ผ่านมา เราทราบวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์แล้ว แต่ในการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ เราจำเป็นต้องหาผลเฉลยเฉพาะให้ได้ก่อน หัวข้อที่จะกล่าวถัดไป จะแสดงวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ ซึ่งจะกล่าวถึง 2 วิธีได้แก่

1. ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์
2. การแปรผันของตัวแปรเสริม

3.8.1 ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

ก่อนจะกล่าวถึงรายละเอียดระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์จะให้ผู้อ่านได้พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้ก่อน

ตัวอย่าง 3.24. พิจารณาสมการ

$$y'' + 4y = 2e^{3x} \tag{3.30}$$

ดังนั้นสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ

$$y'' + 4y = 0$$

ซึ่งสมการเอกพันธุ์นี้ มีสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^2 + 4 = 0$$
$$\lambda^2 = -4$$

เนื่องจากผลเฉลยของสมการแคแรกเทอริสติกคือ $\lambda = \pm 2i$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ

$$y_h = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x),$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ในการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p เราจะพิจารณาทางขวาของสมการ (3.30) ก่อน เนื่องจากฟังก์ชันที่ปรากฏอยู่ทางด้านขวามือของสมการอยู่ในรูป $r(x) = 2e^{3x}$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ทางผลเฉลยเฉพาะมีรูปแบบที่คล้าย ๆ กันคือ

$$y_p = Ae^{3x}$$

เมื่อ A เป็นค่าคงตัวใด ๆ (รูปแบบ y_p ไม่ได้เหมือนกับ $r(x)$ ทั้งหมด โดยมีส่วนที่แตกต่างคือ**สัมประสิทธิ์**) จากนั้นจะนำไปแทนค่าในสมการเพื่อหาค่าของสัมประสิทธิ์ A

$$y_p'' + 4y_p = (Ae^{3x})'' + 4(Ae^{3x}) = 9Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = 13Ae^{3x} = 2e^{3x},$$

ซึ่งสมการนี้จะเป็นจริงได้ ก็ต่อเมื่อ

$$13A = 2$$
$$A = \frac{2}{13}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.30) ซึ่งอยู่ในรูป $y = y_h + y_p$ คือ

$$y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{2}{13}e^{3x}$$

หมายเหตุ สังเกตจากตัวอย่าง สิ่งที่ต้องหาในการหาผลเฉลยของสมการ คือ สัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันที่สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p เป็น ดังนั้นระเบียบวิธีที่จะกล่าวถึงซึ่งจะเกี่ยวข้องกับการหาสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันที่สมมติขึ้นมาจึงเป็นเหตุให้เรียกระเบียบวิธีนี้ว่า*ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์*

ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ (method of undetermined coefficients) เป็นระเบียบวิธีที่ใช้หาผลเฉลยเฉพาะ ซึ่งใช้ได้กับกรณี**สมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว**เท่านั้น ซึ่งถ้าจะกล่าวโดยละเอียด ก็คือ วิธีการนี้ใช้ได้กับกรณีเฉพาะ

$$ay'' + by' + cy = r(x), \tag{3.31}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว และ $r(x) \neq 0$ และ $r(x)$ ต้องมีรูปแบบตามฟังก์ชันทางด้านซ้ายของตาราง 3.1 เท่านั้น

ถ้าสมการไม่เอกพันธุ์นี้ มีสัมประสิทธิ์เป็น*ตัวแปร* หรือ ฟังก์ชัน $r(x)$ *ไม่เป็น*ไปตามรูปแบบฟังก์ชันทางด้านซ้ายของตาราง 3.1 เรา**ไม่สามารถใช้ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ได้**

หมายเหตุ สังเกตได้ว่าฟังก์ชันที่อยู่ทางขวาของตาราง 3.1 ซึ่งเราจะสมมติผลเฉลยเฉพาะ y_p ให้เป็น คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูปของ *รูปแบบต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ของผลเฉลย* ของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวอันดับสอง และอันดับอื่น ๆ

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p โดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = r(x)$$

1. ตรวจสอบว่า $r(x)$ เป็นหนึ่งในรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1 หรือไม่? ถ้าใช่ จะดำเนินการหาผลเฉลยต่อ

2. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = 0$$

3. พิจารณา $r(x)$ แล้วเลือกผลเฉลย y_p ให้อยู่ในรูปทางขวาของตาราง 3.1 **แต่**

   - ถ้า y_p ไม่มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ สามารถใช้ y_p ได้เลย
   - ถ้า y_p **มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป** y_h **ของสมการเอกพันธุ์** ให้เอาค่า x คูณกับ y_p ที่เลือกมา
   - ถ้า y_p ใหม่ ที่ได้จากการคูณด้วย x ยัง**มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป** y_h **ของสมการเอกพันธุ์** ให้ให้เอาค่า x คูณซ้ำไปเรื่อย ๆ จนกว่า y_p ใหม่ที่ได้ ไม่มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์

4. แทนค่า y_p ลงในสมการไม่เอกพันธุ์ เพื่อเทียบหาสัมประสิทธิ์

$r(x)$	ค่า y_p ที่จะกำหนดให้เป็น
$ae^{\lambda x}$	$Ae^{\lambda x}$
$a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$	$A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0$
$(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0)e^{\lambda x}$	$(A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0)e^{\lambda x}$
$a\cos(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0)\cos(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0)\sin(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$a\cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\, e^{\lambda x}$
$b\sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\, e^{\lambda x}$
$[a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$	$[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$
$\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$
$\mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$
$[\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$

เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว, A, B เป็นค่าที่จะสมมติให้เป็นค่าคงตัวใด ๆ

และ $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathcal{A}_n$ และ $\mathcal{B}_n$ เป็นพหุนามกำลัง n โดยที่

$$\begin{aligned}
\mathbf{A_n} &= a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0, \\
\mathbf{B_n} &= b_nx^n + \cdots + b_1x + b_0, \\
\mathcal{A}_n &= A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0, \\
\mathcal{B}_n &= B_nx^n + \cdots + B_1x + B_0,
\end{aligned}$$

a_i, b_i, A_i และ B_i เป็นค่าคงตัวเมื่อ $i = 0, ..., n$

ตารางที่ 3.1. ตารางระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

หมายเหตุ สำหรับกรณีที่ $r(x)$ ไม่ได้เป็นหนึ่งในรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1 **แต่อยู่ในรูปผลรวม(หรือผลต่าง)**ของฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1 เช่น ถ้า $r(x)$ อยู่ในรูปผลรวมของฟังก์ชัน $r_1(x)$ และ $r_2(x)$

$$ay'' + by' + cy = r_1(x) + r_2(x), \tag{3.32}$$

โดยที่ $r_1(x)$ และ $r_2(x)$ มีรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1

โดย*ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์* เราสามารถแยกหาค่าผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการไม่เอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = r_1(x)$$

และผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการไม่เอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = r_2(x)$$

ถ้าให้ $y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2}$ และลองแทน y ลงในสมการไม่เอกพันธุ์ (3.32) เราได้

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= a(y_h + y_{p_1} + y_{p_2})'' + b(y_h + y_{p_1} + y_{p_2})' + c(y_h + y_{p_1} + y_{p_2}) \\ &= \underbrace{(ay_h'' + by_h' + cy_h)}_{=0} + \underbrace{(ay_{p_1}'' + by_{p_1}' + cy_{p_1})}_{=r_1(x)} + \underbrace{(ay_{p_2}'' + by_{p_2}' + cy_{p_2})}_{=r_2(x)} \\ &= 0 + r_1(x) + r_2(x) \\ &= r_1(x) + r_2(x) \end{aligned}$$

แสดงว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.32) จะอยู่ในรูป[15]

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2}$$

และในทำนองเดียวกันถ้า ถ้า $r(x)$ อยู่ในรูปผลต่างของฟังก์ชัน $r_1(x)$ และ $r_2(x)$

$$ay'' + by' + cy = r_1(x) - r_2(x), \tag{3.33}$$

และผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.33) จะอยู่ในรูป

$$y = y_h + y_{p_1} - y_{p_2}$$

[15]ดูเรื่อง **หลักการซ้อนทับของผลเฉลย** เพิ่มเติมหน้า 156

ตัวอย่าง 3.25. จงใช้ตาราง 3.1 หารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' + 2y' - 3y = r(x), \tag{3.34}$$

เมื่อ $r(x)$ มีค่าเป็น

1. $7\cos(3x)$
2. $5e^{-3x}$
3. $x^2\cos(\pi x)$
4. $2xe^x \sin x - e^x \cos x$
5. $x^2e^x + 3xe^x$
6. $\tan x$

วิธีทำ เราพิจารณาสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องกับสมการไม่เอกพันธุ์ (3.34) คือ

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

ซึ่งมีสมการแคแรกเทอริสติกเป็น

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

ซึ่งสมการแคแรกเทอริสติกนี้มีรากได้แก่ $\lambda = 1, -3$ และได้ว่าผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์คือ

$$y_h = c_1e^x + c_2e^{-3x},$$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

1. $r(x) = 7\cos(3x)$

   นี้คือ กรณี $r(x) = a\cos(\omega x)$ โดยที่ $a = 7$ และ $\omega = 3$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ y_p มีค่าเป็น

   $$y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x)$$

2. $g(x) = 5e^{-3x}$

   นี้คือ กรณี $r(x) = ae^{\lambda x}$ โดยที่ $a = 5$ และ $\lambda = -3$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ y_p มีค่าเป็น $y_p = Ae^{-3x}$ **แต่ y_p มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ c_2e^{-3x} ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์** $y_h = c_1e^x + c_2e^{-3x}$ เราต้องคูณ y_p ด้วย x ดังนั้น เราจะสมมติ y_p ให้มีค่าเป็น

   $$y_p = Axe^{-3x}$$

3. $r(x) = x^2 \cos(\pi x)$

   นี้คือ กรณี $r(x) = (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\cos(\omega x)$ โดยที่ $n = 2$, $a_2 = 1$, $a_1 = a_0 = 0$ และ $\omega = \pi$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = (A_2 x^2 + A_1 x + A_0)\cos(\pi x) + (B_2 x^2 + B_1 x + B_0)\sin(\pi x)$$

4. $r(x) = 2xe^x \sin x - e^x \cos x$

   เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น $r(x) = [2x \sin x - \cos x]\, e^x$ นี้คือ กรณี

$$r(x) = [\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$$

   โดยที่ $n = 1, \mathbf{A_n}(x) = 1 \cdot x + 0, \mathbf{B_n}(x) = 0 \cdot x + 1, \omega = 1$ และ $\lambda = 1$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = [(A_1 x + A_0)\cos x + (B_1 x + B_0)\sin x]\, e^x$$

5. $r(x) = x^2 e^x + 3xe^x$

   เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น $r(x) = (x^2 + 3x)e^x$ ซึ่งนี้คือกรณี

$$r(x) = (a_2 x^2 + a_1 x + a_0)e^x$$

   โดยมี $a_2 = 1, a_1 = 3, a_0 = 0$ และ $\lambda = 1$ เราจะสมมติให้ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = (A_2 x^2 + A_1 x + A_0)e^x$$

   แต่ y_p มีพจน์ $A_0 e^x$ ซึ่งมีรูปแบบซ้ำกับพจน์ $c_1 e^x$ ซึ่งปรากฏในผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ $y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$ ดังนั้นเราต้องคูณ y_p ด้วย x และสมมติ y_p ให้มีค่าเป็น

$$y_p = x(A_2 x^2 + A_1 x + A_0)e^x = (A_2 x^3 + A_1 x^2 + A_0 x)e^x$$

6. $r(x) = \tan x$

   ในกรณีนี้ $r(x)$ ไม่ได้มีรูปแบบที่ปรากฏอยู่ทางซ้ายมือของตาราง 3.1 *เราไม่สามารถใช้ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ได้*

ตัวอย่าง 3.26. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{-5x}$$

วิธีทำ เราหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

ได้คือ $y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เมื่อพิจารณา $r(x) = 4e^{-5x}$ โดยตาราง 3.1 เราสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = Ae^{-5x}$$

เมื่อแทนค่าในสมการ ได้ว่า

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 25Ae^{-5x} + 15Ae^{-5x} + 2Ae^{-5} = 42Ae^{-5x}$$

เราได้ว่า

$$42Ae^{-5x} = 4e^{-5x}$$

$$42A = 4$$

$$A = \tfrac{2}{21}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{2}{21}e^{-5x}$$

ตัวอย่าง 3.27. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 2y' + y = 5e^x$$

วิธีทำ เราหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y'' - 2y' + y = 0$$

ได้คือ $y_h = c_1e^x + c_2xe^x$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เมื่อพิจารณา $r(x) = 5e^x$ โดยตาราง 3.1 เราสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = Ae^x$$

แต่เนื่องจาก y_p มีพจน์ซ้ำกับพจน์ c_1e^x ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ดังนั้น เราต้องคูณ y_p ด้วย x และได้รูปแบบผลเฉลยใหม่เป็น

$$y_p = Axe^x$$

แต่ y_p ที่ได้ใหม่ ก็ยังมีรูปแบบซ้ำกับพจน์ c_2xe^x ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ดังนั้น เราต้องคูณ y_p ด้วย x ซ้ำอีกครั้งหนึ่งได้รูปแบบผลเฉลยใหม่เป็น

$$y_p = Ax^2e^x$$

เมื่อแทนค่าในสมการ ได้ว่า

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' + y_p &= (Ax^2e^x)'' - 2(Ax^2e^x)' + Ax^2e^x \\ &= A\left[(2e^x + 4xe^x + x^2e^x) - 2(2xe^x + x^2e^x) + x^2e^x\right] \\ &= Ae^x\left[2 + 4x + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2\right] \\ &= 2Ae^x \end{aligned}$$

เราได้ว่า

$$2Ae^x = 5e^x$$

$$2A = 5$$

$$A = \tfrac{5}{2}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{5}{2}x^2e^x$$

ตัวอย่าง 3.28. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + 2y' = 2x + 5,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

วิธีทำ เราหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง $y'' + 2y' = 0$ ได้โดยพิจารณาสมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการคือ $\lambda = 0, -2$ และ ผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์คือ

$$y_h = c_1e^0 + c_2e^{-2x} = c_1 + c_2e^{-2x}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เมื่อพิจารณา $r(x) = 2x + 5$ โดยตาราง 3.1 เราสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = A_1 x + A_0$$

แต่เนื่องจาก y_p มีพจน์ A_0 ซ้ำกับพจน์ c_1 ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ดังนั้น เราต้องคูณ y_p ด้วย x และได้รูปแบบผลเฉลยใหม่เป็น

$$y_p = x(A_1 x + A_0) = A_1 x^2 + A_0 x$$

เมื่อแทนค่าในสมการ ได้ว่า

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' &= 2A_1 + 2(2A_1 x + A_0) \\ &= 4A_1 x + 2(A_1 + A_0) \end{aligned}$$

เราได้ว่า

$$\begin{aligned} 4A_1 x + 2(A_1 + A_0) &= 2x + 5 \\ 4A_1 &= 2 \\ A_1 &= \frac{1}{2} \\ 2(\frac{1}{2} + A_0) &= 5 \\ A_0 &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{x^2}{2} + 2x$$

โดยเงื่อนไขค่าตั้งต้น $y(0) = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 e^0 + \frac{0}{2} + 2 \cdot 0 \\ 0 &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

และ $y'(0) = 0$

$$\begin{aligned} y' &= -2c_2e^{-2x} + x + 2 \\ y'(0) = 0 &= -2c_2e^{0} + 0 + 2 \\ -2 &= -2c_2 \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

ทำให้ได้ $c_1 = -1$ ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาคือ

$$y = e^{-2x} + \frac{x^2}{2} + 2x - 1$$

ตัวอย่าง 3.29. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' + 2y' - 3y = 3x + 1 + 5\sin x \tag{3.35}$$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.26 เราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง$y'' + 2y' - 3y = 0$ คือ $y_h = c_1e^{x} + c_2e^{-3x}$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เมื่อพิจารณา $r(x) = 3x + 1 + 5\sin x$ เราสามารถแยกคิดเป็นกรณี $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ โดยที่ $r_1(x) = 3x + 1$ และ $r_2(x) = 5\sin 5$ หรือนั่นคือ หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการ

$$y'' + 2y' - 3y = 3x + 1$$

และ หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการ

$$y'' + 2y' - 3y = 5\sin x$$

- หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการ $y'' + 2y' - 3y = 3x + 1$

  เนื่องจาก $r_1(x) = 3x + 1$ ดังนั้นเราจะสมมติให้ $y_{p_1} = A_1x + A_0$ เมื่อแทนค่าลงในสมการเราได้ว่า

  $$(A_1x + A_0)'' + 2(A_1x + A_0)' - 3(A_1x + A_0) = -3A_1x + 2A_1 - 3A_0 = 3x + 1$$

  เมื่อแก้สมการได้ $A_0 = -1$ และ $A_1 = -1$ ดังนั้น

  $$y_{p_1} = -x - 1$$

- หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการ $y'' + 2y' - 3y = 5\sin x$

  เนื่องจาก $r_2(x) = 5\sin x$ ดังนั้นเราจะสมมติให้ $y_{p_2} = A\cos x + B\sin x$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}(A\cos x + B\sin x)'' &+ 2(A\cos x + B\sin x)' - 3(A\cos x + B\sin x)\\ &= (-A + 2B - 3A)\cos x + (-B - 2A - 3B)\sin x\\ &= (-4A + 2B)\cos x + (-2A - 4B)\sin x = 5\sin x\end{aligned}$$

  ซึ่งได้ว่า

$$-4A + 2B = 0$$
$$-2A - 4B = 5$$

  เมื่อแก้สมการได้ $A = -\frac{1}{2}$ และ $B = -1$ ดังนั้น

$$y_{p_2} = -\frac{1}{2}\cos x - \sin x$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.35) คือ

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} - x - 1 - \frac{1}{2}\cos x - \sin x$$

ตัวอย่าง 3.30. จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าขอบ

$$y'' + 9y = 18x - 5e^x + 12\cos(3x),\ \ y(0) = \frac{1}{2},\ y(\frac{\pi}{6}) = \pi - \frac{e^{\pi/6}}{2} \tag{3.36}$$

วิธีทำ เราหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์ุที่เกี่ยวข้อง$y'' + 9y = 0$ ได้โดยพิจารณาสมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda^2 + 9\lambda = 0$$

ซึ่งมีรากคือ $\lambda = \pm 3i$ และเราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ คือ

$$y_h = c_1\cos(3x) + c_2\sin(3x)$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เมื่อพิจารณา $r(x) = 18x - 5e^x + 12\cos(3x)$ เราสามารถแยกคิดเป็นกรณี $r(x) = r_1(x) - r_2(x) + r_3(x)$ โดยที่$r_1(x) = 18x$, $r_2(x) = 5e^x$ และ $r_3(x) = 12\cos(3x)$ หรือนั่นคือหาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการ

$$y'' + 9y = 18x$$

หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการ

$$y'' + 9y = 5e^x$$

และ หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_3} จากสมการ

$$y'' + 9y = 12\cos(3x)$$

- หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการ $y'' + 9y = 18x$

  เนื่องจาก $r_1(x) = 18x$ ดังนั้นเราจะสมมติให้ $y_{p_1} = A_1x + A_0$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ เราได้ว่า

  $$(A_1x + A_0)'' + 9(A_1x + A_0) = 9A_1x + 9A_0 = 18x$$

  เมื่อแก้สมการได้ $A_0 = 0$ และ $A_1 = 2$ ดังนั้น

  $$y_{p_1} = 2x$$

- หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการ $y'' + 9y = 5e^x$

  เนื่องจาก $r_2(x) = 5e^x$ ดังนั้นเราจะสมมติให้ $y_{p_2} = Ae^x$ เมื่อแทนค่าลงในสมการ เราได้ว่า

  $$(Ae^x)'' + 9(Ae^x) = 10Ae^x = 5e^x$$

  ซึ่งได้ว่า $A = \frac{1}{2}$ ดังนั้น

  $$y_{p_2} = \frac{1}{2}e^x$$

- หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_3} จากสมการ $y'' + 9y = 12\cos(3x)$

  เนื่องจาก $r_3(x) = 12\cos(3x)$ ดังนั้นเราจะสมมติให้ $y_{p_3} = A\cos(3x) + B\sin(3x)$

  แต่เนื่องจาก y_{p_3} มีพจน์ $A\cos(3x)$ ซึ่งมีรูปแบบซ้ำกับพจน์ $c_1\cos(3x)$ ที่ปรากฏในผลเฉลย y_h ดังนั้น เราต้องคูณ y_{p_3} ด้วย x ได้

  $$y_{p_3} = x\left[A\cos(3x) + B\sin(3x)\right]$$

  เมื่อแทนค่าลงในสมการ เราได้ว่า

  $$\begin{aligned} & \left(x\left[A\cos(3x) + B\sin(3x)\right]\right)'' + 9\left(x\left[A\cos(3x) + B\sin(3x)\right]\right) \\ = \;& 6\left[-A\sin(3x) + B\cos(3x)\right] + (9-9)\left(x\left[A\cos(3x) + B\sin(3x)\right]\right) \\ = \;& 6\left[-A\sin(3x) + B\cos(3x)\right] \end{aligned}$$

ซึ่งได้ว่า

$$\begin{aligned} -6A\sin(3x)+6B\cos(3x) &= 12\cos(3x) \\ A=0 & \qquad B=2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $$y_{p_3}=2x\sin(3x)$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.36) คือ

$$y=y_h+y_{p_1}-y_{p_2}+y_{p_3}=c_1\cos(3x)+c_2\sin(3x)+2x-\frac{1}{2}e^x+2x\sin(3x)$$

และเมื่อพิจารณาเงื่อนไขค่าขอบที่ $x=0$

$$\begin{aligned} y(0)=\frac{1}{2} &= c_1\cos(0)+c_2\sin(0)+0-\frac{1}{2}e^0+0=c_1-\frac{1}{2} \\ c_1 &= 1 \end{aligned}$$

และที่ $x=\frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} y(\frac{\pi}{6})=\pi-\frac{e^{\pi/6}}{2} &= \cos(\frac{\pi}{2})+c_2\sin(\frac{\pi}{2})+2\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{6}}+2\frac{\pi}{6}\sin(\frac{\pi}{2}) \\ &= 0+c_2+\frac{\pi}{3}-\frac{e^{\frac{\pi}{6}}}{2}+\frac{\pi}{3} \\ c_2 &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบคือ

$$y=\cos(3x)+\frac{\pi}{3}\sin(3x)+2x-\frac{1}{2}e^x+2x\sin(3x)$$

แบบฝึกหัด

1. จงหา**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   (a) $y'' + 3y = -9$

   (b) $y'' + 2y' - y = 10$

   (c) $2y'' + y = 9e^{2x}$

   (d) $y'' - y = 3e^{-2x}$

   (e) $y'' - y' - 2y = -2x^3 - 3x^2 + 8x + 1$

   (f) $y'' - y' + 9y = 3\sin 3x$

   (g) $y'' + 4y' + 5y = e^{3x}$

   (h) $2y'' + 2y' - 4y = e^{-x}$

   (i) $y'' + 5y' + 4y = \cos x$

   (j) $y'' - 4y = 4x^2 + 4x + 6$

   (k) $y'' - 3y' + 2y = x^3$

   (l) $y'' + 2y' = 3\sin x - \cos x$

2. จงหา**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   (a) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}$

   (b) $y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$

   (c) $y'' + 2y' + 5y = 3\sin(2x)$

   (d) $y'' + 2y' = 2 + 4\sin(2x)$

   (e) $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

   (f) $y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega x) \qquad (\omega^2 \neq \omega_0^2)$

   (g) $y'' + 4y' = 4\cos(2x) + 6\cos x$

   (h) $y'' - y' = -11x + 1$

   (i) $y'' - 2y' - 3y = (3x^2 - 5)e^{-x}$

   (j) $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x$

   (k) $y'' - 4y = \cos x - \sin x$

   (l) $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$

   (m) $y'' + \omega_0^2 y = \cos(\omega_0 x)$

   (n) $y'' = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

3. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

   (a) $y'' = 6x,\ \ y(0) = 3,\ y'(0) = -1$

   (b) $y'' + y = 2e^{-x},\ \ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$

   (c) $y'' + 4y = x^2 + 3e^x,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

   (d) $y'' - 2y' + y = xe^x + 4,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

   (e) $y'' - y' - 2y = \cos x - \sin(2x),\ \ y(0) = -\frac{7}{20},\ y'(0) = \frac{1}{5}$

   (f) $y'' + y' - 12y = e^x + e^{2x} - 1,\ \ y(0) = -\frac{11}{60},\ y'(0) = -\frac{13}{30}$

   (g) $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos(2x),\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

4. จงหา**รูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ** y_p ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   (a) $y'' + 3y' = 2x^4 + x^2e^{-3x} + \sin(3x)$

   (b) $y'' + y = \sin x + x\cos x + e^x$

   (c) $y'' + y = x(1 + \sin x)$

   (d) $y'' - 5y' + 6y = e^x\cos(2x) + e^{2x}(3x + 4)\sin x$

   (e) $y'' - 4y' + 4y = 2x^2 + 4xe^{2x} + x\sin(2x)$

   (f) $y'' - y = e^{2x} + xe^{2x} + x^2e^{2x}$

   (g) $y'' - y = e^x + xe^x + x^2e^x + x^3e^{-x}$

   (h) $y'' - 4y' + 4y = x^2e^{2x} + e^{2x}$

   (i) $y'' + 5y' + 6y = \sin x - \cos(2x)$

   (j) $y'' + 3y' + 2y = e^x(x^2 + 1)\sin(2x) + 3e^{-x}\cos x + 4e^x$

   (k) $y'' + 2y' + 5y = 3xe^{-x}\cos(2x) - 2xe^{-2x}\cos x$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 244)

3.8.2 การแปรผันของตัวแปรเสริม

ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ มีขีดจำกัดในการใช้คือ

- ต้องเป็นสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น*ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว*
- ฟังก์ชัน $r(x)$ ต้องเป็นไปตามตาราง 3.1 เท่านั้น

ในหัวข้อนี้ จะนำเสนอวิธีหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ที่มีเงื่อนไขน้อยกว่า คือสามารถใช้กับสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็น*ตัวแปร* และฟังก์ชัน $r(x)$ *ไม่จำเป็นต้องมีรูปแบบตามตาราง* 3.1 เราจะเรียกวิธีการหาผลเฉลยนี้ว่า *การแปรผันของตัวแปรเสริม* (variation of parameters)

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x) \tag{3.37}$$

สมมติว่าเราทราบผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

โดย y_h อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของของผลเฉลย y_1 และ y_2

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

แนวความคิดในการหาผลเฉลยเฉพาะ เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีรูปแบบคล้ายกับผลเฉลยทั่วไป y_h แต่เปลี่ยนค่าคงตัวใด ๆ c_1 และ c_2 เป็น*ฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว* $u(x)$ และ $v(x)$ ตามลำดับ[16]

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2 \tag{3.38}$$

สำหรับการหาค่า $u(x)$ และ $v(x)$ เราจะเริ่มจาก

[16]เนื่องจากในบางครั้ง เราพิจารณาผลเฉลยทั่วไปในลักษณะของ "วงศ์ของผลเฉลย" โดยมีค่าคงตัว c_1 และ c_2 เป็นตัวแปรเสริมดังนั้นวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะนี้ ที่มีสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีรูปแบบคล้ายกับผลเฉลยทั่วไป y_h แต่เปลี่ยนค่าคงตัวใด ๆ c_1 และ c_2 ไปเป็นฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว $u(x)$ และ $v(x)$ จึงเป็นเหมือนการเปลี่ยนตัวแปรเสริมไปเป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ x ดังนั้นเราจึงให้ชื่อวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะนี้ว่า "การแปรผันของตัวแปรเสริม"

1. พิจารณาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ y_p

$$y_p' = uy_1' + u'y_1 + vy_2' + v'y_2$$

พบว่า ถ้าเราหาอนุพันธ์อันดับที่สองของ y_p ก็จะปรากฏพจน์ u'' และ v'' ซึ่งเป็นอนุพันธ์อันดับที่สองของ u และ v ตามลำดับซึ่งถ้านำ y_p, อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง และ อนุพันธ์อันดับที่สองของ y_p เข้าไปแทนในสมการไม่เอกพันธุ์ (3.37) เพื่อหาค่า u และ v ก็จะทำให้เกิดภาระงานที่ต้องหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร $u,\ u',\ u''$ และ $v,\ v',\ v''$ ดังนั้น เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหานี้เราจะเพิ่มเงื่อนไขให้

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \tag{3.39}$$

ดังนั้นทำให้ได้ว่า

$$y_p' = uy_1' + vy_2'$$

และ อนุพันธ์อันดับสองของ y_p คือ

$$y_p'' = uy_1'' + u'y_1' + vy_2'' + v'y_2'$$

2. แทนค่า y_p, y_p' และ y_p'' ลงในสมการ (3.37)

$$a_2\left(uy_1'' + u'y_1' + vy_2'' + v'y_2'\right) + a_1\left(uy_1' + vy_2'\right) + a_0\left(uy_1 + vy_2\right) = r(x)$$
$$u\underbrace{\left(a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1\right)}_{=0\text{ เพราะ } y_1 \text{ เป็นผลเฉลยทั่วไป}} + v\underbrace{\left(a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2\right)}_{=0\text{ เพราะ } y_2 \text{ เป็นผลเฉลยทั่วไป}} + a_2(u'y_1' + v'y_2') = r(x)$$

ซึ่งลดรูปของสมการได้เป็น

$$a_2(u'y_1' + v'y_2') = r(x)$$

ดังนั้นเราได้

$$u'y_1' + v'y_2' = \frac{r(x)}{a_2(x)} \tag{3.40}$$

3. ทั้งสมการ (3.39) และ (3.40) ประกอบเป็นระบบสมการ

$$\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 &= 0 \\ u'y_1' + v'y_2' &= \frac{r(x)}{a_2(x)} \end{aligned} \tag{3.41}$$

ซึ่งมีผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$u' = -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}, \qquad \text{และ} \qquad v' = \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')},$$

เมื่อ $\bar{r} = \dfrac{r(x)}{a_2(x)}$

4. หาค่า u และ v ได้โดย

$$\begin{aligned} u(x) &= \int -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx \\ v(x) &= \int \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx \end{aligned} \tag{3.42}$$

เมื่อแทนค่า u และ v ที่ได้จาก (3.42) ลงใน y_p ทำให้เราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.37) คือ

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1y_1 + c_2y_2 + u(x)y_1 + v(x)y_2, \end{aligned}$$

หมายเหตุ เราอาจจะพิจารณาระบบสมการ (3.41) ในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{r} \end{bmatrix} \tag{3.43}$$

เมื่อ $\bar{r} = \dfrac{r(x)}{a_2(x)}$

ซึ่งเราสามารถหา u' และ v' โดยหลักเกณฑ์ของคราเมอร์ (Cramer's rule)

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \bar{r}' & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2\bar{r}}{W} \qquad \text{และ} \qquad v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \bar{r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1\bar{r}}{W}, \tag{3.44}$$

เมื่อ

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_2y_1'$$

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์มีค่าเป็น

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

3. หาค่า u และ v

$$u(x) = \int -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx,$$
$$v(x) = \int \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx,$$

เมื่อ $\bar{r} = \dfrac{r(x)}{a_2(x)}$

4. แทนค่า $u(x)$ และ $v(x)$ ที่ได้ลงใน y_p

5. ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.37) คือ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + u(x)y_1 + v(x)y_2$$

ตัวอย่าง 3.31. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y = \csc x \tag{3.45}$$

วิธีทำ เราหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y'' + y = 0$$

ได้คือ $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_p = u(x)\cos x + v(x)\sin x$$

เราได้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$y_p' = -u(x)\sin(x) + u'(x)\cos x + v(x)\cos x + v'(x)\sin x$$

ซึ่งเราจะสมมติให้

$$u'(x)\cos x + v'(x)\sin x = 0 \tag{3.46}$$

และ อนุพันธ์อันดับที่สองของผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$y_p'' = -u'(x)\sin(x) - u(x)\cos(x) + v'(x)\cos x - v(x)\sin x$$

เมื่อนำ y_p และ y_p'' ไปแทนค่าในสมการ (3.45) เราได้

$$\begin{aligned} y_p'' + y_p &= (-u'\sin(x) - u\cos(x) + v'\cos x - v\sin x) + (u\cos x + v\sin x) \\ &= u(-\cos x + \cos x) + v(-\sin x + \sin x) + (-u'\sin(x) + v'\cos x) \\ &= -u'\sin(x) + v'\cos x \end{aligned}$$

ซึ่งทำให้เราได้ว่า

$$-u'\sin(x) + v'\cos x = \csc x \tag{3.47}$$

จากสมการ (3.46) และ (3.47) เราได้ระบบสมการ

$$\begin{gathered} u'\cos x + v'\sin x = 0 \\ -u'\sin(x) + v'\cos x = \csc x \end{gathered} \tag{3.48}$$

เมื่อแก้ระบบสมการ (3.48) เพื่อหาค่า u' และ v' เราได้

$$\begin{aligned} u'(\cos^2 x + \sin^2 x) &= -\sin x \csc x \\ v'(\cos^2 x + \sin^2 x) &= \cos x \csc x \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$u' = -1 \quad \text{และ} \quad v' = \cot x$$

เมื่อทำการอินทิเกรต ก็จะได้

$$
\begin{aligned}
u &= \int -1dx \\
&= -x \\
v &= \int \cot x dx \\
&= \ln|\sin x|
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.45) คือ

$$y_p = u\cos x + v\sin x = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|$$

และผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.45) คือ

$$y = y_h + y_p = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$$

ตัวอย่าง 3.32. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2y'' + xy' - y = x\ln x \qquad (x > 0) \tag{3.49}$$

วิธีทำ ในการหาผลเฉลยของสมการ (3.49) นี้ จะทำตาม*ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม*

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

   โดยตัวอย่าง 3.21 (หน้า 96) เราทราบแล้วว่าผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_h = c_1x + \frac{c_2}{x},$$

   เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์มีค่าเป็น

$$y_p = u(x)x + \frac{v(x)}{x}$$

3. ในที่นี้ เราพบว่า

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x \\
y_1' &= 1 \\
y_2 &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\
y_2' &= -x^{-2} \\
r(x) &= x\ln x \\
\bar{r} &= \frac{r(x)}{a_2(x)} = \frac{x\ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x} \\
W &= y_1y_2' - y_2y_1' = x(-x^{-2}) - x^{-1}\cdot 1 = -2x^{-1}
\end{aligned}
$$

และมีระบบสมการสำหรับหาค่า $u'(x)$ และ $v'(x)$ คือ

$$
\begin{aligned}
u'x + v'x^{-1} &= 0 \\
u' - v'x^{-2} &= \frac{\ln x}{x}
\end{aligned}
$$

หาค่า $u(x)$ และ $v(x)$ ได้คือ

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int -\frac{y_2\bar{r}}{W}dx \\
&= \int -\frac{x^{-1}\left[(\ln x)/x\right]}{-2x^{-1}}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\ln x}{x}dx \\
&= \frac{(\ln x)^2}{4} \\
v(x) &= \int \frac{y_1\bar{r}}{W}dx \\
&= \int \frac{x\left[(\ln x)/x\right]}{-2x^{-1}}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int x\ln x dx \\
\text{(โดยการอินทิเกรตทีละส่วน)} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right) \\
&= \frac{x^2}{8}\left(1 - 2\ln x\right)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_p = u(x)x + v(x)x^{-1} = \frac{x(\ln x)^2}{4} + \frac{x}{8}(1 - 2\ln x)$$

และผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.49) คือ

$$y = y_h + y_p = c_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{x(\ln x)^2}{4} + \frac{x}{8}(1 - 2\ln x)$$

หรือ

$$y = \tilde{c}_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{x(\ln x)^2}{4} - \frac{1}{4}x\ln x$$

เมื่อ $\tilde{c}_1 = c_1 + \frac{1}{8}$

หมายเหตุ จะพบว่าทั้งสองตัวอย่างที่แสดง ในการหาค่าอินทิกรัลของ $u(x)$ และ $v(x)$ ผู้แต่งไม่ได้ใส่ค่าคงตัวของการอินทิเกรตลงไปด้วยเหตุที่ทำเช่นนั้นเนื่องจาก เราต้องการหา*ผลเฉลยเฉพาะ*

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

เพียงหนึ่งผลเฉลยเท่านั้น ฉะนั้นขอให้ได้ค่า $u(x)$ และ $v(x)$ *เพียงค่าเดียว* ก็เพียงพอสำหรับการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p แล้ว

ตัวอย่าง 3.33. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y = \csc x + 3x - 1 \tag{3.50}$$

วิธีทำ ในการหาผลเฉลยของสมการ (3.50) นี้ เราจะแยกหาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการ

$$y'' + y = \csc x$$

และ หาผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการ

$$y'' + y = 3x - 1$$

จากตัวอย่าง 3.31 เราได้ผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y_h = c_1\cos x + c_2\sin x$$

และสำหรับผลเฉลย y_{p_1} เราทราบจากตัวอย่าง 3.31 แล้วว่า

$$y_{p_1} = -x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$$

สำหรับการหา y_{p_2} เราจะใช้ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ในการหา (ดูระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ หน้า 101)

โดยตาราง 3.1 เราจะสมมติให้ $y_{p_2} = Ax + B$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} y''_{p_2} + y_{p_2} &= (Ax+B)'' + (Ax+B) \\ &= Ax + B = 3x - 1 \end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ทำให้ได้ $A = 3, B = -1$ และ $y_{p_2} = 3x - 1$

ได้ว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ 3.50 คือ

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = c_1 \cos x + c_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln|\sin x| + 3x - 1$$

แบบฝึกหัด

1. จงหา**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้โดยใช้ทั้งวิธี *เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์* และ *การแปรผันของตัวแปรเสริม*

   (a) $y'' + 3y = -9$
   (b) $y'' + 2y' - y = 10$
   (c) $2y'' + y = 9e^{2x}$
   (d) $y'' - y = 3e^{-2x}$
   (e) $y'' - y' - 2y = -2x^3 - 3x^2 + 8x + 1$
   (f) $y'' - y' + 9y = 3\sin 3x$
   (g) $y'' + 4y' + 5y = e^{3x}$
   (h) $2y'' + 2y' - 4y = e^{-x}$
   (i) $y'' + 5y' + 4y = \cos x$
   (j) $y'' - 4y = 4x^2 + 4x + 6$
   (k) $y'' - 3y' + 2y = x^3$
   (l) $y'' + 2y' = 3\sin x - \cos x$

2. จงหา**ผลเฉลยทั่วไป**ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(a) $y'' + y = \tan x$

(b) $y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}$

(c) $y'' + 9y = 9\sec^2(3x)$

(d) $y'' + 4y = 3\csc(2x)$

(e) $y'' + 4y = \tan(2x)$

(f) $4y'' + y = 2\sec(x/2)$

(g) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$

(h) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1+x^2}$

(i) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$

(j) $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}\sec(2x)$

(k) $2y'' + 3y' + y = e^{-3x}$

(l) $y'' - 3y' + 2y = (1 + e^{-x})^{-1}$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 247)

3.8.3 สรุป

ในส่วนนี้ได้นำเสนอการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้นสองวิธีได้แก่

- ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์
- การแปรผันของตัวแปรเสริม

ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธ์ เป็นวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p ซึ่งมีรูปแบบตามตาราง 3.1 โดยรูปแบบของผลเฉลย y_p จะพิจารณาตามฟังก์ชัน $r(x)$

สัมประสิทธิ์ของผลเฉลย y_p หาได้โดยการเทียบสัมประสิทธ์ที่เกิดจากการคำนวณ y_p และอนุพันธ์ของ y_p ซึ่งปรากฏอยู่ในสมการไม่เอกพันธุ์

$$ay_p'' + by_p' + cy_p = r(x)$$

กับฟังก์ชัน $r(x)$ ทางขวามือของสมการไม่เอกพันธุ์

แต่วิธีนี้มีขีดจำกัดในการใช้คือ

- ต้องเป็นสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น*ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว*
- ฟังก์ชัน $r(x)$ ต้องเป็นไปตามตาราง 3.1 (หน้า 104) เท่านั้น

ส่วนวิธีการแปรผันของตัวแปรเสริมสามารถใช้ได้กับทั้งสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0y = r(x)$$

รวมทั้งค่า $r(x)$ ไม่จำเป็นจะต้องเป็นไปตามตาราง 3.1

การหาผลเฉลย y_p ในวิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม จะเริ่มด้วยการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2$$

จากนั้นจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีค่าเป็น

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

และเราคำนวณหาค่า $u(x)$ และ $v(x)$ ได้โดย

$$\begin{aligned} u(x) &= \int -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx, \\ v(x) &= \int \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx, \end{aligned}$$

เมื่อ $\bar{r} = \dfrac{r(x)}{a_2(x)}$

และผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + u(x)y_1 + v(x)y_2$$

3.9 สมการโคชี-ออยเลอร์

ในส่วนนี้จะนำเสนอการหาผลเฉลยของสมการรูปแบบหนึ่ง ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นที่ไม่ได้มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว แต่เราสามารถแปลงสมการนี้ให้อยู่ในรูปสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวได้

บทนิยาม 3.3 (สมการโคชี-ออยเลอร์). เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่สองซึ่งอยู่ในรูป

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = h(x), \tag{3.51}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ $a \neq 0$, ว่า*สมการโคชี-ออยเลอร์* (Cauchy-Euler equation)

ตัวอย่าง 3.34.

- $3x^2y'' - 2xy' + 7y = \sin x$ **เป็น**สมการโคชี-ออยเลอร์

  โดยมี $a = 3, b = -2, c = 7$ และ $h(x) = \sin x$

- $2y'' - 3xy' + 11y = 3x - 1$ **ไม่เป็น**สมการโคชี-ออยเลอร์

  เพราะสัมประสิทธิ์หน้า y'' เป็น 2 **ไม่ได้**อยู่ในรูป ax^2

- $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 5x^2,\ x > 0$ **เป็น**สมการโคชี-ออยเลอร์

  โดยมี $a = 1, b = 0, c = -2$ และ $h(x) = 5x^2$

- $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = \ln x,\ x > 0$ **เป็น**สมการโคชี-ออยเลอร์

  โดยมี $a = 2, b = 2, c = 0$ และ $h(x) = \ln x$

- $2x^2y'' + 2y' + y = \ln x,\ x > 0$ **ไม่เป็น**สมการโคชี-ออยเลอร์

  เพราะสัมประสิทธิ์หน้า y' เป็น 2 **ไม่ได้**อยู่ในรูป bx

- $3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 11x\frac{dy}{dx} - 3y = 0,\ x > 0$ **เป็น**สมการโคชี-ออยเลอร์

  โดยมี $a = 3, b = 11, c = -3$ และ $h(x) = 0$

เราเรียกสมการโคชี-ออยเลอร์ที่ $h(x) \equiv 0$ ว่า*สมการโคชี-ออยเลอร์ชนิดเอกพันธุ์* (homogeneous Cauchy-Euler equation)

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการโคชี-ออยเลอร์

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = h(x) \tag{3.52}$$

1. ทำการเปลี่ยนตัวแปร โดยให้ $x = e^t$ ซึ่งจะทำให้สมการ (3.52) เป็นสมการใหม่ ซึ่งขึ้นกับตัวแปรอิสระ t และจากการสมมติตัวแปรแบบนี้ทำให้$x > 0$

2. เมื่อหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับตัวแปร t โดย**กฎลูกโซ่** ทำให้ได้

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t = e^t\frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx}$$

นั่นคือ

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \tag{3.53}$$

และ

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}\right) \\
&= \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
&= \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} \\
&= \frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dx^2}e^t \\
&= \frac{dy}{dt} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}
\end{aligned}$$

และได้ว่า

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \tag{3.54}$$

3. แทนค่า $x\frac{dy}{dx}$ และ $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$ ลงในสมการ (3.52) ทำให้ได้

$$a(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + b\frac{dy}{dt} + cy = h(x), \qquad x > 0$$

และสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy = h(e^t) \tag{3.55}$$

ซึ่งสมการนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

4. หาผลเฉลยของสมการ (3.55) โดยใช้วิธีที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้แล้ว ซึ่งจะได้ผลเฉลยรูปของฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ t

$$y = \mathcal{Y}(t)$$

5. เขียนผลเฉลยให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x ได้โดยให้ $t = \ln x$

$$y = y(x) = \mathcal{Y}(\ln x)$$

ตัวอย่าง 3.35. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$3x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 11x\frac{dy}{dx} - 3y = 0,\ x > 0 \tag{3.56}$$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 3.34 เราทราบแล้วว่าสมการนี้เป็นสมการโคชี-ออยเลอร์ที่มี$a = 3$, $b = 11$, $c = -3$ และ $h(x) = 0$ โดยนั้นโดยการเปลี่ยนตัวแปร $x = e^t$ ทำให้เราแปลงสมการ (3.56) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$3\frac{d^2y}{dt^2} + (11-3)\frac{dy}{dt} + (-3)y = 0$$

เมื่อจัดรูปสมการ ทำให้ได้

$$3\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} - 3y = 0 \tag{3.57}$$

สมการแคแรกเทอริสติกของสมการ (3.57) ก็คือ

$$3\lambda^2 + 8\lambda - 3\lambda = (3\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0$$

เนื่องจากรากของสมการแคแรกเทอริสติกคือ $1/3$ และ -3 ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.57) คือ

$$y(t) = c_1e^{t/3} + c_2e^{-3t}$$

และได้ผลเฉลยของสมการ (3.56) คือ

$$y(x) = c_1e^{(\ln x)/3} + c_2e^{-3\ln x} = c_1x^{1/3} + c_2x^{-3}, \qquad \text{เมื่อ } x > 0$$

ตัวอย่าง 3.36. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{4}{x^5},\ x > 0 \tag{3.58}$$

วิธีทำ สมการ (3.58) เป็นสมการโคชี-ออยเลอร์ที่มี $a = 1, b = -2, c = 2$ และ $h(x) = \dfrac{4}{x^5}$

ให้ $x = e^t$ เราสามารถแปลงสมการ (3.58) เป็นสมการเชิงเส้นได้เป็น

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (-2-1)\frac{dy}{dt} + 2y = \frac{4}{(e^t)^5}$$

หรือจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4e^{-5t} \tag{3.59}$$

โดยการเปรียบเทียบกับตัวอย่าง 3.26 (หน้า 108) พบว่า สมการ (3.59) มีผลเฉลยคือ

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{2}{21}e^{-5t}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการ (3.58) คือ

$$y(x) = c_1e^{\ln x} + c_2e^{2\ln x} + \frac{2}{21}e^{-5\ln x} = c_1x + c_2x^2 + \frac{2}{21x^5}, \qquad \text{เมื่อ } x > 0$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ เมื่อสมมติให้ $x > 0$

(a) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

(b) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$

(c) $4x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$

(d) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

(e) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$

(f) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3x\frac{dy}{dx} + 13y = 0$

(g) $3x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

(h) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 9y = 0$

(i) $9x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$

(j) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + 10y = 0$

(k) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 6y = 4x - 6$

(l) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + 8y = 2x^3$

(m) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = 4\ln x$

(n) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 4y = 2x\ln x$

(o) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 4\sin(\ln x)$

(p) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + 9y = \cos(3\ln x)$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้ สำหรับปัญหาทุกข้อ จะสมมติให้ $x > 0$

(a) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 10y = 0,$ $\quad y(1) = 5, \quad y'(1) = 4$

(b) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 6y = 0,$ $\quad y(2) = 0, \quad y'(2) = 4$

(c) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y = 0,$ $\quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -5$

(d) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = 4x - 8,$ $\quad y(1) = 4, \quad y'(1) = -1$

(e) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4x\frac{dy}{dx} + 4y = 4x^2 - 6x^3,$ $\quad y(2) = 4, \quad y'(2) = -1$

(f) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 6y = 10x^2,$ $\quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -6$

(g) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} + 8y = 2x^3,$ $\quad y(2) = 0, \quad y'(2) = -8$

(h) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 6y = \ln x,$ $\quad y(1) = \frac{1}{6}, \quad y'(1) = -\frac{1}{6}$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า 248)

3.10 รูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สองที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ในปีคริสต์ศักราช 1983 โซฟัส ลี (Sophus Lie) นักคณิตศาสตร์ชาวนอร์เวย์ ได้แสดงให้เห็นว่า[17] สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สอง ที่มีโดเมนเป็นจำนวนจริงนั้น เราสามารถเปลี่ยนรูปสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สองต่าง ๆ โดยที่*ผลเฉลยของสมการนั้นยังคงเดิม* ไปเป็นได้เพียงรูปต่อไปนี้เท่านั้น

- $y'' = f(y, y')$,
- $y'' = f(y')$,
- $xy'' = f(y')$,
- $y'' = Ce^{-y'}$,
- $y'' = C\,(y')^{\frac{a-2}{a-1}}\,,\ a \neq 0,\ \dfrac{1}{2},\ 2,$
- $y'' = C\left[1 + (y')^2\right]^{\frac{3}{2}} e^{\left(b\tan^{-1} y'\right)},$
- $xy'' = C\,(y')^3 - \dfrac{1}{2}y',$
- $xy'' = y' + (y')^3 + C\left[1 + (y')^2\right]^{3/2},$
- $xy'' = y' - (y')^3 + C\left[1 - (y')^2\right]^{3/2},$
- $y'' = C\left[\dfrac{1 + (y')^2 + (y - xy')^2}{1 + x^2 + y^2}\right]^{3/2},$
- $y'' = 0,$

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง และ C เป็นค่าคงตัวใด ๆ

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สอง ที่มีโดเมนเป็นจำนวนจริง

$$y'' = f(x, y, y')$$

เป็นไปได้เพียง **11 รูปแบบ** ดังที่ได้กล่าวมา

---

[17] ดูรายละเอียดเพิ่มเติมใน [10]

บทที่ 4
สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง (higher-order differential equations) และ การแก้สมการ เนื้อหาโดยหลักจะเป็นการขยายแนวความคิดจากทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3

4.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

จากบทนิยาม 1.3 (หน้า 2) เราเรียกสมการเชิงเส้น

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x), \tag{4.1}$$

ที่มีค่า $b(x) \equiv 0$ ($b(x) = 0$ ทุก ๆ ค่า x) ว่า*สมการเอกพันธุ์* และถ้า $b(x) \neq 0$ สำหรับบางค่า x เราจะเรียกสมการ (4.1) ว่า *สมการไม่เอกพันธุ์*

สำหรับทฤษฎีที่จะกล่าวในบทนี้ ซึ่งเกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงเชิงเส้น (4.1) จะถูกพิสูจน์บนเงื่อนไขที่ว่า **สัมประสิทธิ์** $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ **ของสมการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง** I **ที่พิจารณา และ** $a_n(x) \neq 0$ **สำหรับทุก ๆ** $x \in I$

เนื่องจาก $a_n(x) \neq 0$ ดังนั้นเราสามารถหารสมการ (4.1) ด้วย $a_n(x)$ ได้ และเราอาจจะเขียนสมการเชิงเส้น (4.1) ได้ในรูป

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)y = g(x), \tag{4.2}$$

หรือ

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = g(x) \tag{4.3}$$

เรามีทฤษฎีบทการมีจริงของผลเฉลย สำหรับปัญหาค่าตั้งต้นที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n ใด ๆ ดังนี้

ทฤษฎีบท 4.1 (ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย). *ถ้าฟังก์ชัน* $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ *และฟังก์ชัน* $b(x)$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง* I *ที่พิจารณาโดยที่* $a_n(x) \neq 0$ *สำหรับทุก ๆ* $x \in I$ *และมี* $x_0 \in I$

สำหรับแต่ละค่าตั้งต้น (ซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ n จำนวน, $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$) ปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$

ซึ่งมีเงื่อนไขค่าตั้งต้น

$$y(x_0) = \gamma_0,\ y'(x_0) = \gamma_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1}$$

*จะ**มีผลเฉลย**ที่นิยามบนช่วง I และ**มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว**เท่านั้น*[1]

ตัวอย่าง 4.1. สำหรับปัญหาค่าตั้งต้น

$$\begin{gathered}(x-1)y''' - 3xy'' + 6x^2y' - \sin^{-1}(x)\, y = \sqrt{x}, \\ y(x_0) = 1, \qquad y'(x_0) = 0, \qquad y''(x_0) = 7,\end{gathered} \tag{4.4}$$

เราพบว่า

- $a_3(x) = x - 1, a_2(x) = -3x, a_1(x) = 6x^2$ นิยามบนช่วง $(-\infty, \infty)$,
- $a_3(x) = x - 1$ มีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ $x = 1$
- $a_0(x) = -\sin^{-1} x$ นิยามบนช่วง $[-1, 1]$
- และ $b(x) = \sqrt{x}$ นิยามบนช่วง $[0, \infty)$

ดังนั้นฟังก์ชัน $a_0(x), a_1(x), a_2(x), a_3(x)$ และ $b(x)$ **นิยามและต่อเนื่องพร้อมกัน** บนช่วง $[0, 1]$ และ $a_3(x) \neq 0$ เมื่อ $x \neq 1$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย สำหรับ $x_0 \in [0, 1)$ ปัญหาค่าตั้งต้น (4.4) มีผลเฉลย $y(x)$ ซึ่งนิยามบน $[0, 1)$ และมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น

[1] ดูการพิสูจน์ใน [18]

ตัวอย่าง 4.2. พิจารณาปัญหาค่าตั้งต้น

$$
\begin{aligned}
&y^{(4)} + e^x y''' - xy'' + (x^3 - 2x)y' + \sin(x)\, y = 0, \\
&y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

วิธีทำ เมื่อพิจารณา $a_4(x) = 1$, $a_3(x) = e^x$, $a_2(x) = -x$, $a_1(x) = x^3 - 2x$, $a_0(x) = \sin x$ และ $b(x) = 0$ พบว่าฟังก์ชันทั้งหมดนิยามและต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$ และ $a_4(x) \neq 0$

และเราพบว่าฟังก์ชัน $y \equiv 0$ ซึ่งนิยามในช่วง $(-\infty, \infty)$ ทำให้สมการ

$$y^{(4)} + e^x y''' - xy'' + (x^3 - 2x)y' + \sin(x)\, y = 0$$

เป็นจริง อีกทั้งเป็นไปตามเงื่อนไข $y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย ปัญหาค่าตั้งต้น (4.5) มีผลเฉลยคือ $y \equiv 0$ (หรือ $y(x) = 0$ สำหรับทุกค่า x)

แนวความคิดจากตัวอย่าง 4.2 นำไปสู่กรณีพิเศษของทฤษฎีบท 4.1 เมื่อ $b(x) \equiv 0$ และ $\gamma_0 = \gamma_1 = \cdots = \gamma_{n-1} = 0$ ดังนี้

บทแทรก 4.2. *ถ้าฟังก์ชัน $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I ที่พิจารณาโดยที่ $a_n(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in I$ และมี $x_0 \in I$*

*ปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ**เอกพันธุ์**เชิงเส้นอันดับที่ n*

$$
\begin{aligned}
&a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \\
&y(x_0) = y'(x_0) = \cdots y^{(n-1)}(x_0) = 0
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

มีผลเฉลยคือ

$$y(x) = 0, \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } x \in I$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $y(x) \equiv 0$ เป็นผลเฉลยสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นเสมอ และ $y(x) \equiv 0$ นิยามทุก ๆ ค่า x ดังนั้นโดยทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย $y(x) \equiv 0$ จึงเป็นเพียงผลเฉลยเดียวของปัญหาค่าตั้งต้น (4.6) □

4.2 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสมการเอกพันธุ์

ในการศึกษา และหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสูง เราจะเริ่มต้นพิจารณาจากสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นก่อนซึ่งในส่วนนี้จะนำเสนอทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น

บทนิยาม 4.1. ให้เป็น $f_1, f_2, \ldots, f_m$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ที่นิยามบนโดเมนและโดเมนร่วมเกี่ยวเดียวกัน

เราเรียก

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m,$$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_m$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ, ว่า*ผลรวมเชิงเส้น* (linear combination) ของ $f_1, f_2, \ldots, f_m$

บทนิยาม 4.2. เราเรียกฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ทั้ง m ฟังก์ชันนี้ว่า เป็น*อิสระเชิงเส้น* (linearly independent) บนช่วง I ถ้า**ไม่ปรากฏว่ามีค่าคงตัว** $c_1, \ldots, c_m$ (โดยที่ $c_1, \ldots, c_m$ ต้องไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด) ซึ่งทำให้

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_m f_m(x) = 0$$

สำหรับทุก ๆ $x \in I$

และเรียกฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ที่ไม่มีคุณสมบัตินี้ว่า *ไม่อิสระเชิงเส้น* (linearly dependent)

หมายเหตุ ถ้าฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ไม่อิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน นั่นทำให้เราสามารถเขียนฟังก์ชันใด ฟังก์ชันหนึ่ง ให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันที่เหลือได้

และ โดยแนวทางเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ 3.2 (หน้า 76) เราสามารถแสดงได้ว่า

ทฤษฎีบท 4.3. *ถ้า $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ เป็นผลเฉลยที่นิยามบนช่วง I ของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \tag{4.7}$$

เมื่อฟังก์ชัน $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ และฟังก์ชัน $b(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง I ที่พิจารณาโดยที่ $a_n(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in I$, แล้ว

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_m y_m(x),$$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_m$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ, ก็ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น (4.7)

พิจารณาปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0, \tag{4.8}$$

$$y(x_0) = \gamma_0,\ y'(x_0) = \gamma_1, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1} \tag{4.9}$$

ถ้า $y(x) = \tilde{c}_1\tilde{y}_1(x) + \tilde{c}_2\tilde{y}_2(x) + \cdots + \tilde{c}_m\tilde{y}_m(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (4.8) และเป็นไปตามเงื่อนไขค่าตั้งต้น (4.9) ดังนั้นเราได้ว่า

$$\begin{aligned}
y(x_0) &= \tilde{c}_1\tilde{y}_1(x_0) + \tilde{c}_2\tilde{y}_2(x_0) + \cdots + \tilde{c}_m\tilde{y}_m(x_0) = \gamma_0 \\
y'(x_0) &= \tilde{c}_1\tilde{y}_1(x_0) + \tilde{c}_2\tilde{y}_2'(x_0) + \cdots + \tilde{c}_m\tilde{y}_m'(x_0) = \gamma_1 \\
&\vdots \\
y^{(n-1)}(x_0) &= \tilde{c}_1\tilde{y}_1^{(n-1)}(x_0) + \tilde{c}_2\tilde{y}_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \tilde{c}_m\tilde{y}_m^{(n-1)}(x_0) = \gamma_{n-1}
\end{aligned}$$

หรือเขียนได้ในรูปเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}_1(x_0) & \tilde{y}_2(x_0) & \cdots & \tilde{y}_m(x_0) \\ \tilde{y}_1'(x_0) & \tilde{y}_2'(x_0) & \cdots & \tilde{y}_m'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_1^{(n-1)}(x_0) & \tilde{y}_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \tilde{y}_m^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \tilde{c}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

โดยทฤษฎีบทในวิชาพีชคณิตเชิงเส้น ระบบสมการ (4.10) จะต้องสมมูลกับระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{4.11}$$

เมื่อ $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ ต่างเป็นผลรวมเชิงเส้นของ $\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x), \ldots, \tilde{y}_m(x)$

และทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น ทำให้ได้ว่าระบบสมการ (4.11) มีผลเฉลย และมีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียวและระบบสมการ (4.11) จะมีผลเฉลยเพียง

หนึ่งเดียวก็ต่อเมื่อเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

ต้องมีค่าลำดับชั้น[2] (rank) เท่ากับ n นั่นหมายถึงเวกเตอร์ต่อไปนี้มีความเป็นอิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน

$$\begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_1'(x_0) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_2(x_0) \\ y_2'(x_0) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} y_n(x_0) \\ y_n'(x_0) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x_0) \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

และเมื่อลำดับชั้นของเมทริกซ์มีค่าเท่ากับจำนวนแถวและสดมภ์ จะได้ว่าดีเทอร์มิแนนต์ (determinant) ของเมทริกซ์ (4.12) ต้องไม่มีค่าเป็นศูนย์

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.14}$$

รูปแบบของดีเทอร์มิแนนต์ของฟังก์ชันและอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีลักษณะใกล้เคียงกันกับดีเทอร์มิแนนต์ที่ปรากฏใน (4.14) มีชื่อเรียกเฉพาะดังนี้

บทนิยาม 4.3 (รอนสเกียน). ถ้าฟังก์ชัน $f_1, \dots, f_n$ หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ $n-1$ แล้ว เราเรียกฟังก์ชัน

$$W[f_1, \dots, f_n](x) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{4.15}$$

ว่า*รอนสเกียน* (Wronskian) ของ $f_1, \dots, f_n$

[2] ดูนิยามของ "ค่าลำดับชั้น" หรือ "rank" ได้ใน [5]

อาเบล[3] สามารถแสดงให้เห็นได้ว่า ถ้า $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

บนช่วง I แล้ว สำหรับ $x_0 \in I$

$$W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x) = W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}dt\right) \tag{4.16}$$

เราเรียกสมการ (4.16) นี้ว่า*สูตรของอาเบล*[4] (Abel's formula)

สูตรของอาเบลแสดงให้เห็นว่า

ถ้ามี $x_0 \in I$ *ซึ่ง* $W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x_0) = 0$ *แล้ว* $W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x) = 0$ *ทุก ๆ* $x \in I$

และในทำนองกลับกัน

ถ้ามี $x_0 \in I$ *ซึ่ง* $W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x_0) \neq 0$ *แล้ว* $W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x) \neq 0$ *ทุก ๆ* $x \in I$

จากสูตรของอาเบล และเงื่อนไข (4.14) ซึ่งก็คือ $W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x_0) \neq 0$ ทำให้ได้ว่า

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \forall x \in I \tag{4.17}$$

และทำให้ได้ว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_1'(x) \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_2(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} y_n(x) \\ y_n'(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

มีความเป็นอิสระเชิงเส้นทุก ๆ $x \in I$ และด้วยความเป็นอิสระเชิงเส้นของเวกเตอร์ต่าง ๆ ใน (4.18) ส่งผลให้

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$$

[3] นีลส์ เฮนริก อาเบล (Abel, Nields Henrik) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวนอร์เวย์ เมื่ออาเบลอายุเพียง 19 ปี เขาสามารถพิสูจน์ได้ว่าเราจะไม่สามารถหาผลเฉลยทั่วไปของสมการพหุนามลำดับขั้นที่ห้า และสมการพหุนามลำดับขั้นสูงกว่านั้นได้ งานวิจัยของอาเบลหลายชิ้น เป็นรากฐานสำคัญในหลาย ๆ สาขาของคณิตศาสตร์ และฟิสิกส์

[4] ดูการพิสูจน์*สูตรของอาเบล* ได้ใน [5]

มีความเป็นอิสระเชิงเส้น

จากข้อสังเกตที่กล่าวมา เราสามารถนำไปสรุปเป็นทฤษฎีบทได้คือ

ทฤษฎีบท 4.4. *ให้ $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วง I โดยที่ $y_1, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเอกพันธุ์เชิงเส้น*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{4.19}$$

ถ้ามีจุด x_0 ซึ่ง $x_0 \in I$ และ

$$W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x_0) \neq 0, \tag{4.20}$$

แล้ว ทุก ๆ ผลเฉลยของสมการ (4.19) ซึ่งนิยามบนช่วง I สามารถถูกเขียนได้ในรูป

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x), \tag{4.21}$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เราเรียกเซต $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข (4.20) สำหรับบางจุด $x_0 \in I$ ว่า**เซตของผลเฉลยมูลฐาน** (fundamental solution set) ของสมการ (4.19) บนช่วง I

และเรียกผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลย $y_1, \ldots, y_n$,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ, ว่า*ผลเฉลยทั่วไป* (general solution) ของสมการ 4.19

ตัวอย่าง 4.3. ถ้า $y_1(x) = x, y_2(x) = x^2$ และ $y_3(x) = x^{-1}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad x > 0 \tag{4.22}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4.22)

วิธีทำ เนื่องจาก y_1, y_2 และ y_3 เป็นผลเฉลยของสมการ (4.22) (ผู้อ่านอาจจะลองตรวจสอบซ้ำด้วยการแทนค่าลงในสมการอีกครั้ง) โดยทฤษฎีบท 4.4 เราจะพิจารณาค่ารอนสเกียน

$$W\left[y_1, y_2, y_3\right](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & y_3'''(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^{-1} \\ 1 & 2x & -x^{-2} \\ 0 & 2 & 2x^{-3} \end{vmatrix} = \frac{6}{x}$$

พบว่า $W[y_1, y_2, y_3](x) \neq 0$ ทุก ๆ $x > 0$ ดังนั้นเซต

$$\{x, x^2, x^{-1}\}$$

เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการ (4.22) และ

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^{-1}, \qquad x > 0,$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นค่าคงตัวใด ๆ, เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4.22)

และจากการสังเกตทั้งหมด ทำให้เราสามารถสรุปเป็นทฤษฎีเพิ่มเติมได้อีกคือ

ทฤษฎีบท 4.5. *ถ้า $y_1, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลย n ผลเฉลยที่นิยามบนช่วง I ของสมการ*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{4.23}$$

แล้ว ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. *$\{y_1, \ldots, y_n\}$ เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐานของ (4.23)*

2. *$y_1, \ldots, y_n$ เป็นอิสระเชิงเส้น*

3. *รอนสเกียน $W[y_1, \ldots, y_n](x) \neq 0$ ทุก ๆ ค่า $x \in I$*

แบบฝึกหัด

1. พิจารณาสมการต่อไปนี้ แล้ว**หาช่วง** I ซึ่งทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย 4.1 ยืนยันว่าจะมีผลเฉลยอยู่จริง

   (a) $y^{(4)} + 4y''' + 4y = x$

   (b) $x(x-1)y^{(4)} + e^x y''' + 4x^2 y = 0$

   (c) $(x-1)y^{(4)} + (x+1)y'' + (\tan x)y = 0$

   (d) $xy''' + (\sin x)y'' + 3y = \cos x$

   (e) $y''' + xy' + x^2y' + x^3y = \ln x$

   (f) $(x^2-4)y^{(4)} + x^2y''' + 9y = 0$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันในแต่ละข้อต่อไปนี้ **มีความเป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่** ถ้าไม่เป็น จงหาค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด ซึ่งทำให้ผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันดังกล่าวเท่ากับศูนย์

   (a) $f_1(x) = x + x^2,\ f_2(x) = x - x^2$

   (b) $f_1(x) = x + x^2,\ f_2(x) = x - x^2,\ f_3(x) = x^2$

   (c) $f_1(x) = 2x - 3,\ f_2(x) = x^2 + 1,\ f_3(x) = 2x^2 - x$

   (d) $f_1(x) = 2x - 3,\ f_2(x) = x^2 + 1,\ f_3(x) = 2x^2 - 1$

   (e) $f_1(x) = 2x - 3,\ f_2(x) = 2x^2 + 1,\ f_3(x) = 3x^2 + x$

   (f) $f_1(x) = 2x - 3,\ f_2(x) = x^2 + 1,\ f_3(x) = 2x^2 - x,\ f_4(x) = x^2 + x + 1$

   (g) $f_1(x) = 2x - 3,\ f_2(x) = x^3 + 1,\ f_3(x) = 2x^2 - x,\ f_4(x) = x^2 + x + 1$

3. จงหาตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่ให้ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ และหารอนสเกียนของผลเฉลยเหล่านั้น

   (a) $y''' + y' = 0,\quad y_1 = 1,\ y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x$

   (b) $y^{(4)} + y'' = 0,\quad y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = \cos x,\ y_4 = \sin x$

   (c) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0,\quad y_1 = e^x,\ y_2 = e^{-x},\ y_3 = e^{-2x}$

   (d) $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0,\quad y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = e^{-x},\ y_4 = xe^{-x}$

   (e) $xy''' - y'' = 0,\quad y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^3$

   (f) $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,\quad y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = 1/x$

4.3 สมการเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ในหัวข้อนี้ จะแสดงการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{4.24}$$

เมื่อ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัวซึ่งเป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a_n \neq 0$

ในการหาผลเฉลยของสมการ (4.24) เราจะขยายแนวความคิดจากการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวในหัวข้อ 3.6 (หน้า 83) ดังนี้

สมมติให้ผลเฉลยของสมการ (4.24) อยู่ในรูป

$$y = ce^{\lambda x},$$

เมื่อ λ เป็นค่าคงตัว และ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ, เมื่อแทนค่า y และอนุพันธ์ $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ลงในสมการ (4.24) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & a_n \left(c\lambda^n e^{\lambda x}\right) + a_{n-1}\left(c\lambda^{n-1} e^{\lambda x}\right) + \cdots + a_1 \left(c\lambda e^{\lambda x}\right) + a_0 \left(ce^{\lambda x}\right) \\ = \; & \left(a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0\right)\left(ce^{\lambda x}\right) \\ = \; & 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $y = ce^{\lambda x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ (4.24) ก็ต่อเมื่อ

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{4.25}$$

เราเรียกสมการ (4.25) นี้ว่า*สมการแคแรกเทอริสติก* (characteristic equation) หรือ*สมการช่วย* (auxiliary equation) ของสมการ (4.24) โดยทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต[5] สามารถเขียนสมการ (4.25) ได้ในรูป

$$a_n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

จำนวน n ตัวประกอบ, เมื่อ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน(โดยอาจจะมีบางค่าซ้ำกันก็ได้) ซึ่งเป็นผลเฉลยสมการ (4.25)

[5]ดูทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิตหน้า 63

4.3.1 กรณีรากของสมการแคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่แตกต่างกัน

ถ้ารากของสมการแคแรกเทอริสติก (4.25) ของสมการ (4.24) เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่แตกต่างกัน $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ สมการ (4.24) มีผลเฉลยจำนวน n ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น คือ

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

และมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}, \tag{4.26}$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 4.4. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0 \tag{4.27}$$

วิธีทำ สมการ (4.27) มีสมการแคแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda^4 + \lambda^3 - 7\lambda^2 - \lambda + 6 = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการคือ $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2$ และ $\lambda_4 = -3$ ดังนั้นสมการ (4.27) มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-3x},$$

เมื่อ $c_1,\ c_2,\ c_3$ และ c_4 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ตัวอย่าง 4.5. จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0, \tag{4.28}$$

$$y(0) = 6,\ y'(0) = 7,\ y''(0) = 17 \tag{4.29}$$

วิธีทำ สมการ (4.28) มีสมการแคแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = \lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการคือ $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2$ และ $\lambda_3 = 3$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$$

เมื่อ $c_1,\ c_2$ และ c_3 เป็นค่าคงตัวใด ๆและโดยเงื่อนไข (4.29) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} y(0) = 6 \quad &: \ c_1 + c_2 + c_3 = 6, \\ y'(0) = 7 \quad &: \ 2c_2 + 3c_3 = 7, \\ y''(0) = 17 \quad &: \ 4c_2 + 9c_3 = 17 \end{aligned} \tag{4.30}$$

ผลเฉลยของระบบสมการ (4.29) คือ

$$c_1 = 3, \qquad c_2 = 2, \qquad c_3 = 1$$

ดังนั้นผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นคือ

$$y(x) = 3 + 2e^{2x} + e^{3x}$$

4.3.2 กรณีรากของสมการแคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกัน

ในการหารากของสมการแคแรกเทอริสติก

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

ถ้ารากของสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด จำนวนรากของสมการจะต้องเกิดเป็นจำนวนคู่[6] ซึ่งอยู่ในรูปของคู่สังยุค $r_j \pm is_j,\ j = 1, \ldots, n/2,$ เมื่อr_j และ s_j เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$

สมการ (4.24) มีผลเฉลยจำนวน n ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น คือ

$$e^{(r_1+is_1)x},\ e^{(r_1-is_1)x},\ \ldots,\ e^{(r_{n/2}+is_{n/2})x},\ e^{(r_{n/2}-is_{n/2})x}$$

เนื่องด้วยเอกลักษณ์ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เราจึงมักพิจารณาผลเฉลย n เฉลย ซึ่งเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงที่สมมูลกับผลเฉลยข้างต้น ได้แก่

$$e^{r_1x}\cos(s_1x),\ e^{r_1x}\sin(s_1x), \ldots, e^{r_{n/2}x}\cos(s_{n/2}x),\ e^{r_{n/2}x}\sin(s_{n/2}x)$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ สมการ (4.24) อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{r_1x}\left(c_1\cos(s_1x) + c_2\sin(s_1x)\right) + e^{r_2x}\left(c_3\cos(s_2x) + c_4\sin(s_2x)\right) \\ &\quad + \cdots + e^{r_{n/2}x}\left(c_{n-1}\cos(s_{n/2}x) + c_n\sin(s_{n/2}x)\right), \end{aligned}$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

[6] สังเกตได้ว่า n ต้องเป็นจำนวนคู่เท่านั้น

ตัวอย่าง 4.6. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(6)} + 14y^{(4)} + 49y'' + 36y = 0 \tag{4.31}$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอริสติกของสมการ (4.31) คือ

$$\lambda^6 + 14\lambda^4 + 49\lambda^2 + 36 = (\lambda^2 + 9)(\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 1) = 0$$

สมการแคแรกเทอริสติกมีผลเฉลยคือ $\lambda = \pm i,\ \pm 2i,\ \pm 3i$

ดังนั้นสมการ (4.31) มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned} y(x) &= e^0 (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^0 (c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x) + e^0 (c_5 \cos 3x + c_6 \sin 3x) \\ &= c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x + c_5 \cos 3x + c_6 \sin 3x \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.7. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y^{(4)} + y'' + y = 0 \tag{4.32}$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1 \tag{4.33}$$

วิธีทำ สมการแคแรกเทอริสติกของสมการ (4.32) คือ

$$\lambda^4 + \lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0$$

เราหา λ ซึ่งทำให้ $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ ได้คือ

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{aligned}$$

และในทำนองเดียวกัน รากของสมการ $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ คือ $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

ดังนั้นสมการแคแรกเทอริสติกมีผลเฉลยคือ $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,\ \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

ดังนั้นสมการ (4.32) มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + e^{-\frac{x}{2}} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

และโดยเงื่อนไขตั้งต้น (4.33) ทำให้ได้

$$\begin{aligned} y(0)&=1 &&: c_1+c_3=1 \\ y'(0)&=1 &&: \frac{c_1}{2}+c_2-\frac{c_3}{2}+c_4=1 \\ y''(0)&=0 &&: -\frac{3}{4}c_1+c_2-\frac{3}{4}c_3-c_4=0 \\ y'''(0)&=1 &&: -\frac{11}{8}c_1-\frac{c_2}{4}+\frac{11}{8}c_3-\frac{c_4}{4}=1 \end{aligned} \tag{4.34}$$

เมื่อหาผลเฉลยของระบบสมการ (4.34) ทำให้ได้

$$c_1=0,\ c_2=\frac{9}{8},\ c_3=1,\ c_4=\frac{3}{8}$$

ดังนั้นผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นคือ

$$y(x)=\frac{9}{8}e^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{8}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

4.3.3 กรณีสมการแคแรกเทอริสติกมีรากซ้ำ

จากเนื้อหาในหัวข้อ 3.6.2 ซึ่งสมการแคแรกเทอริสติกของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

$$ay''+by'+cy=0 \tag{4.35}$$

มีรากซึ่งเป็นจำนวนจริงที่เหมือนกัน, $\lambda=-\frac{b}{2a}$, สมการ (4.35) มีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นได้แก่ $e^{\lambda x}$ และ $xe^{\lambda x}$

ด้วยการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์[7] เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า

- ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว มีสมการแคแรกเทอริสติก ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

  $$a_n(\lambda-\lambda_*)^n=0$$

  สมการเชิงอนุพันธ์นั้น จะมีผลเฉลย n ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นคือ

  $$e^{\lambda_* x},\ xe^{\lambda_* x},\dots,x^{n-1}e^{\lambda_* x}$$

  และมีผลเฉลยทั่วไปคือ

  $$y(x)=c_1e^{\lambda_* x}+c_2xe^{\lambda_* x}+\cdots+c_nx^{n-1}e^{\lambda_* x},$$

  เมื่อ $c_1,\dots,c_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

[7] ดูการพิสูจน์ได้ใน [14, 18]

- และถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว มีสมการแคแรกเทอริสติก ซึ่งมีรากคือ

$$\lambda = r + is \quad \text{และ} \lambda = r - is$$

จำนวนทั้งหมด n ราก (สมการแคแรกเทอริสอยู่ในรูป $a_n\left[\lambda^2 - 2r\lambda + (r^2+s^2)\right]^n = 0$) สมการเชิงอนุพันธ์นั้น จะมีผลเฉลย n ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นคือ

$$e^{rx}\cos sx,\ e^{rx}\sin sx,\ xe^{rx}\cos sx,\ xe^{rx}\sin sx, \ldots, x^{\frac{n}{2}-1}e^{rx}\cos sx,\ x^{\frac{n}{2}-1}e^{rx}\sin sx,$$

และมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{rx}\left(c_1\cos sx + c_2\sin sx\right) + e^{rx}\left(c_3x\cos sx + c_4x\sin sx\right) \\ &\quad + \cdots + e^{rx}\left(c_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}\cos sx + c_nx^{\frac{n}{2}-1}\sin sx\right) \\ &= e^{rx}\left(\left[c_1 + c_3x + \ldots + c_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}\right]\cos sx + \left[c_2 + c_4x + \ldots + c_nx^{\frac{n}{2}-1}\right]\sin sx\right) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.8. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(8)} + 8y^{(7)} + 28y^{(6)} + 56y^{(5)} + 70y^{(4)} + 56y''' + 28y'' + 8y' + y = 0 \tag{4.36}$$

วิธีทำ สมการ (4.36) มีสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^8 + 8\lambda^7 + 28\lambda^6 + 56\lambda^5 + 70\lambda^4 + 56\lambda^3 + 28\lambda^2 + 8\lambda + 1 = (\lambda+1)^8 = 0$$

สมการนี้มีราก คือ $\lambda = -1$ ซ้ำกัน 8 ราก ดังนั้นสมการ (4.36) มีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x} + c_4x^3e^{-x} + c_5x^4e^{-x} + c_6x^5e^{-x} + c_7x^6e^{-x} + c_8x^7e^{-x},$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_8$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่าง 4.9. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(6)} - 6y^{(5)} + 18y^{(4)} - 32y''' + 36y'' - 24y' + 8y = 0 \tag{4.37}$$

วิธีทำ สมการ (4.37) มีสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^6 - 6\lambda^5 + 18\lambda^4 - 32\lambda^3 + 36\lambda^2 - 24\lambda^6 + 8 = (\lambda^2 - 2\lambda + 2)^3 = 0$$

สมการนี้มีราก คือ $1+i$ และ $1-i$ ซ้ำกันอย่างละ 3 ราก ดังนั้นสมการ (4.37) มีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น 6 ผลเฉลย ได้แก่

$$e^x \cos x,\ e^x \sin x,\ xe^x \cos x,\ xe^x \sin x,\ x^2 e^x \cos x,\ x^2 e^x \sin x$$

และมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = e^x \left[(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cos x + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin x \right]$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_6$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

4.3.4 กรณีสมการแคแรกเทอริสติกมีรากประกอบด้วยเป็นจำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน และรากซ้ำ

กรณีนี้ เป็นกรณีทั่วไปของทั้งสามกรณีที่ได้กล่าวมาแล้ว ซึ่งเราสามารถนำวิธีหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ของกรณีทั้ง มาประยุกต์ใช้ได้คือ

ถ้าสมการแคแรกเทอริสติกมีรากได้แก่

- $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_1}$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน
- $r_1 \pm s_1 i, \ldots, r_{n_2} \pm s_{n_2} i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด
- γ_1 เป็นจำนวนจริงซึ่งมีรากซ้ำกันเป็นจำนวน δ_1 ราก, γ_2 เป็นจำนวนจริงซึ่งมีรากซ้ำกันเป็นจำนวน δ_2 ราก, $\ldots$, γ_{n_3} เป็นจำนวนจริงซึ่งมีรากซ้ำกันเป็นจำนวน δ_{n_3} ราก
- และ $c_1 \pm d_1 i, \ldots, c_{n_4} \pm d_{n_4} i$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นรากซ้ำกันจำนวน $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n_4}$ ตามลำดับ

สมการเชิงอนุพันธ์ จะมีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น คือ

- $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_{n_1} x},$
- $e^{r_1} \cos s_1 x,\ e^{r_1} \sin s_2 x, e^{r_2} \cos s_2 x,\ e^{r_2} \sin s_2 x, \ldots, e^{r_{n_2}} \cos s_{n_2} x,\ e^{r_{n_2}} \sin s_{n_2} x,$
- $e^{\gamma_1 x},\ xe^{\gamma_1 x}, \ldots,\ x^{\delta_1 - 1} e^{\gamma_1 x},\ e^{\gamma_2 x},\ xe^{\gamma_2 x}, \ldots,\ e^{\gamma_{n_3} x},\ xe^{\gamma_{n_3} x}, \ldots,\ x^{\delta_{n_3} - 1} e^{\gamma_{n_3} x},$

- $e^{c_1x}\cos d_1x,\ xe^{c_1x}\cos d_1x,\ \ldots,\ x^{\Delta_1-1}e^{c_1x}\cos d_1x,\ e^{c_1x}\sin d_1x,\ xe^{c_1x}\sin d_1x,\ \ldots,$ $x^{\Delta_1-1}e^{c_1x}\sin d_1x,\ldots,e^{c_{n_4}x}\cos d_1x, xe^{c_{n_4}x}\cos d_1x,\ldots,x^{\Delta_1-1}e^{c_{n_4}x}\cos d_1x, e^{c_{n_4}x}\sin d_1x,$ $xe^{c_{n_4}x}\sin d_1x,\ldots,x^{\Delta_1-1}e^{c_{n_4}x}\sin d_1x,$

และมีผลเฉลยทั่วไปคือ *ผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลย*ดังกล่าว

ตัวอย่าง 4.10. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = 0 \tag{4.38}$$

วิธีทำ สมการ (4.38) มีสมการแคแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda^5 - \lambda^4 - \lambda + 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)^2(\lambda^2+1) = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการคือ $\lambda = -1,\ 1$ (รากซ้ำ 2 ราก), $\pm i$

ดังนั้นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของสมการ (4.38) คือ

$$e^{-x},\ e^x,\ xe^x,\ \cos x \text{ และ } \sin x$$

และได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3xe^x + c_4\cos x + c_5\sin x,$$

เมื่อ $c_1,\ldots,c_5$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่าง 4.11. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(8)} - 32y^{(4)} + 256y = 0 \tag{4.39}$$

วิธีทำ สมการ (4.39) มีสมการแคแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda^8 - 32\lambda^4 + 256 = (\lambda^2-4)^2(\lambda^2+4)^2 = (\lambda-2)^2(\lambda+2)^2(\lambda^2+4)^2 = 0$$

ซึ่งมีรากของสมการคือ $\lambda = -2,\ 2,\ -2i,\ 2i$ ปรากฏซ้ำกัน รากละ 2 ครั้ง

ดังนั้นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นของสมการ (4.39) คือ

$$e^{-2x},\ xe^{-2x},\ e^{2x},\ xe^{2x},\ \cos 2x,\ x\cos 2x,\ \sin 2x \text{ และ } x\sin 2x$$

และได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y(x) = (c_1+c_2x)e^{-2x} + (c_3+c_4x)e^{2x} + (c_5+c_6x)\cos x + (c_7+c_8x)\sin x,$$

เมื่อ $c_1,\ldots,c_8$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

(a) $y''' - y'' - y' + y = 0$

(b) $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$

(c) $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$

(d) $y^{(4)} + y = 0$

(e) $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$

(f) $y^{(4)} - 8y' = 0$

(g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

(h) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

(i) $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$

(j) $y^{(4)} - y = 0$

(k) $y^{(4)} - y'' = 0$

(l) $18y''' + 21y'' + 14y' + 4y = 0$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

(a) $y''' + y' = 0,\qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 2$

(b) $y^{(4)} + y = 0,\qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = 0$

(c) $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0,\qquad y(1) = -1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = 0,\ y'''(1) = 0$

(d) $y''' - y'' + y' - y = 0,\qquad y(0) = 2,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = -2$

(e) $4y''' + y' + 5y = 0,\qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$

(f) $6y''' + 5y'' + y' = 0,\qquad y(0) = -2,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 0$

(g) $2y^{(4)} - y''' + 9y'' + 4y' + 4y = 0,$

$y(1) = -2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2,\ y'''(0) = 0$

4.4 สมการไม่เอกพันธุ์

4.4.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสมการไม่เอกพันธุ์

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \tag{4.40}$$

ถ้า $y_p(x)$ และ $y_{p_2}(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ (4.40) นั่นคือ

$$a_n(x)\frac{d^n y_p}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_p}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + a_0(x)y_p = b(x)$$

และ

$$a_n(x)\frac{d^n y_{p_2}}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_{p_2}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy_{p_2}}{dx} + a_0(x)y_{p_2} = b(x)$$

ให้

$$y(x) = y_{p_2}(x) - y_p(x)$$

พบว่า

$$\begin{aligned}
& a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}y + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx}y + a_0(x)y \\
= \quad & a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(y_{p_2} - y_p\right) + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx}(y_{p_2} - y_p) + a_0(x)(y_{p_2} - y_p) \\
= \quad & \left(a_n(x)\frac{d^n y_{p_2}}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_{p_2}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy_{p_2}}{dx} + a_0(x)y_{p_2}\right) \\
& -\left(a_n(x)\frac{d^n y_p}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_p}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy_p}{dx} + a_0(x)y_p\right) \\
= \quad & b(x) - b(x) = 0
\end{aligned}$$

นั่นคือ $y = y_{p_2} - y_p$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{4.41}$$

โดยทฤษฎีบท 4.4 ทำให้ได้

$$y_{p_2}(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

เมื่อ $y_1, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลยซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นของสมการเอกพันธุ์ (4.41) และ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

ดังนั้นถ้าเราพบ*ผลเฉลยเฉพาะ* $y_p(x)$ *ผลเฉลยหนึ่ง* ของสมการไม่เอกพันธุ์ (4.40) ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (4.40) จะอยู่ในรูป

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

เมื่อ $y_h(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ (4.41)

และเรียกสมการ (4.41) ว่า*สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องกับสมการไม่เอกพันธุ์ (4.40)*

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง
2. หาผลเฉลยเฉพาะ y_p ผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์
3. ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = y_h + y_p$$

ตัวอย่าง 4.12. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(4)} + 4y = 4x \tag{4.42}$$

วิธีทำ สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องกับสมการ (4.42) คือ

$$y^{(4)} + 4y = 0 \tag{4.43}$$

ซึ่งมีสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^4 + 4 = 0$$

สมการแคแรกเทอริสติกมีผลเฉลยคือ $\lambda = 1 \pm i, -1 \pm i$ ดังนั้นสมการเอกพันธุ์ (4.43) มีผลเฉลยคือ

$$y_h(x) = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x} (c_3 \cos x + c_4 \sin x)$$

และพบว่า $y_p = x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์ (4.42) ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y(x) = y_h + y_p = e^x (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x} (c_3 \cos x + c_4 \sin x) + x$$

เรามีอีกทฤษฎีบทหนึ่งที่สามารถนำมาช่วยหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธุ์ได้ นั่นคือ

ทฤษฎีบท 4.6 (หลักการซ้อนทับของผลเฉลย (superposition principle)). *ถ้า y_{p_1} เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธุ์*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b_1(x) \tag{4.44}$$

และ y_{p_2} เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เอกพันธุ์

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b_2(x) \tag{4.45}$$

แล้ว $c_1y_{p_1} + c_2y_{p_2}$ ***เป็นผลเฉลยของสมการ***

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = c_1b_1(x) + c_2b_2(x), \tag{4.46}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัว

พิสูจน์ เนื่องจาก y_{p_1} และ y_{p_2} เป็นผลเฉลยของสมการ (4.44) และ (4.45) ตามลำดับดังนั้น

$$\begin{aligned}
& a_n(x)\frac{d^n}{dx^n}\left[c_1y_{p_1} + c_2y_{p_2}\right] + \cdots + a_0(x)\left[c_1y_{p_1} + c_2y_{p_2}\right] \\
= \;& c_1a_n(x)\frac{d^ny_{p_1}}{dx^n} + c_2a_n(x)\frac{d^ny_{p_2}}{dx^n} + \cdots + c_1a_0(x)y_{p_1} + c_2a_0(x)y_{p_2} \\
= \;& c_1\left[a_n(x)\frac{d^ny_{p_1}}{dx^n} + \cdots + a_0(x)y_{p_1}\right] + c_2\left[a_n(x)\frac{d^ny_{p_2}}{dx^n} + \cdots + a_0(x)y_{p_2}\right] \\
= \;& c_1b_1(x) + c_2b_2(x)
\end{aligned}$$

นี้แสดงให้เห็นว่า $c_1y_{p_1} + c_2y_{p_2}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = c_1b_1(x) + c_2b_2(x),$$

สำหรับแต่ละค่าคงตัว c_1 และ c_2 □

ตัวอย่าง 4.13. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(4)} + 4y = 4x + 5\sin x \tag{4.47}$$

วิธีทำ จากตัวอย่าง (4.13) เราทราบแล้วว่า ผลเฉลยเฉพาะผลเฉลยหนึ่งของสมการ

$$y^{(4)} + 4y = 4x$$

คือ $y_{p_1} = x$ เมื่อพิจารณาสมการ

$$y^{(4)} + 4y = \sin x \tag{4.48}$$

พบว่า $y_{p_2} = \dfrac{\sin x}{5}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะผลเฉลยหนึ่งของสมการ (4.48) ดังนั้น โดย*หลักการซ้อนทับของผลเฉลย*ทำให้ได้ว่า

$$y_p = y_{p_1} + 5y_{p_2} = x + 5\frac{\sin x}{5} = x + \sin x$$

เป็นผลเฉลยของสมการ

$$y^{(4)} + 4y = x + 5\sin x$$

เนื่องจากทราบแล้วว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องกับสมการ (4.47) หรือ

$$y^{(4)} + 4y = 0$$

คือ $y_h(x) = e^x\left(c_1\cos x + c_2\sin x\right) + e^{-x}\left(c_3\cos x + c_4\sin x\right)$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4.47) คือ

$$y = e^x\left(c_1\cos x + c_2\sin x\right) + e^{-x}\left(c_3\cos x + c_4\sin x\right) + x + \sin x$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ต่อไปนี้ เมื่อกำหนดผลเฉลยเฉพาะ y_p มาให้ และหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นตามเงื่อนไขตั้งต้นที่กำหนด

   (a) $y''' + y'' + 3y' - 5y = 2 + 6x - 5x^2$;

   $y_p = x^2$; $\quad y(0) = -1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -3$

   (b) $y^{(4)} + 4y = 5\cos x$;

   $y_p = \cos x$; $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1,\ y'''(0) = -2$

   (c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x}$;

   $y_p = \dfrac{e^{4x}}{30}$; $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

   (d) $y''' - y'' + y' - y = e^{-x}\sin x$;

   $y_p = -\dfrac{e^{-x}\cos x}{5}$; $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$

   (e) $y''' + y' = \sec x$;

   $y_p = \ln(\sec x + \tan x) - x\cos x + (\sin x)\ln(\cos x)$;

   $y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -2$

   (f) $xy''' - y'' = -2$;

   $y_p = x^2$; $\quad y(1) = 2,\ y'(1) = -1,\ y''(1) = -4$

   เซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{1, x, x^3\}$

   (g) $x^3y''' + xy' - y = 3 - \ln x$;

   $y_p = \ln x$; $\quad y(1) = 3,\ y'(1) = 3,\ y''(1) = 0$

   เซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{x, x\ln x, x(\ln x)^2\}$

ทฤษฎีที่ได้กล่าวมา แสดงให้เห็นว่า ถ้าเราสามารถหาผลเฉลยเฉพาะ**ผลเฉลยหนึ่ง** ของสมการไม่เอกพันธุ์ได้ เราก็จะสามารถหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ได้

สำหรับวิธีหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับสูงที่จะกล่าวต่อนี้ จะเป็นการขยายแนวความคิด ของวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์อันดับที่สอง นั่นก็คือ **ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์** และ **การแปรผันของตัวแปรเสริม**

4.4.2 ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

พิจารณาสมการ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r(x) \tag{4.49}$$

ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงจะมีรูปแบบเดียวกันกับระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง(หัวข้อ 3.8.1 หน้า 101) นั่นคือ

- ระเบียบวิธีนี้ใช้ได้เฉพาะกรณีเป็นสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์**ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว**เท่านั้น ($a_n, \ldots, a_0$ เป็นค่าคงตัวทั้งหมด)
- $r(x)$ ต้องเป็นไปตามตาราง 4.1 เท่านั้น

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง โดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

1. ตรวจสอบว่า $r(x)$ เป็นหนึ่งในรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 4.1 หรือไม่? ถ้าใช่ จะดำเนินการหาผลเฉลยต่อ

   ถ้าไม่ใช่**แต่** $r(x)$ อยู่ในรูป $r_1(x) + \cdots + r_m(x)$ โดยที่ $r_1(x), \ldots, r_m(x)$ อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 4.1 ให้แยกหาผลเฉลยเฉพาะ

$$\begin{aligned}
y_{p_1} \quad &\text{จากสมการ} \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r_1(x), \\
y_{p_2} \quad &\text{จากสมการ} \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r_2(x), \\
&\vdots \\
y_{p_m} \quad &\text{จากสมการ} \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r_m(x),
\end{aligned}$$

$r(x)$	ค่า y_p ที่จะกำหนดให้เป็น
$ae^{\lambda x}$	$Ae^{\lambda x}$
$a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$	$A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0$
$(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0)e^{\lambda x}$	$(A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0)e^{\lambda x}$
$a\cos(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0)\cos(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0)\sin(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$a\cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\, e^{\lambda x}$
$b\sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\, e^{\lambda x}$
$[a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$	$[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$
$\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$
$\mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$
$[\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$

เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว, A, B เป็นค่าที่จะสมมติให้เป็นค่าคงตัวใด ๆ

และ $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{B_n}$, $\mathcal{A}_n$ และ $\mathcal{B}_n$ เป็นพหุนามกำลัง n โดยที่

$$\begin{aligned}
\mathbf{A_n} &= a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0, \\
\mathbf{B_n} &= b_nx^n + \cdots + b_1x + b_0, \\
\mathcal{A}_n &= A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0, \\
\mathcal{B}_n &= B_nx^n + \cdots + B_1x + B_0,
\end{aligned}$$

a_i, b_i, A_i และ B_i เป็นค่าคงตัวเมื่อ $i = 0, ..., n$

ตารางที่ 4.1. ตารางระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

ทฤษฎีบทหลักการซ้อนทับของผลเฉลย 4.6 ยืนยันว่า $y_{p_1} + \cdots + y_{p_m}$ จะเป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = r_1(x) + \cdots + r_m(x)$$

2. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

3. พิจารณา $r(x)$ แล้วเลือกผลเฉลย y_p ให้อยู่ในรูปทางขวาของตาราง 4.1 **แต่**
   - ถ้า y_p ไม่มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ สามารถใช้ y_p ได้เลย
   - ถ้า y_p **มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป** y_h **ของสมการเอกพันธุ์** ให้เอาค่า x คูณกับ y_p ที่เลือกมา
   - ถ้า y_p ใหม่ ที่ได้จากการคูณด้วย x ยัง**มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป** y_h **ของสมการเอกพันธุ์** ให้ให้เอาค่า x คูณซ้ำไปเรื่อย ๆ จนกว่า y_p ใหม่ที่ได้ ไม่มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์
4. แทนค่า y_p ลงในสมการไม่เอกพันธุ์ เพื่อเทียบหาสัมประสิทธิ์

ตัวอย่าง 4.14. จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = r(x) \tag{4.50}$$

เมื่อ $r(x)$ มีค่าเป็น

1. $500\cos(3x)$ 2. $12e^x$ 3. $30x^2e^x$

วิธีทำ สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องสมการ (4.50) คือ

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

ซึ่งมีสมการแคแรกเทอริสติก คือ

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์คือ

$$y_h = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x,$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 500\cos(3x)$
   เนื่องจาก $r(x)$ อยู่ในรูป $a\cos(\omega x)$ โดยมี $\omega = 3$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

   $$y_p = A\cos(3x) + B\sin(3x)$$

   แทนค่า y_p ลงในสมการทำให้ได้

   $$\begin{aligned} y_p''' - 3y_p'' + 3y_p' - y_p &= (26A - 18B)\cos(3x) + (18A + 26B)\sin(3x) \\ &= 500\cos(3x) + 0\sin(3x) \end{aligned}$$

   ซึ่งได้สมการสำหรับสัมประสิทธิ์ A และ B คือ

   $$26A - 18B = 500 \tag{4.51}$$

   $$18A + 26B = 0 \tag{4.52}$$

   แก้สมการ (4.51) และ (4.52) ได้ $A = 13$ และ $B = -9$ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

   $$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + 13\cos(3x) - 9\sin(3x)$$

2. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 12e^x$
   เนื่องจาก $r(x)$ อยู่ในรูป $ae^{\lambda x}$ โดยมี $\lambda = 1$ ดังนั้น เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

   $$y_p = Ae^x$$

   แต่เนื่องจากรูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ **ซ้ำ**กับผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ เราต้องคูณผลเฉลยเฉพาะ y_p ด้วย x ซึ่งได้$y_p = Axe^x$ ซึ่งก็ยังมีรูปแบบซ้ำอีก เมื่อคูณด้วย x อีกครั้งหนึ่งได้ $y_p = Ax^2e^x$ ยังคงมีรูปแบบซ้ำ และเมื่อคูณด้วย x อีกครั้ง

   $$y_p = Ax^3e^x$$

จะเป็นรูปแบบของผลเฉลยเฉพาะที่จะนำมาแทนค่าลงในสมการ เพื่อหาสัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned} y_p''' - 3y_p'' + 3y_p' - y_p &= (A - 3A + 3A - A)x^3e^x + (9A - 18A + 9A)x^2e^x \\ &\quad +(18A - 18A)xe^x + (6A)e^x \\ &= 6Ae^x = 12e^x \end{aligned}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A = 2$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + 2x^3e^x$$

3. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 30x^2e^x$

ในกรณีนี้ เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p = (A_0 + A_1x + A_2x^2)e^x$$

แต่เนื่องจาก y_p มี**บางพจน์**ซ้ำกับ**บางพจน์**ของผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ เราจำเป็นต้องคูณ x **3 ครั้ง** เพื่อให้ y_p ไม่มีพจน์ซ้ำกับผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์เลย เราได้ y_p และอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง สอง และ สาม ของ y_p คือ

$$\begin{aligned} y_p &= (A_0x^3 + A_1x^4 + A_2x^5)e^x \\ y_p' &= \left[3A_0x^2 + (A_0 + 4A_1)x^3 + (A_1 + 5A_2)x^4 + A_2x^5\right] e^x \\ y_p'' &= [6A_0x + (6A_0 + 12A_1)x^2 + (A_0 + 8A_1 + 20A_2)x^3 \\ &\quad +(A1 + 10A_2)x^4 + A_2x^5]e^x \\ y_p''' &= [6A_0 + (18A_0 + 24A_1)x + (9A_0 + 36A_1 + 60A_2)x^2 \\ &\quad +(A_0 + 12A_1 + 60A_2)x^3 + (A_1 + 15A_2)x^4 + A_2x^5]e^x \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่า ทำให้ได้

$$\begin{aligned} y_p''' - 3y_p'' + 3y_p' - y_p &= (6A_0 + 24A_1x + 60A_2x^2)e^x \\ &= 30x^3e^x \end{aligned}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A_0 = 0,\ A_1 = 0$ และ $A_2 = \dfrac{1}{2}$ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3x^2e^x + \frac{x^5e^x}{2}$$

ตัวอย่าง 4.15. จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$y^{(4)} + 2y'' + y = r(x) \tag{4.53}$$

เมื่อ $r(x)$ มีค่าเป็น

1. $e^x + 2x + 1$ 2. $2x + 1 + 3\sin x$ 3. $3\sin x - 5\cos x$

วิธีทำ สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องสมการ (4.53) คือ

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

ซึ่งมีสมการแคแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

เนื่องจากสมการแคแรกเทอริสติก มีรากคือ $\pm i$ **ซ้ำกันสองชุด** ดังนั้นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์คือ

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x,$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 และ c_4 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $y^{(4)} + 2y'' + y = e^x + 2x + 1$
   พิจารณา $r(x)$ เป็น $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ เมื่อ $r_1(x) = e^x$ และ $r_2(x) = 2x + 1$

   (a) $r_1(x) = e^x$
   ในกรณีนี้ เราจะสมมติให้

   $$y_{p_1} = Ae^x$$

   แทนค่าลงในสมการเพื่อเทียบสัมประสิทธิ์

   $$\begin{aligned} y_{p_1}^{(4)} + 2y_{p_1}'' + y_{p_1} &= (A + 2A + A)e^x \\ &= 4Ae^x = e^x \end{aligned}$$

   เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A = \dfrac{1}{4}$ ได้ผลเฉลยเฉพาะคือ

   $$y_{p_1} = \frac{e^x}{4}$$

(b) $r_2(x) = 2x + 1$

สมมติให้

$$y_{p_2} = A_1 x + A_2$$

แทนค่าลงในสมการไม่เอกพันธุ์

$$\begin{aligned} y_{p_2}^{(4)} + 2y_{p_2}'' + y_{p_2} &= 0 + 0 + (A_1 x + A_2) \\ &= A_1 x + A_2 = 2x + 1 \end{aligned}$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A_1 = 2$ และ $A_2 = 1$ ได้ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_{p_2} = 2x + 1$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปสำหรับสมการไม่เอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 x \cos x + c_4 x \sin x + \frac{e^x}{4} + 2x + 1$$

2. $y^{(4)} + 2y'' + y = 2x + 1 + 3 \sin x$

ในกรณีนี้ เราก็จะพิจารณา $r(x)$ เป็น $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$ เมื่อ $r_1(x) = 2x + 1$ และ $r_2(x) = 3 \sin x$

สำหรับกรณี

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 2x + 1$$

เราทราบจากตัวอย่างที่ผ่านมาแล้วว่า สมการนี้มีผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_{p_1} = 2x + 1$$

สำหรับกรณี $r_2(x) = 3 \sin x$ เราจะสมมติให้ y_{p_2} อยู่ในรูป $c_1 \cos x + c_2 \sin x$ แต่เนื่องจาก มีพจน์ซึ่งมีรูปแบบซ้ำกับพจน์ของผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง ดังนั้น เราจะคูณ x ไปเรื่อย ๆ จนรูปแบบของ y_{p_2} ไม่มีพจน์ซ้ำกับพจน์ของผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ ทำให้ได้

$$y_{p_2} = Ax^2 \cos x + Bx^2 \sin x$$

หาอนุพันธ์ ได้

$$\begin{aligned} y_{p_2}'' &= (2A + 4Bx - Ax^2) \cos x + (2B - 4Ax - Bx^2) \sin x \\ y_{p_2}^{(4)} &= (-12A - 8Bx + Ax^2) \cos x + (-12B + 8Ax + Bx^2) \sin x \end{aligned}$$

เมื่อนำไปแทนในสมการไม่เอกพันธุ์ ทำให้ได้

$$-8A\cos x - 8B\sin x = 3\sin x$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A = 0$ และ $B = -\frac{3}{8}$
ทำได้ $y_{p_2} = -\frac{3}{8}\sin x$ และได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 x\cos x + c_4 x\sin x + 2x + 1 - \frac{3}{8}x^2\sin x$$

3. $y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin x - 5\cos x$
ในกรณีนี้ จะสมมติให้ y_p มีรูปแบบ

$$y_p = Ax^2\cos x + Bx^2\sin x$$

ซึ่งเมื่อนำไปแทนค่าในสมการเพื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ทำให้ได้

$$-8A\cos x - 8B\sin x = 3\sin x - 5\cos x$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ ได้ $A = \frac{5}{8}$ และ $B = -\frac{3}{8}$
ได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ คือ

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + c_3 x\cos x + c_4 x\sin x + \frac{5}{8}x^2\cos x - \frac{3}{8}x^2\sin x$$

ตัวอย่าง 4.16. จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$y''' - 4y' = x + 10\cos x + e^{-2x} \tag{4.54}$$

วิธีทำ สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ

$$y''' - 4y' = 0$$

และมีสมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$$

รากของสมการคือ $\lambda = 0, 2, -2$ ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์คือ

$$y_h = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เมื่อ $r(x) = x + 10\cos x + e^{-2x}$ เราจะพิจารณาเป็น $r(x) = r_1(x) + r_2(x) + r_3(x)$ เมื่อ

$$
\begin{aligned}
r_1(x) &= x \\
r_2(x) &= 10\cos x \\
r_3(x) &= e^{-2x}
\end{aligned}
$$

1. $r_1(x) = x$

   ในกรณีนี้ จะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

   $$y_{p_1} = A_1 x + A_0$$

   แต่ พจน์ A_0 ซึ่งเป็นค่าคงตัว มีรูปแบบซ้ำกันกับพจน์ c_1 ซึ่งเป็นค่าคงตัวของสมการเอกพันธุ์ ดังนั้น ต้องคูณ x เข้ากับผลเฉลยเฉพาะ เพื่อให้ได้รูปผลเฉลยเฉพาะใหม่เป็น

   $$y_{p_1} = x(A_1 x + A_0) = A_1 x^2 + A_0 x$$

   แทนค่าเพื่อเทียบสัมประสิทธิ์

   $$
   \begin{aligned}
   y_{p_1}''' - 4y_{p_1}' &= 0 - 4(2A_0 x + A_1) \\
   &= -8A_0 x - 4A_1 = x
   \end{aligned}
   $$

   ได้ $A_0 = -\dfrac{1}{8}$ และ $A_1 = 0$ ดังนั้น

   $$y_{p_1} = -\frac{x^2}{8}$$

2. $r_2(x) = 10\cos x$

   เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

   $$y_{p_2} = A\cos x + B\sin x$$

   แทนค่าเพื่อเทียบสัมประสิทธิ์

   $$
   \begin{aligned}
   y_{p_2}''' - 4y_{p_2}' &= (-B\cos x + A\sin x) - 4(B\cos x - A\sin x) \\
   &= -5B\cos x + 5A\sin x \\
   &= 10\cos x
   \end{aligned}
   $$

ได้ $A = 0$ และ $B = -2$ ดังนั้น

$$y_{p_2} = -2\sin x$$

3. $r_3 = e^{-2x}$ เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป $y_{p_3} = Ce^{-2x}$ แต่เนื่องจากมีรูปแบบซ้ำกับบางพจน์ของผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ ดังนั้นเราจะสมมติใหม่ให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_{p_3} = Cxe^{-2x}$$

เมื่อแทนค่าเพื่อเทียบสัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned} y'''_{p_3} - 4y'_{p_3} &= (12ce^{-2x} - 8cxe^{-2x}) - 4(ce^{-2x} - 2cxe^{-2x}) \\ &= 8Ce^{-2x} = e^{-2x} \end{aligned}$$

ได้ $C = \dfrac{1}{8}$ และได้ผลเฉลยเฉพาะคือ

$$y_{p_3} = \frac{xe^{-2x}}{8}$$

เราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = c_1 + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} - \frac{x^2}{8} - \frac{3}{5}\sin x + \frac{xe^{-2x}}{8}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ต่อไปนี้

(a) $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-x} + 3$

(b) $y''' + y'' + y' + y = e^{-x} + 4x$

(c) $y^{(4)} - 4y'' = x^2 + e^x$

(d) $y^{(4)} + y''' = x$

(e) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^x + x^2$

(f) $y''' + 3y'' - 4y = e^{-2x}$

(g) $y^{(4)} - y = 3x + \cos x$

(h) $y''' - y' = 2\sin x$

(i) $y^{(4)} + 2y'' + y = 3 + \cos(2x)$

(j) $y^{(4)} + y''' = \sin(2x)$

(k) $y''' + 2y'' - y' - 2y = e^x - 1$

(l) $y''' + y'' - 2y = xe^x + 1$

(m) $y''' + 4y'' + y' - 26y = e^{-3x}\sin(2x) + x$

(n) $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = 3e^x + 2xe^{-x} + e^{-x}\sin x$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

(a) $y''' + 4y' = x;$ $\quad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$

(b) $y^{(4)} + 2y'' + y = 4x + 4;$ $\quad y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = y'''(0) = 1$

(c) $y''' - 3y'' + 2y' = x + e^x;$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = -\frac{1}{4},\ y''(0) = -\frac{3}{2}$

(d) $y''' - 2y'' + 5y' = -24e^{3x};$ $\quad y(0) = 4,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = -5$

(e) $y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 34xe^{-2x} - 16e^{-2x} - 10x^2 + 6x + 34;$

$y(0) = 3,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0$

(f) $y''' + 2y'' - 9y' - 18y = -18x^2 - 18x + 22;$

$y(0) = -2,\ y'(0) = -8,\ y''(0) = -12$

(g) $y^{(4)} + 2y''' + y'' + 8y' - 12y = 12\sin x - e^{-x};$

$y(0) = 3,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1, y'''(0) = 2$

4.4.3 การแปรผันของตัวแปรเสริม

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธุ์อันดับที่ n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x) \tag{4.55}$$

เนื่องด้วย ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

คือ

$$y_h = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x),$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐาน โดยขั้นตอนวิธีของการแปรผันของตัวแปรเสริม จะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x),$$

เมื่อ $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งยังไม่ทราบค่า และไม่เป็นค่าคงตัว

พบว่าอนุพันธ์ของ y_p คือ

$$y_p' = \left(u_1y_1' + \cdots + u_ny_n'\right) + \left(u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n\right) \tag{4.56}$$

เพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดอนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชันไม่ทราบค่า $u_1, \ldots, u_n$ ในการหาอนุพันธ์อันดับที่สองของผลเฉลยเฉพาะ y_p เราจะสมมติให้

$$u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n = 0$$

และในทำนองเดียวกันเราสามารถคำนวณหาอนุพันธ์อันดับอื่นๆ ของผลเฉลยเฉพาะ $y_p'', y_p''', \ldots, y_p^{(n-1)}$ โดยให้เงื่อนไข

$$\begin{aligned}
u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n &= 0, \\
u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n' &= 0, \\
&\vdots \\
u_1'y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-2)} &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้นเราได้ผลเฉลยเฉพาะ และอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของผลเฉลยเฉพาะ คือ

$$\begin{aligned}
y_p &= u_1y_1 + \cdots + u_ny_n \\
y_p' &= u_1y_1' + \cdots + u_ny_n' \\
&\vdots \\
y_p^{(n-1)} &= u_1y_1^{(n-1)} + \cdots + u_ny_n^{(n-1)} \\
y_p^{(n)} &= \left(u_1y_1^{(n)} + \cdots + u_ny_n^{(n)}\right) + \left(u_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)}\right)
\end{aligned} \tag{4.57}$$

เนื่องด้วย $y_1, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง ดังนั้นเมื่อแทนค่า $y_p, y_p', \ldots, y_p^{(n)}$ ลงในสมการไม่เอกพันธุ์ (4.55) ทำให้ได้

$$a_n(x)\left(u_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)}\right) = b(x)$$

ดังนั้นเราได้ระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย n สมการ

$$\begin{aligned}
u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n &= 0, \\
u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n' &= 0, \\
&\vdots \\
u_1'y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-2)} &= 0 \\
u_1'y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-1)} &= \frac{b(x)}{a_n(x)}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

ซึ่งอาจจะพิจารณาในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{bmatrix}$$

เราได้ผลเฉลยของระบบสมการ (4.58) คือ

$$u_k'(x) = \frac{r(x)W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)}, \qquad k = 1, \ldots, n, \tag{4.59}$$

เมื่อ $r(x) = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}$, $W[y_1, \ldots, y_n](x)$ คือ รอนสเกียน[8]ของผลเฉลย $y_1, \ldots, y_n$

[8] ดูนิยามของรอนสเกียนหน้า 140

และ $W_k(x)$ คือดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

ซึ่งถูกแทนสดมภ์ (column) ที่ k ด้วยเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ หรือนั่นคือ

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_{k-1}' & 0 & y_{k+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-2)} & 0 & y_{k+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-1)} & 1 & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$u_k(x) = \int \frac{r(x)W_k(x)}{W[y_1, \dots, y_n](x)}dx, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{4.60}$$

ซึ่งทำให้ได้ผลเฉพาะ y_p คือ

$$y_p = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{r(x)W_k(x)}{W[y_1, \dots, y_n](x)}dx,$$

เมื่อ $r(x) = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}$

หมายเหตุ โดยทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาค่าดีเทอร์มิเนนต์ของเมทริกซ์เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า

$$\begin{aligned} W_k(x) &= (-1)^{n-k} W[y_1, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n] \\ &= (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{k-1} & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_{k-1}' & y_{k+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-2)} & y_{k+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y_h = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n,$$

   เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์มีค่าเป็น

$$y_p = u_1(x)y_1 + \cdots + u_n(x)y_n$$

3. หาค่า $W[y_1, \ldots, y_n](x)$ และ $W_1(x), \ldots, W_n(x)$

4. หาค่า $u_k(x)$, เมื่อ

$$u_k(x) = \int \frac{r(x)W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)}dx, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

   เมื่อ $r(x) = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}$

5. แทนค่า $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ ที่ได้ลงใน y_p

6. ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (4.55) คือ

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n + u_1 y_1 + \cdots + u_n y_n$$

ตัวอย่าง 4.17. จงใช้วิธีการแปรผันของตัวแปรเสริมหาผลเฉลยของสมการ

$$y''' - 4y' = e^{2x} \tag{4.61}$$

วิธีทำ

1. จากตัวอย่าง 4.16 พบว่า ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y''' - 4y' = 0$$

   คือ

$$y_h = c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x},$$

   เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงใด ๆ นั่นคือ

$$y_1 = 1,\ y_2 = e^{2x} \text{ และ } y_3 = e^{-2x}$$

2. สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p = u_1(x) + u_2(x)e^{2x} + u_3(x)e^{-2x}$$

3. หาค่า $W[1, e^{2x}, e^{-2x}](x)$ และ $W_1(x), W_2(x), W_3(x)$

$$W[1, e^{2x}, e^{-2x}](x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} & e^{-2x} \\ 0 & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ 0 & 4^{2x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = 16$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{-2x} \\ 0 & 2e^{2x} & -2e^{-2x} \\ 1 & 4^{2x} & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = (-1)^{(3-1)} \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-2x} \\ 0 & 0 & -2e^{-2x} \\ 0 & 1 & 4e^{-2x} \end{vmatrix} = (-1)^{(3-2)} \begin{vmatrix} 1 & e^{-2x} \\ 0 & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = 2e^{-2x}$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 2e^{2x} & 0 \\ 0 & 4^{2x} & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{(3-3)} \begin{vmatrix} 1 & e^{2x} \\ 0 & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{2x}$$

4. หาค่า $u_1,\ u_2$ และ u_3

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{\left(\frac{e^{2x}}{1}\right)(-4)}{16} dx = -\frac{e^{2x}}{8} \\ u_2 &= \int \frac{\left(\frac{e^{2x}}{1}\right)(2e^{-2x})}{16} dx = \frac{x}{8} \\ u_3 &= \int \frac{\left(\frac{e^{2x}}{1}\right)(2e^{2x})}{16} dx = \frac{e^{4x}}{32} \end{aligned}$$

5. แทนค่า $u_1,\ u_2$ และ u_3 ได้

$$\begin{aligned} y_p &= -\frac{e^{2x}}{8} + \frac{x}{8}e^{2x} + \frac{e^{4x}}{32}e^{-2x} \\ &= -\frac{e^{2x}}{8} + \frac{xe^{2x}}{8} + \frac{e^{2x}}{32} \\ &= -\frac{3e^{2x}}{32} + \frac{xe^{2x}}{8} \end{aligned}$$

6. ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4.61) คือ

$$\begin{aligned} y &= c_1 + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + \frac{e^{2x}}{24} + \frac{xe^{2x}}{8} \\ &= c_1 + \tilde{c}_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x} + \frac{xe^{2x}}{8}, \end{aligned}$$

เมื่อ $\tilde{c}_2 = c_2 + \frac{1}{24}$

ตัวอย่าง 4.18. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x, \qquad x > 0 \tag{4.62}$$

เมื่อ $\{x, x^{-1}, x^2\}$ เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

วิธีทำ

1. เมื่อเราทราบเซตของผลเฉลยมูลฐานแล้ว ทำให้เราทราบว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ

$$y_h = c_1 x + c_2 x^{-1} + c_3 x^2,$$

เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p = u_1(x)x + u_2(x)x^{-1} + u_3(x)x^2$$

3. หาค่า $W[x,x^{-1},x^2](x)$ และ $W_1(x), W_2(x), W_3(x)$

$$W[x,x^{-1},x^2](x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} & x^2 \\ 1 & -x^{-2} & 2x \\ 0 & 2x^{-3} & 2 \end{vmatrix} = -\frac{6}{x}$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^{-1} & x^2 \\ 0 & -x^{-2} & 2x \\ 1 & 2x^{-3} & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{(3-1)} \begin{vmatrix} x^{-1} & x^2 \\ -x^{-2} & 2x \end{vmatrix} = 3$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & 2x\ 0 \\ 0 & 1 & 21 \end{vmatrix} = (-1)^{(3-2)} \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x1 \end{vmatrix} 0 = -x^2$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} & 0 \\ 1 & -x^{-2} & 0 \\ 0 & 2x^{-3} & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{(3-3)} \begin{vmatrix} x & x^{-1} \\ 1 & -x^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{x}$$

4. หาค่า $u_1,\ u_2$ และ u_3

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{\left(\frac{x^3 \sin x}{x^3}\right)(3)}{-6x^{-1}} dx = \frac{x\cos x - \sin x}{2} \\ u_2 &= \int \frac{\left(\frac{x^3 \sin x}{x^3}\right)(-x^2)}{-6x^{-1}} dx = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)\cos x + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\sin x \\ u_3 &= \int \frac{\left(\frac{x^3 \sin x}{x^3}\right)(-2x^{-1})}{-6x^{-1}} dx = -\frac{\cos x}{3} \end{aligned}$$

5. แทนค่า $u_1,\ u_2$ และ u_3 ได้

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{x\cos x - \sin x}{2} x + \left(\left(x - \frac{x^3}{6}\right)\cos x + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)\sin x\right) x^{-1} - \frac{\cos x}{3} x^2 \\ &= \cos x - x^{-1}\sin x \end{aligned}$$

6. ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4.62) คือ

$$y = c_1 x + c_2 x^{-1} + c_3 x^2 + \cos x - x^{-1}\sin x$$

แบบฝึกหัด

1. จงใช้วิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   (a) $y''' + y' = \tan x,$ $\quad 0 < x < \pi/2$

   (b) $y''' + y' = \sec x,$ $\quad -\pi/2 < x < \pi/2$

   (c) $y''' - y' = \csc x,$ $\quad 0 < x < \pi$

   (d) $y''' + y' = \sec x \tan x,$ $\quad 0 < x < \pi/2$

   (e) $y''' - y'' + y' - y = \sec x,$ $\quad -\pi/2 < x < \pi/2$

   (f) $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^{-1},$ $\quad x > 0$
   เมื่อเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{x, x^2, x^3\}$

   (g) $x^3 y''' - 2x^2 y'' + 3xy' - 3y = x^2,$ $\quad x > 0$
   เมื่อเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{x, x\ln x, x^3\}$

   (h) $x^3 y''' - x^2 y'' - 4xy' + 4y = x,$ $\quad x > 0$
   เมื่อเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{x, x^{-1}, x^4\}$

   (i) $x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4,$ $\quad x > 0$
   เมื่อเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{x, x^{-1}, x^2\}$

   (j) $x^3 y''' - 3xy' + 3y = x^4 \cos x,$ $\quad x > 0$
   เมื่อเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้องคือ $\{x, x^{-1}, x^3\}$

บทที่ 5
การแปลงลาปลาซ

การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) เป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถใช้หาผลเฉลยของ*ปัญหาค่าตั้งต้น*ของสมการเชิงอนุพันธ์แนวความคิดของการประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซเพื่อใช้แก้สมการเชิงอนุพันธ์คือ *"เราจะใช้การแปลงลาปลาซ แปลงจากปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ เข้าสู่สมการพหุนาม และหลังจากจัดรูปสมการพนุนามโดยใช้วิธีทางพีชคณิต ก็จะใช้การแปลงลาปลาซผกผัน แปลงสมการพนุนามกลับเพื่อหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์"* ในบทนี้จะกล่าวถึง การแปลงลาปลาซ การแปลงลาปลาซผกผัน และ การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

5.1 บทนิยาม สัญลักษณ์ และ การแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชัน

ในบทนี้ จะกล่าวถึง บทนิยาม และ สัญลักษณ์ของการแปลงลาปลาซ พร้อมกับแสดงการแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชัน

บทนิยาม 5.1. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับทุก ๆ $x \geq 0$ ถ้า $\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$ หาค่าได้เราเรียกฟังก์ชัน

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

(ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร s) ว่า *การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f และจะใช้สัญลักษณ์ $\mathscr{L}\{f\}$ แทน*การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f หรือก็คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{f\} = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

สังเกตได้ว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปรอิสระ x แต่การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f เราได้ฟังก์ชัน F ที่ขึ้นกับตัวแปร s

และ เราเรียกฟังก์ชัน $f(x)$ ว่า*การแปลงลาปลาซผกผัน* (inverse Laplace transform) ของฟังก์ชัน $F(s)$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$$

หมายเหตุต่อไปนี้จะใช้สัญลักษณ์ **อักษรภาษาอังกฤษตัวเล็ก**แทนฟังก์ชันแต่จะใช้**อักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่** แทนการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันนั้น เช่น $F(s)$ จะหมายถึงการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x), Y(s)$ จะหมายถึงการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $y(x)$ เป็นต้น

ต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นการแปลงลาปลาซของบางฟังก์ชัน โดยใช้บทนิยาม

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = 1$ เนื่องจาก

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-sx} dx = -\frac{e^{-sx}}{s}\Big|_0^\infty = \begin{cases} \dfrac{1}{s} & \text{ถ้า } s > 0 \\ \infty & \text{ถ้า } s \leq 0 \end{cases}$$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน 1 คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad \text{เมื่อ } s > 0 \tag{5.1}$$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = x$

$$\mathscr{L}\{x\} = \int_0^\infty xe^{-sx} dx$$

โดยการหาค่าอินทิกรัลทีละส่วน (integration by parts)

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{x\} &= x\left(-\frac{e^{-sx}}{s}\right)_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{e^{-sx}}{s}\right) dx \\ &= \left[-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right]_0^\infty \\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right) - \left(-0 - \frac{1}{s^2}\right) \end{aligned}$$

และพบว่า $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right) = \begin{cases} 0, & s > 0 \\ \infty, & s < 0 \end{cases}$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน x คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}, \qquad \text{เมื่อ } s > 0 \tag{5.2}$$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = x^2$

$$\mathscr{L}\{x^2\} = \int_0^\infty x^2 e^{-sx} dx = -\frac{1}{s}e^{-sx}x^2\Big|_0^\infty + \frac{2}{s}\int_0^\infty xe^{-sx} dx$$

พบว่า

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sx}x^2\right) = \begin{cases} 0, & s > 0 \\ \infty, & s < 0 \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} F(s) = \mathscr{L}\{x^2\} &= \frac{2}{s}\int_0^\infty xe^{-sx}dx \\ &= \left(\frac{2}{s}\right)\left(\frac{1}{s}\right) \\ &= \frac{2}{s^2}, \qquad \text{เมื่อ } s > 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = x^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

  โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สามารถแสดงได้ว่า

$$F(s) = \mathscr{L}\{x^n\} = \int_0^\infty x^n e^{-sx}dx = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \text{เมื่อ } s > 0 \tag{5.4}$$

  โดยที่ $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = e^{ax}$**, เมื่อ** a **เป็นจำนวนจริง**

  การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน e^{ax} คือ

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{e^{ax}\} &= \int_0^\infty e^{ax}e^{-sx}dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)x}dx \\ &= \frac{1}{s-a}, \qquad \text{เมื่อ } s > a \end{aligned}$$

  ซึ่งได้ว่า

$$F(s) = \mathscr{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a} \tag{5.5}$$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x) = \sin ax$, เมื่อ a เป็นจำนวนจริง**

$$\mathscr{L}\{\sin ax\} = \int_0^\infty (\sin ax)e^{-sx}dx$$

โดยการหาค่าอินทิกรัลที่ละส่วน 2 ครั้ง เราพบว่า

$$\int (\sin ax)e^{-sx}dx = -\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2}(s\sin ax + a\cos ax) + C,$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใด ๆ, ดังนั้น

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{\sin ax\} &= \left[-\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2}(s\sin ax + a\cos ax)\right]_0^\infty \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[-\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2}(s\sin ax + a\cos ax)\right] + \frac{a}{s^2+a^2}\end{aligned}$$

และพบว่า

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2}(s\sin ax + a\cos ax)\right] = 0 \text{ เมื่อ } s > 0$$

ดังนั้น

$$F(s) = \mathscr{L}\{\sin ax\} = \frac{a}{s^2+a^2} \text{ เมื่อ } s > 0 \tag{5.6}$$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x) = \cos ax$, เมื่อ a เป็นจำนวนจริง**

โดยทำนองเดียวกับการหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $\sin ax$ เราได้ว่า

$$F(s) = \mathscr{L}\{\cos ax\} = \frac{s}{s^2+a^2} \tag{5.7}$$

หมายเหตุ ไม่จำเป็นว่าทุกฟังก์ชัน จะสามารถหาการแปลงลาปลาซได้ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน $f(x) = e^{x^2}$ พบว่าเราไม่สามารถหาค่า $\int_0^\infty e^{x^2}e^{-sx}dx$ ได้ เนื่องจาก $e^{x^2}e^{-sx}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $x \geq \frac{s}{2}$ ดังนั้นค่าอินทิกรัล $\int_0^\infty e^{x^2}e^{-sx}dx$ จะลู่ออกสู่ค่าอนันต์

แบบฝึกหัด

จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. x^3	3. $\sqrt{x}$	3. $\sinh x$
2. x^10	4. $\sqrt{x^3}$	4. $\cosh x$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า **??**)

$f(x)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}$
1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
x	$\dfrac{1}{s^2}, \quad s > 0$
$x^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{ax}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin ax$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos ax$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

ตารางที่ 5.1. ตารางการแปลงลาปลาซอย่างย่อ

5.2 คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ

ในส่วนนี้จะแสดงคุณสมบัติต่าง ๆ ของการแปลงลาปลาซ

5.2.1 การมีจริงของการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน

ดังที่ได้กล่าวไว้แล้วว่า *ไม่จำเป็นว่าทุกฟังก์ชัน จะสามารถหาการแปลงลาปลาซได้* ในส่วนนี้จะแสดงถึงเงื่อนไขบางอย่าง ซึ่งถ้าฟังก์ชันใดมีคุณสมบัติตามเงื่อนไขดังกล่าวแล้ว เราจะสามารถหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันนั้นได้

เนื่องด้วยในการหาค่า การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน เราจำเป็นต้องเกี่ยวข้องกับการหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตจากศูนย์ ถึงค่าอนันต์ ของผลคูณระหว่างฟังก์ชันเลขชี้กำลังกับฟังก์ชันที่ต้องการหาการแปลงลาปลาซ ในการพิจารณาอย่างคร่าว ๆ พบว่า ถ้าฟังก์ชันที่พิจารณา*ไม่ได้โตเร็วกว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลัง* e^{-sx} น่าจะสามารถหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขต ของผลคูณระหว่างฟังก์ชันเลขชี้กำลัง e^{-sx} กับฟังก์ชันนั้นจากศูนย์ ถึงค่าอนันต์ได้

บทนิยาม 5.2 (อันดับเลขชี้กำลัง). เราจะเรียกฟังก์ชัน $f(x)$ มีว่า*อันดับเลขชี้กำลัง* α (exponential order α) ถ้ามีจำนวนจริงบวก X และ M ซึ่ง

$$|f(x)| \le Me^{\alpha x}, \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } x \ge X$$

ตัวอย่าง 5.1. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f(x) = e^{5x}\sin 2x$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลังเท่ากับ 5

วิธีทำ เราพบว่า

$$\left|e^{5x}\sin 2x\right| \le e^{5x}, \ \text{ทุก ๆ } x \ge 0$$

ซึ่งนี้แสดงว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลังเท่ากับ 5 โดยในที่นี้มีค่า $X = 0$ และ $M = 1$

ทฤษฎีบท 5.1 (การมีจริงของการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน). *ถ้าฟังก์ชัน* $f(x)$ *ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง* $[0,\infty)$ *และมีอันดับเลขชี้กำลัง* α *แล้ว*

$$F(s) = \mathscr{L}\{f\} \qquad \text{มีอยู่จริงเมื่อ } s > \alpha$$

พิสูจน์ ในการพิสูจน์ ต้องการจะแสดงให้เห็นว่าเราสามารถหาค่าอินทิกรัล $\displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$ ได้

เราจะพิจารณาการหาค่าอินทิกรัลเป็นสองส่วน

$$\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx = \int_0^X e^{-sx}f(x)dx + \int_X^\infty e^{-sx}f(x)dx,$$

เมื่อ X คือค่าที่ทำให้ ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α เมื่อ $x \ge X$ ตามบทนิยาม 5.2

เนื่องจากฟังก์ชัน f ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $[0,\infty)$ โดยทฤษฎีบทของแคลคูลัส ยืนยันว่าเราสามารถหาค่า $\displaystyle\int_0^X e^{-sx}f(x)dx$ ได้ สำหรับทุก ๆ ค่า s

ในการพิจารณาส่วนที่เหลือ จะใช้*การทดสอบด้วยวิธีการเปรียบเทียบของการหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ* (comparison test for improper integrals)

เนื่องจากฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α เมื่อ $x \ge X$ ดังนั้น

$$|f(x)| \le Me^{\alpha x}$$

และ

$$\left|e^{-sx}f(x)\right| = e^{-sx}|f(x)| \le Me^{-(s-\alpha)x}, \qquad \text{สำหรับทุก ๆ } x \ge X \tag{5.8}$$

เมื่อ $s > \alpha$ เราพบว่า

$$\int_X^\infty Me^{-(s-\alpha)x}dx = M\int_X^\infty e^{-(s-\alpha)x}dx = \frac{Me^{-(s-\alpha)X}}{s-\alpha} < \infty \tag{5.9}$$

โดย (5.8), (5.9) และ การทดสอบด้วยวิธีการเปรียบเทียบของการหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ เราสรุปได้ว่า

$$\int_X^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

หาค่าได้ เมื่อ $s > \alpha$ ดังนั้นเมื่อ $\int_0^X e^{-sx}f(x)dx$ และ $\int_X^\infty e^{-sx}f(x)dx$ หาค่าได้ เราจึงสรุปได้ว่า เราสามารถหาค่าอินทิกรัล

$$\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

ได้ หรือกว่าได้ว่า การแปลงลาปลาซ $\mathscr{L}\{f\}$ มีจริงสำหรับ $s > \alpha$ □

5.2.2 ความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีบท 5.2 (ความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ). *ถ้าเราสามารถหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f, f_1 และ f_2 สำหรับบางช่วง $s > \alpha$, เมื่อ α เป็นจำนวนจริง แล้ว*

- $\mathscr{L}\{f_1 + f_2\} = \mathscr{L}\{f_1\} + \mathscr{L}\{f_2\}$

- $\mathscr{L}\{cf\} = c\mathscr{L}\{f\}$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ $s > \alpha$

พิสูจน์ โดยความเป็นเชิงเส้นของการหาค่าอินทิกรัล เราได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f_1+f_2\} &= \int_0^\infty e^{-sx}\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx}f_1(x)dx + \int_0^\infty e^{-sx}f_2(x)dx \\ &= \mathscr{L}\{f_1\} + \mathscr{L}\{f_2\}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{cf\} &= \int_0^\infty e^{-sx}\left[cf(x)\right]dx \\ &= c\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx \\ &= c\mathscr{L}\{f\}\end{aligned}$$

และในบางครั้ง เราอาจจะเขียนรวมคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซทั้งสองข้อเป็น

$$\mathscr{L}\{c_1f_1 + c_2f_2\} = c_1\mathscr{L}\{f_1\} + c_2\mathscr{L}\{f_2\}, \tag{5.10}$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

และสำหรับการแปลงลาปลาซผกผัน

$$\begin{aligned} c_1f_1(x) + c_2f_2(x) &= \mathscr{L}^{-1}\{c_1\mathscr{L}\{f_1\} + c_2\mathscr{L}\{f_2\}\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\{c_1F_1(s) + c_2F(s)\} \\ c_1\mathscr{L}^{-1}\{F_1\} + c_2\mathscr{L}^{-1}\{F_2\} &= \mathscr{L}^{-1}\{c_1F_1(s) + c_2F(s)\}, \end{aligned}$$

เมื่อ $F_1(s) = \mathscr{L}\{f_1\}$ และ $F_2(s) = \mathscr{L}\{f_2\}$, ซึ่งหมายถึง การแปลงลาปลาซผกผันก็มีคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นเช่นเดียวกัน □

ตัวอย่าง 5.2. จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x) = \cosh ax$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\cosh ax = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{\cosh ax\} &= \mathscr{L}\{\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\mathscr{L}\{e^{ax}\} + \mathscr{L}\{e^{-ax}\}\right] \end{aligned}$$

(โดยคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ)

เราทราบว่า

$$\mathscr{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}, \qquad \text{เมื่อ } s > a$$

และ

$$\mathscr{L}\{e^{-ax}\} = \frac{1}{s+a}, \qquad \text{เมื่อ } s < -a$$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $\cosh ax$ คือ

$$\begin{aligned} F(s) = \mathscr{L}\{\cosh ax\} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{(s+a)+(s-a)}{(s-a)(s+a)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2-a^2} \\ &= \frac{s}{s^2-a^2} \qquad \text{เมื่อ } s > |a| \end{aligned} \tag{5.11}$$

ตัวอย่าง 5.3. จงหา $\mathscr{L}\{1 + 2x + 3e^{4x} - 5\sin 6x\}$

วิธีทำ จากคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{1 + 2x + 3e^{4x} - 5\sin 6x\} &= \mathscr{L}\{1\} + 2\mathscr{L}\{x\} + 3\mathscr{L}\{e^{4x}\} - 5\mathscr{L}\{\sin 6x\} \\ &= \frac{1}{s} + 2\frac{1}{s^2} + 3\frac{1}{s-4} - 5\frac{6}{s^2+6^2} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s-4} - \frac{30}{s^2+36} \\ &= 4\frac{s^4 - 8s^3 + 64s^2 - 18s - 72}{s^5 - 4s^4 + 36s^3 - 144s^2} \end{aligned}$$

5.2.3 การเลื่อนขนานในแนวแกน s

ทฤษฎีบท 5.3 (การเลื่อนขนานในแนวแกน s ของการแปลงลาปลาซ)**.** *สำหรับการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x)$ ใด ๆ*

$$\mathscr{L}\{f\} = F(s), \qquad s > \alpha \tag{5.12}$$

เราได้ว่า

$$\mathscr{L}\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a), \qquad s > \alpha + a$$

พิสูจน์ โดยบทนิยามของการแปลงลาปลาซ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{e^{ax}f(x)\} &= \int_0^\infty e^{-sx}e^{ax}f(x)dx \\ &= \int_0^\infty e^{-(s-a)x}f(x)dx \\ &= F(s-a) \end{aligned}$$

และในทางกลับกัน

$$e^{ax}f(x) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}$$

□

ตัวอย่าง 5.4. จงหาการแปลงลาปลาซของ $e^{ax}\sin bx$

วิธีทำ เราทราบแล้วว่า

$$\mathscr{L}\{\sin bx\} = \frac{b}{s^2+b^2}$$

ดังนั้น โดยคุณสมบัติการเลื่อนขนานในแนวแกน s

$$\mathscr{L}\{e^{ax}\sin bx\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

5.2.4 การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์

ทฤษฎีบท 5.4 (การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง). *ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[0,\infty)$ และ $f'(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $[0,\infty)$ โดยที่ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α แล้ว*

$$\mathscr{L}\{f'\} = s\mathscr{L}\{f\} - f(0), \quad \text{เมื่อ } s > \alpha \tag{5.13}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $f'(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ดังนั้น $\displaystyle\int_0^N f'(x)e^{sx}dx$ หาค่าได้ทุก ๆ $N \geq 0$ พิจารณา $\mathscr{L}\{f'\}$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f'\} &= \int_0^\infty e^{-sx}f'(x)dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-sx}f'(x)dx \\
\text{โดยการหาค่าอินทิกรัลทีละส่วน} &= \lim_{N\to\infty}\left[e^{-sx}f(x)\Big|_0^N + s\int_0^N e^{-sx}f(x)dx\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} e^{-sN}f(N) - f(0) + s\lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-sx}f(x)dx \\
&= \lim_{N\to\infty} e^{-sN}f(N) - f(0) + s\mathscr{L}\{f\}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α ดังนั้น

$$\left|e^{-sN}f(N)\right| \leq e^{-sN}Me^{\alpha N} = Me^{-(s-\alpha)N}$$

ซึ่งสำหรับ $s > \alpha$

$$0 \leq \lim_{N\to\infty}\left|e^{-sN}f(N)\right| \leq \lim_{N\to\infty} Me^{-(s-\alpha)N} = 0$$

ดังนั้น

$$\lim_{N\to\infty} e^{-sN}f(N) = 0$$

ทำให้สรุปได้ว่า $\mathscr{L}\{f'\}$ หาค่าได้และ

$$\mathscr{L}\{f'\} = s\mathscr{L}\{f\} - f(0), \quad \text{เมื่อ } s > \alpha$$

□

โดย**ทฤษฎีบทการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง 5.4** เราสามารถประยุกต์หาการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่สองได้โดย

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f''\} &= s\mathscr{L}\{f'\} - f'(0) \\
&= s\left[s\mathscr{L}\{f\} - f(0)\right] - f'(0) \\
&= s^2\mathscr{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

และโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เราสามารถขยายแนวความคิดนี้เพื่อหาการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับอื่น ๆ ได้คือ

ทฤษฎีบท5.5(การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับอื่นๆ)**.** *ถ้า* $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ *ต่อเนื่องบนช่วง* $[0, \infty)$ *และ* $f^{(n)}(x)$ *ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน* $[0, \infty)$ *โดยที่ฟังก์ชันที่กล่าวมาทั้งหมด เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง* α *แล้ว*

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\} = s^n\mathscr{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad \text{เมื่อ} \;\; s > \alpha \tag{5.14}$$

ทฤษฎีบทนี้ เป็นทฤษฎีสำคัญที่ทำให้สามารถประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นได้

ตัวอย่าง 5.5. จงหาการแปลงลาปลาซของ $\sinh ax$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\frac{d}{dx}\cosh ax = \frac{d}{dx}(\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}) = a\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} = a\sinh ax$$

หรือ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh ax}{a}\right) = \sinh ax$$

โดยทฤษฎีบทการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง 5.4 เราได้

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\sinh ax\} &= \mathscr{L}\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{\cosh ax}{a}\right)\right\} \\
&= s\mathscr{L}\left\{\frac{\cosh ax}{a}\right\} - \frac{\cosh 0}{a} \\
&= \frac{s}{a}\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right) - \frac{e^0+e^0}{2a} \\
&= \frac{s^2-(s^2-a^2)}{a(s^2-a^2)} \\
&= \frac{a^2}{a(s^2-a^2)} \\
&= \frac{a}{s^2-a^2} \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.6. จงหาการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \sin^2 x$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$f(0) = \sin^2 0 = 0 \quad \text{และ} \quad f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$$

ดังนั้น

$$\mathscr{L}\{f'\} = \mathscr{L}\{\sin 2x\} = \frac{2}{s^2+4}$$

และ

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f'\} &= s\mathscr{L}\{\sin^2 x\} - f(0) \\
&= s\mathscr{L}\{\sin^2 x\} - 0 = s\mathscr{L}\{\sin^2 x\}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathscr{L}\{\sin^2 x\} = \frac{2}{s(s^2+4)}$$

5.2.5 การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล

ทฤษฎีบท 5.6 (การแปลงลาปลาซของอินทิกรัล). *ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $[0,\infty)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α แล้ว*

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^x f(u)du\right\} = \frac{\mathscr{L}\{f\}}{s} = \frac{F(s)}{s} \quad \text{เมื่อ } s > \beta \qquad (5.16)$$

โดยที่ $\beta = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } \alpha < 0 \\ \alpha & \text{ถ้า } \alpha \geq 0 \end{cases}$

พิสูจน์ ให้ $g(x) = \int_0^x f(u)du$ โดยทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัส เราได้ว่า

$$g(0) = 0 \quad \text{และ} \quad g'(x) = f(x)$$

เราจะเริ่มต้นตรวจสอบก่อนว่า เราสามารถหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $g(x)$ ได้

เนื่องจากฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ดังนั้นฟังก์ชัน $g(x)$ ซึ่งเป็นค่าอินทิกรัลของ $f(x)$ ก็ต้องต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ด้วย และ พบว่า

$$|g(x)| = \left|\int_0^x f(u)du\right| \leq \int_0^x |f(u)|\,du$$

เพราะว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α และ $\alpha \leq \beta$ สำหรับทุก ๆ $x > X$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_0^x |f(u)|\,du &= \int_0^X |f(u)|\,du + \int_X^x |f(u)|\,du \\
&\leq \int_0^X |f(u)|\,du + \int_X^x Me^{\alpha u}du \\
&\leq \int_0^X |f(u)|\,du + \int_X^x Me^{\beta u}du \\
&= \int_0^X |f(u)|\,du + \frac{M}{\beta}\left(e^{\beta x} - e^{\beta X}\right) \\
&= M'e^{\beta x} + \left[\int_0^X |f(u)|\,du - M'e^{\beta X}\right],
\end{aligned}$$

เมื่อ $M' = \dfrac{M}{\beta}$

เนื่องจาก X เป็นค่าที่ถูกตรึง ดังนั้นเราสามารถหาจำนวนจริงบวก M'' ซึ่ง

$$|g(x)| \leq M'e^{\beta x} + \left[\int_0^X |f(u)|\,du - M'e^{\beta X}\right] \leq M''e^{\beta x}$$

ซึ่งแสดงว่า $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง β

นี้แสดงว่าเราสามารถหาการแปลงฟังก์ชันของฟังก์ชัน $g(x)$ ได้ และโดยทฤษฎีบทการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง 5.4 ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f\} = \mathscr{L}\{g'\} &= s\mathscr{L}\{g\} - g(0) \\
&= s\mathscr{L}\{g\} - 0 \\
&= s\mathscr{L}\{g\}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathscr{L}\{g\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^x f(u)du\right\} = \frac{\mathscr{L}\{f\}}{s}$$

□

5.2.6 อนุพันธ์ของการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีบท 5.7 (อนุพันธ์ของการแปลงลาปลาซ). *ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $[0, \infty)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α แล้ว*

$$\mathscr{L}\left\{xf(x)\right\} = -F'(s) \quad \text{เมื่อ } s > \alpha \tag{5.17}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

เป็นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ $s > \alpha$

เมื่อหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $F(s)$ เทียบกับตัวแปร s ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(f(x)e^{-sx}\right)dx \\ &= \int_0^\infty -xf(x)e^{-sx}dx \\ &= -\mathscr{L}\{xf(x)\} \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\mathscr{L}\{xf(x)\} = -F'(s)$$

□ และในการพิสูจน์ทำนองเดียวกันเราได้ว่า

$$\begin{aligned} F''(s) &= \frac{d^2}{ds^2}\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx \\ &= \int_0^\infty \frac{d^2}{ds^2}\left(f(x)e^{-sx}\right)dx \\ &= \int_0^\infty (-1)^2x^2f(x)e^{-sx}dx \\ &= (-1)^2\mathscr{L}\{x^2f(x)\} \end{aligned}$$

หรือ

$$\mathscr{L}\{x^2f(x)\} = (-1)^2F''(s)$$

และโดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ เราได้ว่า

ทฤษฎีบท 5.8 (อนุพันธ์อันดับ n ของการแปลงลาปลาซ)**.** *ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $[0,\infty)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α แล้ว*

$$\mathscr{L}\{x^n f(x)\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad \text{เมื่อ } s>\alpha,\ n=1,2,3,\ldots \tag{5.18}$$

5.2.7 อินทิกรัลของการแปลงลาปลาซ

ทฤษฎีบท 5.9 (อินทิกรัลของการแปลงลาปลาซ)**.** *ถ้า $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $[0,\infty)$, เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α และ*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}$$

หาค่าได้ แล้ว

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_s^\infty F(u)du \quad \text{เมื่อ } s>\alpha \tag{5.19}$$

พิสูจน์ เราพบว่า

$$\int_s^\infty F(u)du = \int_s^\infty \left[\int_0^\infty f(x)e^{-ux}dx\right]du$$

เนื่องจาก $f(x)$ ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $[0,\infty)$ และเป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α โดยการประยุกต์ทฤษฎีบทในการวิเคราะห์จำนวนจริง[1] เราสามารถสลับการหาค่าอินทิกรัลได้ดังนั้น สำหรับ $s>\alpha$

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(u)du &= \int_0^\infty \left[\int_s^\infty f(x)e^{-ux}du\right]dx\\ &= \int_0^\infty f(x)\left[\int_s^\infty e^{-ux}du\right]dx\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\int_s^\infty e^{-ux}du &= -\frac{e^{-ux}}{u}\Big|_s^\infty\\ &= \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{e^{-Nx}}{x}-\left(-\frac{e^{-sx}}{x}\right)\right]\\ &= \frac{e^{-sx}}{x} \qquad (\text{เนื่องจาก } x>0)\end{aligned}$$

[1]ดูทฤษฎีบทได้ใน [16]

ดังนั้น

$$\int_s^\infty F(u)du = \int_0^\infty f(x)\frac{e^{-sx}}{x}dx = \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}e^{-sx}dx = \mathscr{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}$$

□

ตัวอย่าง 5.7. จงหาการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
วิธีทำ เนื่องจาก $\mathscr{L}\{\sin x\} = \dfrac{1}{s^2+1}$ สำหรับ $s > 0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบทอินทิกรัลของการแปลงลาปลาซ 5.9 ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left\{\frac{\sin x}{x}\right\} &= \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}du \\ &= \tan^{-1} u\Big|_s^\infty \\ &= \lim_{N\to\infty}\left[\tan^{-1} N - \tan^{-1} s\right] \\ &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. x^2e^{3x}
2. $e^{-x}\cos x$
3. $x^2e^{\pi x}$
4. $x^2\sin ax$
5. $xe^{2x}\cos 5x$
6. $e^{-x}x\sinh 2x$
7. $(x-5)^4$
8. $3x - e^x$
9. $e^{-x}\cos 3x + e^{6x} - x$
10. $2x^2e^{-x} - x^2 + \cos 4x$
11. $xe^{2\pi x}$
12. $(1+e^{-x})^2$
13. $5x^4 - 2x^2 + 1$
14. $\cos^2 x$
15. $x\sin^2 x$
16. $x^2 + e^x\sin 2x$
17. $\cos nx\sin nx$
18. $\cos^2 nx$
19. $\cos mx\sin nx$
20. $\cos mx\cos nx$
21. $\sin 3x\cos 3x$
22. $x\sin 2x\cos 5x$
23. $5x^4 - 2x^2 + 1$
24. $\cosh x\sinh x$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า **??**)

$f(x)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}$	หน้า
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$	180
x	$\frac{1}{s^2}, \quad s > 0$	180
$x^n \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	181
e^{cx}	$\frac{1}{s-c}, \quad s > c$	181
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$	182
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$	182
$\sinh ax$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > \|a\|$	190
$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \|a\|$	187
$\mathscr{L}\{e^{ax} f(x)\}$	$F(s-a), \quad s > \alpha + a$	187
$\mathscr{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\}$	$c_1 \mathscr{L}\{f_1\} + c_2 \mathscr{L}\{f_2\}$	186
$\mathscr{L}\{f'\}$	$s\mathscr{L}\{f\} - f(0), \quad s > \alpha$	188
$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}$	$s^n \mathscr{L}\{f\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots -$ $s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad s > \alpha$	189
$\mathscr{L}\left\{\int_0^x f(u)du\right\}$	$\frac{F(s)}{s}, \quad s > \beta$	190
$\mathscr{L}\{xf(x)\}$	$-F'(s), \quad s > \alpha$	192
$\mathscr{L}\{x^n f(x)\} \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$	$(-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > \alpha$	193
$\mathscr{L}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}$	$\int_s^\infty F(u)du, \quad s > \alpha$	193

ตารางที่ 5.2. ตารางการแปลงลาปลาซ

5.3 เทคนิคการหาการแปลงลาปลาซผกผัน

จากในส่วนที่ผ่านมา ได้กล่าวถึงการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งเราสามารถหา $F(s)$ ได้โดยตรงโดยใช้บทนิยาม หรือ ใช้ทฤษฎีบท 5.2-5.9 ช่วยในการหาและในทางกลับกัน ถ้าให้ฟังก์ชันการแปลงลาปลาซ $F(s)$ มา เราก็น่าจะหาฟังก์ชัน $f(x)$ ได้เหมือนกัน ยกตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง 5.8. จงหา $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$, เมื่อ

1. $F(s) = \dfrac{2}{s^3}$ 2. $F(s) = \dfrac{3}{s^2+9}$ 3. $F(s) = \dfrac{s-1}{s^2-2s+5}$

วิธีทำ ในการหาฟังก์ชันลาปลาซผกผัน $\mathscr{L}^{-1}\{F\}$ ในที่นี้จะใช้ตาราง 5.2 หน้า195 ช่วย

1. $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{2}{s^3}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{2!}{s^3}\} = x^2$
2. $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{3}{s^2+9}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{3}{s^2+3^2}\} = \sin 3x$
3. $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{s-1}{s^2-2s+5}\} = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s-1}{(s-1)^2+2^2}\} = e^x\mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+2^2}\} = e^x\cos 2x$

ในส่วนนี้ จะแสดงเทคนิคการหาฟังก์ชันลาปลาซผกผัน โดยใช้ตาราง 5.2

ถึงแม้ว่ามีเทคนิคมากมายในการหาฟังก์ชันลาปลาซผกผันแต่คุณสมบัติหลักที่จะนำมาประยุกต์ใช้หาฟังก์ชันลาปลาซผกผัน คือ

- คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น
- คุณสมบัติการเลื่อนขนานในแนวแกน s

ดังจะได้แสดงให้เห็น ในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.9. จงหา $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{s-1} - \dfrac{6s}{s^2+9}\right\}$

วิธีทำ โดยคุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น เราได้ว่า

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-1} - \frac{6s}{s^2+9}\right\} = 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - 6\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}$$

โดยคุณสมบัติการเลื่อนขนานในแนวแกน s เราได้

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s-1}-\frac{6s}{s^2+9}\right\} &= 5e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-6\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} \\
&= 5e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}-6\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\} \\
&= 5e^x\cdot 1-6\cos 3x \\
&= 5e^x-6\cos 3x
\end{aligned}$$

จากตัวอย่าง 5.9 เห็นได้ว่า เราต้องประยุกต์ใช้คุณสมบัติทั้งสองของการแปลงลาปลาซ มาใช้หาการแปลงลาปลาซผกผัน แต่ในบางครั้งเราอาจจะไม่สามารถใช้คุณสมบัติทั้งสองได้โดยตรง แต่ภายหลังจากการจัดรูป จะทำให้เราสามารถประยุกต์ใช้คุณสมบัติทั้งสองได้ โดยจะเห็นได้จากตัวอย่าง 5.10, 5.11 และ5.12

ตัวอย่าง 5.10. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\}$
วิธีทำ เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2s^2+8s+10}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right)\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(s^2+2\cdot 2s+2^2)+1}\right)\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{1}{(s+2)^2+1}\right)\right\} \\
&= \frac{3}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[s-(-2)]^2+1}\right\} \\
&= \frac{3}{2}e^{-2x}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} \\
&= \frac{3}{2}e^{-2x}\sin x
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.11. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{5}{(s+4)^6}\right\}$

วิธีทำ เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5}{(s+4)^6}\right\} &= 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+4)^6}\right\} \\
&= 5\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{[s-(-4)]^6}\right\} \\
&= 5e^{-4x}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\} \\
&= \frac{5e^{-4x}}{5!}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5!}{s^6}\right\} \\
&= \frac{5e^{-4x}}{5!}x^5 \\
&= \frac{5e^{-4x}}{120}x^5 \\
&= \frac{x^5e^{-4x}}{24}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.12. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\}$

วิธีทำ เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2\cdot 1s+1^2+9}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{(s+1)^2+3^2}\right\}
\end{aligned}$$

และจะจัดรูปการแปลงลาปลาซผกผันให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของ $s+1$ ได้เป็น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2+2s+10}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+(3-3)+2}{(s+1)^2+3^2}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(3s+3)+(-3+2)}{(s+1)^2+3^2}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3(s+1)-1}{(s+1)^2+3^2}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3(s+1)}{(s+1)^2+3^2}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s+1)^2+3^2}\right\} \\
&= 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+3^2}\right\} \\
&= 3e^{-x}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}-e^{-x}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3^2}\right\} \\
&= e^{-x}\left(3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3^2}\right\}\right) \\
&= e^{-x}\left(3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}-\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}\right) \\
&= e^{-x}\left(3\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x\right)
\end{aligned}$$

ในบางครั้งในการหาการแปลงลาปลาซผกผัน เราอาจจำเป็นต้องจัดรูปฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) ใด ๆ ให้อยู่ในรูปผลบวก (หรือผลต่าง) ของฟังก์ชันตรรกยะอย่างง่าย เช่น

ตัวอย่าง 5.13. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+7}{s^2+2s-3}\right\}$
วิธีทำ เราสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2+2s-3}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{(s-1)(s+3)}\right\}$$

พิจารณาฟังก์ชันตรรกยะ

$$F(s) = \frac{s+7}{(s-1)(s+3)}$$

โดยวิธีการแยกเศษส่วนย่อย (method of partial fractions) เราสามารถแยกฟังก์ชันตรรกยะนี้

$$\frac{s+7}{(s-1)(s+3)}$$

ให้อยู่ในรูปผลบวกของฟังก์ชันตรรกยะอย่างง่ายได้เป็น

$$\begin{aligned}
\frac{s+7}{(s-1)(s+3)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+3} \\
&= \frac{A(s+3)+B(s-1))}{(s-1)(s+3)} \\
&= \frac{(A+B)s+(3A-B)}{(s-1)(s+3)}
\end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
A+B &= 1 \qquad \text{(สัมประสิทธิ์หน้า } s\text{)} \\
3A-B &= 7
\end{aligned}$$

เมื่อแก้ระบบสมการ ก็จะได้ $A = 2$ และ $B = -1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2+2s-3}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{-1}{s+3}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+3}\right\} \\
&= 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \\
&= 2e^{x} - e^{-3x}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.14. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ เมื่อ

$$F(s) = \frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$$

วิธีทำ โดยวิธีการแยกเศษส่วนย่อย เราจะเขียนฟังก์ชัน $F(s)$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของฟังก์ชันตรรกยะอย่างง่าย ได้เป็น

$$\begin{aligned} & \frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)} \\ = \; & \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-3} \\ = \; & \frac{A(s+2)(s-3) + B(s+1)(s-3) + C(s+1)(s+2)}{(s+1)(s+2)(s-3)} \\ = \; & \frac{(A+B+C)s^2 + (-A-2B+3C)s + (-6A-3B-2C)}{(s+1)(s+2)(s-3)} \end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 && \text{(สัมประสิทธิ์หน้า } s^2\text{)} \\ -A-2B+3C &= 7 && \text{(สัมประสิทธิ์หน้า } s\text{)} \\ -6A-3B+2C &= -1 \end{aligned}$$

เมื่อแก้ระบบสมการ ก็จะได้ $A = 2, B = -3$ และ $C = -1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s+7}{s^2+2s-3}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s-3}\right\} \\ &= 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} \\ &= 2e^{-x} - 3e^{-2x} + e^{3x} \end{aligned}$$

หมายเหตุ ในการหาค่า A, B และ C จากสมการ

$$7s - 1 = A(s+2)(s-3) + B(s+1)(s-3) + C(s+1)(s+2)$$

อาจจะใช้เทคนิคต่อไปนี้คือ

1. เลือก $s=-1$ เพื่อให้พจน์ $(s+1)$ หายไป นั่นคือ

$$\begin{aligned}7(-1)-1 &= A(-1+2)(-1-3)+B(-1+1)(-1-3)\\ &\quad +C(-1+1)(-1+2)\\ -7-1 &= A(1)(-4)+B(0)(-4)+C(0)(1)\\ -8 &= -4A\end{aligned}$$

   ได้ $A=2$

2. จากนั้นเลือก $s=-2$ เพื่อให้พจน์ $(s+2)$ หายไป นั่นคือ

$$\begin{aligned}7(-2)-1 &= A(0)+B(-2+1)(-2-3)+C(0)\\ -14-1 &= B(5)\\ -15 &= 5B\end{aligned}$$

   ได้ $B=-3$

3. จากนั้นเลือก $s=3$ เพื่อให้พจน์ $(s-3)$ หายไป นั่นคือ

$$\begin{aligned}7(3)-1 &= A(0)+B(0)+C(3+1)(3+2)\\ 21-1 &= 20C\\ 20 &= 20C\end{aligned}$$

   ได้ $C=1$

และได้ว่า

$$7s-1=2(s+2)(s-3)-3(s+1)(s-3)+(s+1)(s+2)$$

□

สำหรับกรณีฟังก์ชันตรรกยะ $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ ซึ่ง $Q(s)$ มีพจน์ $(s-r)^m$ เป็นตัวประกอบ ภายหลังจากการกระจายฟังก์ชันตรรกยะ $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของฟังก์ชันตรรกยะอย่างง่าย พจน์ของผลบวกของฟังก์ชันตรรกยะอย่างง่าย ที่สมนัยกับพจน์ $(s-r)^m$ จะอยู่ในรูป

$$\frac{A_1}{s-r}+\frac{A_2}{(s-r)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(s-r)^m},$$

เมื่อ $A_1,\ldots,A_m$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 5.15. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$ เมื่อ

$$F(s) = \frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}$$

วิธีทำ โดยวิธีการแยกเศษส่วนย่อย เราสามารถแยกฟังก์ชัน $F(s)$ ให้อยู่ในรูปผลบวกของฟังก์ชันตรรกยะอย่างง่ายได้ และเนื่องจากส่วนของ $F(s)$ มี$(s-1)^2$ เป็นตัวประกอบ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s+3} \\ &= \frac{A(s-1)(s+3)+B(s+3)+C(s-1)^2}{(s-1)^2(s+3)} \end{aligned}$$

เมื่อนำ $(s-1)^2(s+3)$ คูณทั้งสองข้างของสมการ ก็จะได้

$$s^2+9s+2 = A(s-1)(s+3)+B(s+3)+C(s-1)^2$$

เพื่อจะกำจัดพจน์ที่มีตัวประกอบ $(s-1)$ ให้ $s=1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1^2+9\cdot 1+2 &= A(0)+B(1+3)+C(0) \\ 12 &= 4B \end{aligned}$$

ดังนั้น $B=3$ และในทำนองเดียวกัน ให้ $s=-3$

$$\begin{aligned} (-3)^2+9\cdot(-3)+2 &= A(0)+3(0)+C(-3-1)^2 \\ -16 &= 16C \end{aligned}$$

ได้ $C=-1$ และสำหรับการหาค่า A เพื่อความสะดวกจะให้ $s=0$

$$\begin{aligned} (0)^2+9\cdot(0)+2 &= A(0-1)(0+3)+3(0+3)-1(0-1)^2 \\ 2 &= -3A+9-1 \\ -6 &= -3A \end{aligned}$$

และได้ $A=2$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)} &= \frac{2}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2} + \frac{-1}{s+3} \\ &= \frac{2}{s-1} + \frac{3}{(s-1)^2} - \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของ $F(s)$ คือ

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}+\frac{3}{(s-1)^2}-\frac{1}{s+3}\right\} \\
&= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)^2}\right\} \\
&\quad -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \\
&= 2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}+3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} \\
&\quad -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} \\
&= 2e^x+3e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}-e^{-3x} \\
&= 2e^x+3xe^x-e^{-3x}
\end{aligned}
$$

ในบางครั้ง เราไม่อาจแยกตัวประกอบฟังก์ชัน $Q(s)$ (ส่วนของฟังก์ชันตรรกยะ) ให้อยู่ในรูป

$$Q(s)=(s-r_1)^{m_1}(s-r_2)^{m_2}\cdots(s-r_n)^{m_n}$$

ซึ่งเป็นรูปของผลคูณของตัวประกอบ $(s-r_i)$, $i=1,\ldots,n$ ได้ แต่ถ้าพบว่า Q(s) มีพจน์ $(s-\alpha)^2+\beta^2$ เป็นตัวประกอบเราอาจจะสามารถหาการแปลงลาปลาซผกผัน ของฟังก์ชัน $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ ได้ โดยถ้า

$$Q(s)=(s-r_1)^{m_1}\cdots(s-r_{n_1})^{m_{n_1}}\left((s-\alpha_1)^2+{\beta_1}^2\right)^{\gamma_1}\cdots\left((s-\alpha_{n_2})^2+{\beta_{n_2}}^2\right)^{\gamma_{n_2}}$$

ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{P(s)}{Q(s)} &= \frac{A_{11}}{s-r_1}+\frac{A_{12}}{(s-r_1)^2}+\cdots+\frac{A_{1m_1}}{(s-r_1)^{m_1}} \\
&\quad +\frac{A_{21}}{s-r_2}+\frac{A_{22}}{(s-r_2)^2}+\cdots+\frac{A_{2m_2}}{(s-r_2)^{m_2}} \\
&\quad\quad \vdots \\
&\quad +\frac{A_{n_11}}{s-r_{n_1}}+\frac{A_{n_12}}{(s-r_{n_1})^2}+\cdots+\frac{A_{n_1m_{n_1}}}{(s-r_{n_1})^{m_{n_1}}} \\
&\quad +\frac{B_{11}x+C_{11}}{(s-\alpha_1)^2+{\beta_1}^2}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{\left((s-\alpha_1)^2+{\beta_1}^2\right)^2}+\cdots+\frac{B_{1\gamma_1}x+C_{1\gamma_1}}{\left((s-\alpha_1)^2+{\beta_1}^2\right)^{\gamma_1}} \\
&\quad +\frac{B_{21}x+C_{21}}{(s-\alpha_2)^2+{\beta_2}^2}+\frac{B_{22}x+C_{22}}{\left((s-\alpha_2)^2+{\beta_2}^2\right)^2}+\cdots+\frac{B_{2\gamma_2}x+C_{2\gamma_2}}{\left((s-\alpha_2)^2+{\beta_2}^2\right)^{\gamma_2}} \\
&\quad\quad \vdots \\
&\quad +\frac{B_{n_21}x+C_{n_21}}{(s-\alpha_{n_2})^2+{\beta_{n_2}}^2}+\frac{B_{n_22}x+C_{n_22}}{\left((s-\alpha_{n_2})^2+{\beta_{n_2}}^2\right)^2}+\cdots+\frac{B_{n_2\gamma_1}x+C_{n_2\gamma_1}}{\left((s-\alpha_{n_2})^2+{\beta_{n_2}}^2\right)^{\gamma_{n_2}}}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 5.16. จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจากเราไม่สามารถแยกตัวประกอบพหุนาม $f(s) = s^2 - 2s + 5$ ได้ ดังนั้นเราจัดรูปฟังก์ชันตรรกยะใหม่เป็น

$$\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)} = \frac{As+B}{s^2-2s+5} + \frac{C}{s+1}$$

เมื่อ A, B และ C เป็นจำนวนจริง, เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)} &= \frac{As+B}{s^2-2s+5} + \frac{C}{s+1}\\ &= \frac{(As+B)(s+1)+C(s^2-2s+5)}{(s^2-2s+5)(s+1)}\end{aligned}$$

เมื่อนำ $(s^2-2s+5)(s+1)$ คูณทั้งสองข้างของสมการ ก็จะได้

$$2s^2+10s = (As+B)(s+1)+C(s^2-2s+5)$$

เพื่อจะกำจัดพจน์ที่มีตัวประกอบ $(s+1)$ ให้ $s=-1$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}2(-1)^2+10(-1) &= [A(-1)+B](-1+1)+C\left[(-1)^2-2(-1)+5\right]\\ -8 &= 0+C(8)\\ &= 8C\end{aligned}$$

ดังนั้น $C=-1$ และในทำนองเดียวกัน ให้ $s=0$

$$\begin{aligned}2(0)^2+10(0) &= [A(0)+B](0+1)-\left[(0)^2-2(0)+5\right]\\ 0 &= B-5\end{aligned}$$

ได้ $B=5$ และสำหรับการหาค่า A เพื่อความสะดวกจะให้ $s=1$

$$\begin{aligned}2(1)^2+10(1) &= [A(1)+5](1+1)-\left[(1)^2-2(1)+5\right]\\ 12 &= 2A+10-4\\ 6 &= 2A\end{aligned}$$

และได้ $A = 3$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)} &= \frac{3s+5}{s^2-2s+5} + \frac{-1}{s+1} \\ &= \frac{3s+5}{s^2-2s+5} - \frac{1}{s+1}\end{aligned}$$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของ $F(s)$ คือ

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2-2s+5} - \frac{1}{s+1}\right\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{s^2-2s+5}\right\} - \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s^2-2\cdot 1s+1^2)+4}\right\} - e^{-x} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+5}{(s-1)^2+2^2}\right\} - e^{-x} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3s+(3-3)+5}{(s-1)^2+2^2}\right\} - e^{-x} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(3s-3)+(5+3)}{(s-1)^2+2^2}\right\} - e^{-x} \\ &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3(s-1)+8}{(s-1)^2+2^2}\right\} - e^{-x} \\ &= 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2}\right\} + \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{8}{(s-1)^2+2^2}\right\} - e^{-x} \\ &= 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1)}{(s-1)^2+2^2}\right\} + 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2+2^2}\right\} - e^{-x} \\ &= 3e^{x}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} + 4e^{x}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\} - e^{-x} \\ &= 3e^{x}\cos(2x) + 4e^{x}\sin(2x) - e^{-x}\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันต่อไปนี้

(a) $\dfrac{30}{s^4}$

(b) $\dfrac{3}{s+8}$

(c) $\dfrac{1}{s^3}+\dfrac{6}{s^2+4}$

(d) $\dfrac{1}{s^2+s}$

(e) $\dfrac{4}{s^2+9}$

(f) $\dfrac{s}{s(s-3)}$

(g) $\dfrac{1}{s(s^2-9)}$

(h) $\dfrac{1}{s^2(s^2-a^2)}$

(i) $\dfrac{1}{s^2-s^4}$

(j) $\dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$

(k) $\dfrac{3}{(s+5)^8}$

(l) $\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$

(m) $\dfrac{2}{s^2+3s-4}$

(n) $\dfrac{2s+2}{s^2+2s+1}$

(o) $\dfrac{2s-3}{s^2-4}$

(p) $\dfrac{2s}{s^2-s-6}$

(q) $\dfrac{1}{s^3+5s^2}$

(r) $\dfrac{1}{s^4-8s^2+16}$

2. จงหา $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ เมื่อ

(a) $F(s)=\dfrac{1}{s^2+4s+8}$

(b) $F(s)=\dfrac{2s+16}{s^2+4s+13}$

(c) $F(s)=\dfrac{3s-15}{2s^2-4s+10}$

(d) $F(s)=\dfrac{s-1}{2s^2+s-6}$

(e) $F(s)=\dfrac{s+1}{s^2+2s+10}$

(f) $F(s)=\dfrac{s}{s^2+s-2}$

(g) $F(s)=\dfrac{1}{(s-3)(s^2+2s+2)}$

(h) $s^2F(s)-4F(s)=\dfrac{5}{s+1}$

(i) $sF(s)-4F(s)=\dfrac{s}{s^2+1}$

(j) $s^2F(s)+sF(s)-6F(s)=\dfrac{s^2+4}{s^2+s}$

(k) $sF(s)-2F(s)=\dfrac{10s^2+12s+14}{s^2-2s+2}$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า **??**)

5.4 การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซเพื่อหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

จากทฤษฎีบทการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ 5.4 และ 5.5 เราสามารถนำมาประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาค่าตั้งต้นได้ ตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง 5.17. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้โดยการประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซ

$$y'' - y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0 \tag{5.20}$$

วิธีทำ เมื่อเราหาการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของสมการ (5.20) ก็จะได้ว่า

$$\mathscr{L}\{y'' - y' - 2y\} \;=\; \mathscr{L}\{0\}$$

โดยคุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{y'' - y' - 2y\} &= \mathscr{L}\{y''\} - \mathscr{L}\{y'\} - \mathscr{L}\{2y\} \\
&= \left[s^2\mathscr{L}\{y\} - sy(0) - y'(0)\right] - \left[s\mathscr{L}\{y\} - y(0)\right] - 2\mathscr{L}\{y\} \\
&= (s^2 - s - 2)\mathscr{L}\{y\} - s(1) - 0 + 1 \\
&= (s^2 - s - 2)\mathscr{L}\{y\} - s + 1
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\mathscr{L}\{0\} = 0$ ดังนั้น เราได้

$$(s^2 - s - 2)\mathscr{L}\{y\} - s + 1 = 0$$

ให้ $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}$ เมื่อจัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\begin{aligned}
(s^2 - s - 2)Y(s) &= s - 1 \\
Y(s) &= \frac{s-1}{s^2 - s - 2}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}$ ดังนั้น $y(x) = \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\}$

$$y(x) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2 - s - 2}\right\}$$

สำหรับการหาการแปลงลาปลาซผกผันของ $\dfrac{s-1}{s^2 - s - 2}$ เราจะทำได้โดยการแยกเศษส่วนย่อย

$$\frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

เมื่อคูณทั้งสองข้างของสมการด้วย $(s+1)(s-2)$ ได้สมการ

$$s-1 = A(s-2)+B(s+1)$$

ให้ $s=-1$ เราได้

$$\begin{aligned}(-1)-1 &= A(-1-2)+B(-1+1)\\ -2 &= -3A\end{aligned}$$

ได้ $A=\dfrac{2}{3}$ และ เมื่อให้ $s=2$ ได้

$$\begin{aligned}(2)-1 &= A(2-2)+B(2+1)\\ 1 &= 3B\end{aligned}$$

ได้ $B=\dfrac{1}{3}$ ซึ่งทำให้เราได้ว่า ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น (5.20) คือ

$$\begin{aligned}y(x)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2-s-2}\right\} &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{3(s+1)}+\frac{1}{3(s-2)}\right\}\\ &= \frac{2}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\}+\frac{1}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}\\ &= \frac{2}{3}e^{-x}+\frac{1}{3}e^{2x}\end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่ผ่านมาเป็นการประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเอกพันธุ์ ตัวอย่างที่จะกล่าวถึงต่อไปอีกสองตัวอย่าง จะเป็นตัวอย่างการหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นของสมการไม่เอกพันธุ์ โดยการใช้การแปลงลาปลาซ

ตัวอย่าง 5.18. จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y''-2y'+5y=-8e^{-x}, \qquad y(0)=2,\ y'(0)=12 \tag{5.21}$$

วิธีทำ เมื่อเราหาการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของสมการ (5.21) ก็จะได้

$$\mathscr{L}\{y''-2y'+5y\} = \mathscr{L}\left\{-8e^{-x}\right\}$$

โดยคุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y''-2y'+5y\} &= \mathscr{L}\{y''\}-2\mathscr{L}\{y'\}+5\mathscr{L}\{y\}\\ &= \left[s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)\right]-2\left[s\mathscr{L}\{y\}-y(0)\right]+5\mathscr{L}\{y\}\\ &= (s^2-2s+5)\mathscr{L}\{y\}-s(2)-12+2(2)\\ &= (s^2-2s+5)\mathscr{L}\{y\}-2s-8\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{-8e^{-x}\} &= -8\mathscr{L}\left\{e^{-x}\right\}\\ &= \frac{-8}{s+1}\end{aligned}$$

เมื่อให้ $Y(s)=\mathscr{L}\{y\}$ เราจะได้

$$(s^2-2s+5)Y(s)-2s-8=\frac{-8}{s+1}$$

และเราสามารถจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{2s+8}{s^2-2s+5}-\frac{8}{(s+1)(s^2-2s+5)}\\ &= \frac{(2s+8)(s+1)-8}{(s+1)(s^2-2s+5)}\\ &= \frac{2s^2+10s}{(s+1)(s^2-2s+5)}\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$y(x)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+10s}{(s+1)(s^2-2s+5)}\right\}$$

เราสามารถใช้วิธีแยกเศษส่วนย่อยเพื่อช่วยในการหาการแปลงลาปลาซผกผันได้ ดังนั้น

$$\frac{2s^2+10s}{(s+1)(s^2-2s+5)}=\frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2-2s+5}$$

เมื่อคูณด้วย $(s+1)(s^2-2s+5)$ ทั้งสองข้าง ก็จะได้

$$2s^2+10s=A(s^2-2s+5)+(Bs+C)(s+1)$$

เมื่อ $s=-1$ ได้

$$\begin{aligned}2(-1)^2+10(-1) &= A\left[(-1)^2-2(-1)+5\right]+(Bs+C)(-1+1)\\ -8 &= 8A+0\end{aligned}$$

ได้ $A=-1$ และเมื่อ $s=0$ ได้

$$\begin{aligned}0 &= -1(0-0+5)+(0+C)(0+1)\\ 0 &= -5+C\end{aligned}$$

ได้ $C = 5$ และเมื่อ $s = 1$ ได้

$$\begin{aligned} 2 + 10 &= -1(1 - 2 + 5) + (B + 5)(1 + 1) \\ 12 &= -4 + 2B + 10 \\ 6 &= 2B \end{aligned}$$

ได้ $B = 3$ ซึ่งจะจัดรูปอีกครั้งได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{2s^2 + 10s}{(s+1)(s^2 - 2s + 5)} &= \frac{-1}{s+1} + \frac{3s + 5}{s^2 - 2s + 5} \\ &= \frac{-1}{s+1} + \frac{3s + (-3 + 3) + 5}{s^2 - 2s + 1 + 4} \\ &= \frac{-1}{s+1} + \frac{(3s - 3) + (3 + 5)}{(s-1)^2 + 2^2} \\ &= \frac{-1}{s+1} + \frac{3s - 3}{(s-1)^2 + 2^2} + \frac{8}{(s-1)^2 + 2^2} \\ &= -\frac{1}{s+1} + 3\frac{(s-1)}{(s-1)^2 + 2^2} + 4\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{s+1} + 3\frac{(s-1)}{(s-1)^2 + 2^2} + 4\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2}\right\} \\ &= -\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + 3\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{(s-1)}{(s-1)^2 + 2^2}\right\} + 4\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)^2 + 2^2}\right\} \\ &= -e^{-x} + 3e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 2^2}\right\} + 4e^x\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2 + 2^2}\right\} \\ &= -e^{-x} + 3e^x \cos 2x + 4e^x \sin 2x \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของปัญหค่าตั้งต้น (5.21) คือ

$$y(x) = -e^{-x} + 3e^x \cos 2x + 4e^x \sin 2x$$

ตัวอย่าง 5.19. จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + y = x, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -2$$

วิธีทำ เมื่อเราหาการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างของสมการ ก็จะได้

$$\mathscr{L}\{y'' + y\} = \mathscr{L}\{x\}$$

โดยคุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y''+y\} &= \mathscr{L}\{y''\}+\mathscr{L}\{y\}\\ &= \left[s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)\right]+\mathscr{L}\{y\}\\ &= (s^2+1)\mathscr{L}\{y\}-s(1)-(-2)\\ &= (s^2+1)\mathscr{L}\{y\}-s+2\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\mathscr{L}\{x\}=\frac{1}{s^2}$$

เมื่อให้ $Y(s)=\mathscr{L}\{y\}$ เราจะได้

$$(s^2+1)Y(s)-s+2=\frac{1}{s^2}$$

และเราสามารถจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{s-2}{s^2+1}+\frac{1}{s^2(s^2+1)}\\ &= \frac{s}{s^2+1}-\frac{2}{s^2+1}+\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}\\ &= \frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s^2+1}\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\begin{aligned}y(x) &= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2}-\frac{3}{s^2+1}\}\\ &= \mathscr{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}+\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}-3\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}\\ &= \cos x+x-3\sin x\end{aligned}$$

นอกจากนี้ เราอาจจะประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซ หาผลเฉลยของ**ปัญหาค่าขอบ** ได้เช่นกัน

ตัวอย่าง 5.20. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ

$$y''+9y=\cos 2x, \qquad y(0)=1,\ y(\frac{\pi}{2})=-1 \tag{5.22}$$

วิธีทำ เนื่องจากเรายังไม่ทราบค่าของ $y'(0)$ ดังนั้น เราจะสมมติให้

$$y'(0)=c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวบางจำนวน และได้แปลงลาปลาซของสมการ คือ

$$\mathscr{L}\{y''+9y\}=\mathscr{L}\{\cos 2x\}$$

โดยคุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ เราได้ว่า

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y''+9y\} &= \mathscr{L}\{y''\}+9\mathscr{L}\{y\}\\ &= \left[s^2\mathscr{L}\{y\}-sy(0)-y'(0)\right]+9\mathscr{L}\{y\}\\ &= (s^2+9)\mathscr{L}\{y\}-s(1)-c\\ &= (s^2+9)\mathscr{L}\{y\}-s-c\end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$\mathscr{L}\{\cos 2x\}=\frac{s}{s^2+2^2}=\frac{s}{s^2+4}$$

เมื่อให้ $Y(s)=\mathscr{L}\{y\}$ เราจะได้

$$(s^2+9)Y(s)-s-c=\frac{s}{s^2+4}$$

และเราสามารถจัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{s+c}{s^2+9}+\frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}\\ &= \frac{s}{s^2+9}+\frac{c}{s^2+9}+\frac{s}{5(s^2+4)}-\frac{s}{5(s^2+9)}\\ &= \frac{4}{5}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)+\frac{c}{3}\left(\frac{3}{s^2+9}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\\ &= \frac{4}{5}\left(\frac{s}{s^2+3^2}\right)+\frac{c}{3}\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right)\end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์คือ

$$\begin{aligned}y(x) &= \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{4}{5}\left(\frac{s}{s^2+3^2}\right)+\frac{c}{3}\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right)\right\}\\ &= \frac{4}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+3^2}\right\}+\frac{c}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}+\frac{1}{5}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\}\\ &= \frac{4}{5}\cos 3x+\frac{c}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\cos 2x\end{aligned}$$

เนื่องจาก $y(\frac{\pi}{2}) = -1$ เมื่อแทนค่าเราได้ว่า

$$\begin{aligned} y(\frac{\pi}{2}) = -1 &= \frac{4}{5}\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{c}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5}\cos\pi \\ &= \frac{4}{5}(0) + \frac{c}{3}(-1) + \frac{1}{5}(-1) \\ &= -\frac{c}{3} - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

เมื่อแก้สมการ ก็จะได้ $c = \frac{12}{5}$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าขอบ (5.22) คือ

$$y(x) = \frac{4}{5}\cos 3x + \frac{4}{5}\sin 3x + \frac{1}{5}\cos 2x$$

แบบฝึกหัด

จงประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

1. $y'' - 2y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
2. $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$
3. $y'' - 2y' - 2y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0$
4. $y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1$
5. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1$
6. $y'' - 2y' + 2y = \cos x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
7. $y'' - 2y' + 2y = e^{-x}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
8. $y'' + 2y' + y = 4e^{-x}, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1$
9. $y'' - 6y' + 8y = 2, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$
10. $y'' + 4y' + 13y = xe^{-x}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$
11. $y^{(4)} + 2y'' + y = e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

(ดูคำตอบของแบบฝึกหัดที่หน้า **??**)

บทที่ 6
ผลเฉลยในรูปอนุกรมกำลังของสมการเชิงอนุพันธ์

ในเนื้อหาที่ผ่านมา ได้กล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น ทั้งเอกพันธุ์ และไม่เอกพันธุ์สังเกตได้ว่าวิธีการหาผลเฉลยส่วนใหญ่ จะเป็นการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และ การแปลงสมการเชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นค่าคงตัว ให้อยู่ในรูปสมการใหม่ ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์ที่ค่าคงตัว (สมการโคชี-ออยเลอร์)

ในการศึกษาเรื่องสมการเชิงอนุพันธ์นั้น สมการเชิงเส้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว เป็นเพียงรูปแบบหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์เท่านั้น สำหรับเนื้อหาในบทนี้ จะขยายแนวความคิดในการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ โดยการพิจารณาผลเฉลยให้อยู่ในรูป"**อนุกรมกำลัง**" ซึ่งวิธีนี้สามารถนำไปใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ได้หลากหลายรูปแบบขึ้น โดยสามารถนำไปประยุกต์ใช้หาผลเฉลยได้ทั้งสมการเชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว และ สัมประสิทธิ์ไม่เป็นค่าคงตัว

สำหรับการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่เป็นค่าคงตัวนั้น ผู้อ่านอาจจะประยุกต์ใช้ขั้นตอน**วิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม**เข้ามาช่วยดังนี้

1. หาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง y_h โดยใช้วิธีพิจารณาผลเฉลยให้อยู่ในรูปของอนุกรมกำลัง
2. ใช้ขั้นตอนวิธีการแปรผันของตัวแปรเสริมหาผลเฉลยเฉพาะ y_p
3. ซึ่งผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรจะอยู่ในรูป

$$y = y_h + y_p$$

6.1 บทนิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับอนุกรมกำลัง

บทนิยาม 6.1. เราเรียกรูปแบบอนุกรมอนันต์[1]

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots\,, \tag{6.1}$$

ว่า*อนุกรมกำลังของ x รอบจุด x_0* (power series of x around point x_0), เมื่อ $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ

- เรียก $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots$ ว่า*สัมประสิทธิ์ของอนุกรม*
- เรียก x_0 ว่า*จุดศูนย์กลาง*
- x คือ *ตัวแปร*

สำหรับกรณี $x_0 = 0$ เราเรียกอนุกรมอนันต์

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\,, \tag{6.2}$$

ว่า*อนุกรมกำลังของ x*

หมายเหตุ

1. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = \lim_{M\to\infty}\sum_{m=1}^{M} a_m(x-x_0)^m$
2. เพื่อความสะดวก เรากำหนดให้ $(x-x_0)^0$ ซึ่งเป็นพจน์แรกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m$ มีค่าเป็น 1 แม้ว่า $x = x_0$ ก็ตาม (และในทำนองเดียวกัน พจน์ x^0 ของอนุกรม $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ เราก็จะกำหนดให้มีค่าเป็น 1)
3. ในการศึกษาเรื่องอนุกรมกำลัง สัมประสิทธิ์ของอนุกรม อาจจะเป็นจำนวนจริงหรือจำนวน-เชิงซ้อน ก็ได้ สำหรับการศึกษาเรื่องอนุกรมกำลังในบทนี้ จะกำหนดให้สัมประสิทธิ์ของอนุกรม เป็น**จำนวนจริง**เท่านั้น

[1] ดูเรื่อง‘‘อนุกรมอนันต์’’ใน [2, 13]

4. ในเอกสารบางฉบับ อาจจะกำหนดรูปแบบของอนุกรมกำลังให้ประกอบด้วยพจน์

$$\frac{1}{x-x_0}, \frac{1}{(x-x_0)^2}, \frac{1}{(x-x_0)^3}, \dots$$

เช่น

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(x-x_0)^m \\ = & \cdots + a_{-2}(x-x_0)^{-2} + a_{-1}(x-x_0)^{-1} + a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \\ = & \cdots + \frac{a_{-2}}{(x-x_0)^2} + \frac{a_{-1}}{x-x_0} + a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

แต่เนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงอนุกรมกำลังที่มีเฉพาะพจน์ 1, $x-x_0$, $(x-x_0)^2$, $(x-x_0)^3$, $\dots$ เท่านั้น

5. เพื่อความสะดวก จะขอเรียก "อนุกรมกำลังของ x รอบจุด x_0" และ "อนุกรมกำลังของ x" ว่า*"อนุกรมกำลัง"*

ตัวอย่าง 6.1. ตัวอย่างของฟังก์ชัน ที่สามารถเขียนได้ในรูปอนุกรมกำลัง

- $\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots$ เมื่อ $|x| < 1$
  อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = 0$
  มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1, \dots$
  อนุกรมกำลังนี้มีชื่อเรียกเฉพาะคือ *อนุกรมเรขาคณิต* (geometric series)

- $e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$
  อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = 0$
  มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_0 = \frac{1}{0!} = 1,\ a_1 = \frac{1}{1!} = 1,\ a_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}, \dots$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - + \cdots$
  อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = 0$
  มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_m = \begin{cases} \frac{(-1)^{m/2}}{m!} & \text{เมื่อ } m = 0, 2, 4, \dots \\ 0 & \text{เมื่อ } m = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$

- $\cos x = -(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{2})^3 - \frac{1}{5!}(x - \frac{\pi}{2})^5 + \frac{1}{7!}(x - \frac{\pi}{2})^7 - + \cdots$

อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = \frac{\pi}{2}$

มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_m = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m = 0, 2, 4, \ldots \\ \dfrac{(-1)^{(m+1)/2}}{m!} & \text{เมื่อ } m = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - + \cdots$
  อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = 0$
  มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_m = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m = 0, 2, 4, \ldots \\ \dfrac{(-1)^{(m-1)/2}}{m!} & \text{เมื่อ } m = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$
- $\sin x = 1 - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{2})^2 + \frac{1}{4!}(x - \frac{\pi}{2})^4 - \frac{1}{6!}(x - \frac{\pi}{2})^6 + - \cdots$
  อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = \frac{\pi}{2}$
  มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_m = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{m/2}}{m!} & \text{เมื่อ } m = 0, 2, 4, \ldots \\ 0 & \text{เมื่อ } m = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$
- $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + - \cdots$
  อนุกรมกำลังนี้มีจุดศูนย์กลาง $x_0 = 1$
  มีสัมประสิทธิ์ของอนุกรม $a_m = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m = 0 \\ \dfrac{(-1)^{m+1}}{m} & \text{เมื่อ } m = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$

อนุกรมกำลังที่จะนำมาใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์จะกำหนดให้มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

คุณสมบัติที่สำคัญของอนุกรมกำลัง

1. อนุกรมกำลัง $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m$ ลู่เข้าทุก ๆ จุด $x \in I$ เมื่อ I เป็นช่วงที่พิจารณาหรือกล่าวอีกอย่างหนึ่งคือ

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{m=0}^{M} a_m(x-x_0)^m$$

หาค่าได้ทุก ๆ $x \in I$

2. ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m$ ลู่เข้า ทุก ๆ $x \in I_1$ และ $\sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-x_0)^m$ ลู่เข้า ทุก ๆ $x \in I_2$ แล้ว ผลบวกและผลต่างของทั้งสองอนุกรมคือ

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m \pm \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} (a_m \pm b_m)(x-x_0)^m,$$

ซึ่งอนุกรมนี้จะลู่เข้า ทุก ๆ $x \in I_1 \cap I_2$

3. เราสามารถหาผลคูณของอนุกรมได้ดังนี้

$$\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m\right]\left[\sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-x_0)^m\right] = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(x-x_0)^m,$$

สำหรับทุก ๆ $x \in I_1 \cap I_2$ โดยที่

$$c_m = a_0b_m + a_1b_{m-1} + \cdots + a_mb_0$$

4. การเปลี่ยนดัชนี ไม่ทำให้ค่าของอนุกรมเปลี่ยน

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^j$$

5. การเลื่อนค่าของดัชนี ไม่ทำให้ค่าของอนุกรมเปลี่ยน

$$\sum_{m=k}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k}(x-x_0)^{m+k}$$

6. ถ้า

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-x_0)^m,$$

ทุก ๆ $x \in I$ แล้ว

$$a_n = b_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

และถ้า

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = 0,$$

ทุก ๆ $x \in I$ แล้ว

$$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = 0$$

7.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m\right] &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + m a_m (x - x_0)^{m-1} + \cdots \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m a_m (x - x_0)^{m-1} \\
\frac{d^2}{dx^2}\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m\right] &= 2a_2 + 6(x - x_0) + \cdots + (m-1) m a_m (x - x_0)^{m-2} + \cdots \\
&= \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m (x - x_0)^{m-2} \\
&\vdots \\
\frac{d^k}{dx^k}\left[\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m\right] &= \sum_{m=k}^{\infty} m(m-1)\cdots(m-k+1) a_m (x - x_0)^{m-k}
\end{aligned}$$

8. ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ หาอนุพันธ์รอบจุด x_0 ได้ทุก ๆ อันดับ และอนุพันธ์ที่หาได้ต่อเนื่อง เราเรียกอนุกรมกำลัง

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m \tag{6.3}$$

ว่า*อนุกรมเทย์เลอร์*[2] (Taylor series) ของฟังก์ชัน f รอบจุด x_0

ถ้าอนุกรมนี้**ลู่เข้าในช่วง** $x \in I$ จะได้ว่า

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m, \qquad x \in I$$

[2]ดูเรื่องอนุกรมเทย์เลอร์ในบทที่ **??** หน้า **??**

6.2 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้อนุกรมกำลัง

ในการศึกษาเรื่องการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้อนุกรมกำลัง จะมีขั้นตอนในการแก้ปัญหาดังต่อไปนี้

ขั้นตอนการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้อนุกรมกำลัง

1. สมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

หรือ อาจจะสมมติให้ $y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \cdots$ สำหรับกรณีที่การสมมติให้y เป็นอนุกรมกำลังรอบจุด 0 ไม่สามารถหาคำตอบได้ โดย x_0 อาจจะมีค่าเป็น 1 หรือ มีค่าอื่น โดยพิจารณาจากเงื่อนไขค่าตั้งต้นที่กำหนดให้

2. แทนค่า y และอนุพันธ์ของ y ลงในสมการ

3. พยายามจัดรูปให้อยู่ในรูปสมการใหม่

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots = 0$$

(หรือ $b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + b_3(x - x_0)^3 + \cdots = 0$)

4. โดยคุณสมบัติของอนุกรมอนันต์ จะได้ว่า $b_0 = b_1 = b_2 = \ldots = 0$ ดังนั้น เราจะได้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} b_0 &= 0, \\ b_1 &= 0, \\ &\vdots \\ b_n &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{6.4}$$

5. แก้ระบบระบบสมการ (6.4) เพื่อหาค่า $a_0, a_1, a_2, \ldots$

6. แทนค่า $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ลงในผลเฉลย

ตัวอย่าง 6.2. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y' - y = 0 \tag{6.5}$$

วิธีทำ เราจะหาผลเฉลยของสมการ (6.5) โดย

1. สมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

2. พบว่าอนุพันธ์ของ y คือ

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

   เมื่อแทนค่าลงในสมการ ทำให้ได้

$$\big(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots\big) - \big(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\big) = 0$$

3. จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$(a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots + (na_n - a_{n-1})x^{n-1} + \cdots = 0$$

4. เราพบว่า

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 0, \\ 2a_2 - a_1 &= 0, \\ &\vdots \\ na_n - a_{n-1} &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

5. เราสามารถแก้ระบบสมการได้คือ

$$a_1 = a_0,\ a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2!},\ a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{3}\frac{a_0}{2!} = \frac{a_0}{3!}, \cdots,\ a_n = \frac{a_0}{n!}, \cdots$$

6. เราได้ว่าผลเฉลยของสมการ (6.5) คือ

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_0 x + \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{3!}x^3 + \cdots \\ &= a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= a_0 e^x \end{aligned}$$

พบว่าผลเฉลยที่ได้ สอดคล้องกับผลเฉลยที่ได้จากตัวอย่าง 2.6 หน้า 16

ตัวอย่าง 6.3. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y' = 2xy \tag{6.6}$$

วิธีทำ เราจะหาผลเฉลยของสมการ (6.6) โดย

1. สมมติให้ผลเฉลยอยู่ในรูป

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

2. พบว่าอนุพันธ์ของ y คือ

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots$$

   เมื่อแทนค่าลงในสมการ ทำให้ได้

$$\begin{aligned} \left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots\right) &= 2x\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right) \\ &= \left(2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + 2a_3 x^4 + \cdots\right) \end{aligned}$$

3. จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$a_1 + (2a_2 - 2a_0)x + (3a_3 - 2a_1)x^2 + \cdots + (na_n - 2a_{n-2})x^{n-1} + \cdots = 0$$

4. เราพบว่า

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ 2a_2 - 2a_0 &= 0, \\ 3a_3 - 2a_1 &= 0, \\ &\vdots \\ na_n - 2a_{n-2} &= 0, \\ (n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} &= 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

5. เราสามารถแก้ระบบสมการได้คือ

$$a_1 = \tfrac{3}{2}a_3 = \tfrac{3}{2}\left(\tfrac{5}{3}a_5\right) = \cdots = \tfrac{2n-1}{2}a_{2n-1} = \cdots = 0$$
$$a_2 = a_0,\ a4 = \tfrac{2a_2}{4} = \tfrac{a_0}{2!},\ a_6 = \tfrac{2a_4}{6} = \tfrac{1}{3}a_4 = \tfrac{a_0}{3!}, \cdots, a_{2n} = \tfrac{a_0}{n!} = \cdots$$

6. เราได้ว่าผลเฉลยของสมการ (6.6) คือ

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_0x^2 + \frac{a_0}{2!}x^4 + \frac{a_0}{3!}x^6 + \cdots \\ &= a_0(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots) \\ &= a_0\left(1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= a_0e^{x^2} \end{aligned}$$

หมายเหตุ ผู้อ่าน อาจจะตรวจสอบผลเฉลยที่ได้นี้ กับผลเฉลยที่ได้จากสมการ (6.6) ซึ่งได้จากการพิจารณาให้เป็น สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งชนิด “สมการแยกกันได้”

ตัวอย่าง 6.4. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y'' + y = 0 \tag{6.7}$$

วิธีทำ สำหรับการหาผลเฉลยของสมการ (6.7) สามารถทำได้โดย

1. สมมติให้ผลเฉลย y อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังของ x

2. อนุพันธ์อันดับที่สองของผลเฉลย y คือ

$$y'' = (1 \cdot 2)a_2 + (2 \cdot 3)a_3 x + (3 \cdot 4)a_4 x^2 + \cdots$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ (6.7) ทำให้ได้

$$\big((1 \cdot 2)a_2 + (2 \cdot 3)a_3 x + (3 \cdot 4)a_4 x^2 + \cdots\big) + \big(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\big) = 0$$

3. จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$((1 \cdot 2)a_2 + a_0) + ((2 \cdot 3)a_3 + a_1)\, x + ((3 \cdot 4)a_4 + a_2)\, x^2 + \cdots = 0$$

4. โดยคุณสมบัติของอนุกรมกำลัง สัมประสิทธิ์ของอนุกรมต้องเป็นศูนย์ทั้งหมด ทำให้ได้

$$\begin{aligned}
(1 \cdot 2)a_2 + a_0 &= 0, \\
(2 \cdot 3)a_3 + a_1 &= 0, \\
&\vdots \\
(n-1)n a_n + a_{n-2} &= 0, \\
n(n+1)a_{n+1} + a_{n-1} &= 0, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

5. เราพบว่าสามารถเขียนสัมประสิทธิ์ $a_2, a_4, a_6, \ldots$ ในรูป a_0 ได้โดยที่

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{1 \cdot 2} = -\frac{a_0}{2!}, \\
a_4 &= -\frac{a_2}{3 \cdot 4} = -\frac{-a_0}{(3 \cdot 4)2!} = \frac{a_0}{4!}, \\
&\vdots \\
a_{2n} &= (-1)^n \frac{a_0}{(2n)!} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

และเราพบว่าสามารถเขียนสัมประสิทธิ์ $a_3, a_5, a_7, \ldots$ ในรูป a_1 ได้โดยที่

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{a_1}{2\cdot 3} = -\frac{a_1}{3!}, \\ a_5 &= -\frac{a_3}{4\cdot 5} = -\frac{-a_1}{(4\cdot 5)3!} = \frac{a_1}{5!}, \\ &\vdots \\ a_{2n+1} &= (-1)^n \frac{a_1}{(2n+1)!}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

6. ผลเฉลยของสมการคือ

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 - - + + \cdots$$

ซึ่งสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} y &= \left(a_0 - \frac{a_0}{2!}x^2 + \frac{a_0}{4!}x^4 - + \cdots\right) + \left(a_1 x - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_1}{5!}x^5 - + \cdots\right) \\ &= a_0\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - + \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - + \cdots\right) \\ &= a_0 \cos x + a_1 \sin x \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.5. จงหาผลเฉลยของสมการแอรี[3] (Airy's equation)

$$y'' - xy = 0 \tag{6.8}$$

วิธีทำ สำหรับการหาผลเฉลยของสมการ (6.8) สามารถทำได้โดย

1. สมมติให้ผลเฉลย y อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังของ x

2. อนุพันธ์อันดับที่สองของผลเฉลย y คือ

$$y'' = (1\cdot 2)a_2 + (2\cdot 3)a_3 x + (3\cdot 4)a_4 x^2 + \cdots$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ (6.8) ทำให้ได้

$$[(1\cdot 2)a_2 + (2\cdot 3)a_3 x + \cdots] - x\left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right] = 0$$

[3]เซอร์ จอร์จ แอรี (Sir George Airy, 1801-1892) เป็นนักคณิตศาสตร์ และดาราศาสตร์ชาวอังกฤษแอรีได้ศึกษาสมการแอรี เพราะว่าผลเฉลยของสมการมีลักษณะพิเศษคือ เมื่อพิจารณากรณีที่ x ที่น้อยกว่าศูนย์ ผลเฉลยมีค่าแกว่งกวัดในทางบวกและลบ (oscillate) เช่นเดียวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ และสำหรับกรณีที่ x มีค่ามากกว่าศูนย์ ผลเฉลยจะเป็นฟังก์ชันทางเดียว (monotone function) เช่นเดียวกับฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิก (hyperbolic function)

3. จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$(1\cdot 2)a_2 + ((2\cdot 3)a_3 - a_0)\,x + ((3\cdot 4)a_4 - a_1)\,x^2 + ((4\cdot 5)a_5 - a_2)\,x^3 + \cdots = 0$$

4. โดยคุณสมบัติของอนุกรมกำลัง สัมประสิทธิ์ของอนุกรมต้องเป็นศูนย์ทั้งหมด ทำให้ได้

$$\begin{aligned}
a_2 &= 0,\\
(2\cdot 3)a_3 - a_0 &= 0,\\
(3\cdot 4)a_4 - a_1 &= 0,\\
(4\cdot 5)a_5 - a_2 &= 0,\\
&\vdots\\
n(n+1)a_{n+1} - a_{n-2} &= 0,\\
(n+1)(n+2)a_{n+2} - a_{n-1} &= 0,\\
(n+2)(n+3)a_{n+3} - a_n &= 0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

5. • เราพบว่าสามารถเขียนสัมประสิทธิ์ a_5 สามารถเขียนได้ในรูปของสัมประสิทธิ์ a_2, a_8 สามารถเขียนได้ในรูปของสัมประสิทธิ์ $a_5, \ldots$
ซึ่งก็คือ $a_{3n+2} = \dfrac{a_{3n-1}}{(3n+1)(3n+2)},\ n = 1, 2, 3, \ldots$ นั่นทำให้

$$a_2 = a_5 = \cdots = a_{3n+2} = \cdots = 0$$

• สำหรับ $a_1, a_4, a_7,\ a_{10}, \ldots$ มีค่า

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{a_0}{2\cdot 3},\\
a_6 &= \frac{a_3}{5\cdot 6} = \frac{a_0}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)},\\
a_9 &= \frac{a_6}{8\cdot 9} = \frac{a_0}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)(8\cdot 9)},\\
&\vdots\\
a_{3n} &= \frac{a_0}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots(3n-4)(3n-3)(3n-1)(3n)}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

- $a_0, a_3, a_6,\ a_9, \ldots$ หาค่าได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
a_4 &= \frac{a_1}{3\cdot 4},\\
a_7 &= \frac{a_4}{6\cdot 7} = \frac{a_1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)},\\
a_{10} &= \frac{a_7}{9\cdot 10} = \frac{a_1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)(9\cdot 10)},\\
&\vdots\\
a_{3n+1} &= \frac{a_1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\cdots(3n-3)(3n-2)(3n)(3n+1)}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

6. ผลเฉลยของสมการคือ

$$
\begin{aligned}
y &= a_0\left(1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)}+\cdots\right)\\
&= +a_1\left(x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)}+\cdots\right)\\
y &= a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)}\right)+a_1\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)}\right)
\end{aligned}
$$

สังเกตได้ว่าผลเฉลยของสมการแอรี อยู่ในรูป

$$y = a_0y_1 + a_1y_2,$$

เมื่อ a_0 และ a_1 เป็นค่าคงตัวใด ๆ,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)},\\
y_2 &= x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)}
\end{aligned}
$$

โดย y_1 และ y_2 เป็นผลเฉลยของสมการแอรีซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้น ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบท 4.5 (หน้า 143) **แต่เราไม่สามารถเขียนผลเฉลย y_1 และ y_2 ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันพื้นฐานทั่วไปที่เรารู้จักได้** เหมือนกับผลเฉลยจากตัวอย่าง 6.2, 6.3 และ 6.4

ตัวอย่าง 6.6. จงหาผลเฉลยของสมการแอรีในรูปอนุกรมกำลังรอบจุด 1

วิธีทำ

1. สมมติให้ผลเฉลย y อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังของ x รอบจุด 1

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n \end{aligned}$$

2. อนุพันธ์อันดับที่สองของผลเฉลย y คือ

$$\begin{aligned} y'' &= (1\cdot 2)a_2 + (2\cdot 3)a_3(x-1) + (3\cdot 4)a_4(x-1)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_n(x-1)^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการแอรี ทำให้ได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n - x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n = 0$$

เนื่องจากพิจารณา x รอบจุด 1 ดังนั้นจะเขียน x ในสมการ $y''-xy=0$ ในรูป $x = 1+(x-1)$ ซึ่งทำให้เราสามารถเขียนสมการแอรีได้ในรูป

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n - [1+(x-1)]\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n \\ =\ & \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{n+1} \\ =\ & \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}(x-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n - \sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}(x-1)^n \\ =\ & 0 \end{aligned}$$

3. จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$[(1\cdot 2)a_2 - a_0] + \sum_{n=1}^{\infty}\left[n(n+1)a_{n+1} - a_{n-1} - a_n\right](x-1)^n = 0$$

4. เนื่องด้วยสัมประสิทธิ์ของอนุกรมต้องเป็นศูนย์ทั้งหมด ทำให้ได้

$$\begin{aligned} 2a_2 &= a_0, \\ (2\cdot 3)a_3 - a_1 - a_0 &= 0 \quad\Rightarrow\quad (2\cdot 3)a_3 = a_1 + a_0, \\ (3\cdot 4)a_4 - a_2 - a_1 &= 0 \quad\Rightarrow\quad (3\cdot 4)a_4 = a_2 + a_1, \\ (4\cdot 5)a_5 - a_3 - a_2 &= 0 \quad\Rightarrow\quad (4\cdot 5)a_5 = a_3 + a_2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

หรือก็คือ

$$\begin{aligned} 2a_2 &= a_0, \\ (n+1)(n+2)a_{n+2} &= a_{n+1} + a_n \qquad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

5. เมื่อแก้สมการทำให้ได้สัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_0}{2}, \\ a_3 &= \frac{a_1 + a_0}{2\cdot 3} = \frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{6} \\ a_4 &= \frac{a_2 + a_1}{3\cdot 4} = \frac{1}{12}\left(\frac{a_0}{2} + a_1\right) = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12} \\ a_5 &= \frac{a_3 + a_2}{4\cdot 5} = \frac{1}{20}\left(\frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6} + \frac{a_0}{2}\right) = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120} \\ &\vdots \end{aligned}$$

6. ผลเฉลยของสมการคือ

$$\begin{aligned} y &= a_0\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots\right] \\ &\quad + a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots\right] \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.7. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้ โดยใช้อนุกรมกำลัง

$$\begin{gathered}(x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2}+3x\frac{dy}{dx}+xy=0 \\ y(0)=4, \qquad y'(0)=6\end{gathered} \tag{6.9}$$

วิธีทำ

1. เนื่องจากปัญหาค่าตั้งต้น (6.9) มีเงื่อนไขค่าตั้งต้นที่จุด $x=0$ ดังนั้นจะสมมติให้ผลเฉลย y อยู่ในรูปของอนุกรมกำลังของ x รอบจุด 0

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

2. อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งและสอง คือ

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \\ y'' &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่าลงในสมการ ทำให้ได้

$$(x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+3x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+x\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$$

3. จัดรูปสมการใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n} \\
& +3\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+1} \\
= & \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n+2} \\
& -2a_2 - 6a_3x - \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n} \\
& +3a_1x + 3\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1} + a_0x + \sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n+1} \\
= & \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)na_nx^n \\
& -2a_2 - 6a_3x - \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^{n} \\
& +3a_1x + 3\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^n + a_0x + \sum_{n=0}^{\infty}a_{n-1}x^n \\
= & -2a_2 + (a_0 + 3a_1 - 6a_3)x \\
& +\sum_{n=2}^{\infty}\left[-(n+1)(n+2)a_{n+2} + n(n+2)a_n + a_{n-1}\right]x^n = 0
\end{aligned}$$

4. เนื่องด้วยสัมประสิทธิ์ของอนุกรมต้องเป็นศูนย์ทั้งหมด ทำให้ได้

$$\begin{aligned}
-a_2 &= 0, \\
-(a_0 + 3a_1 - 6a_3) &= 0, \\
-(n+1)(n+2)a_{n+2} + n(n+2)a_n + a_{n-1} &= 0, \qquad (n = 2, 3, 4, \ldots)
\end{aligned}$$

5. เมื่อแก้สมการทำให้ได้สัมประสิทธิ์

$$\begin{aligned}
a_2 &= 0, \\
a_3 &= \frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2}, \\
\text{และ} \qquad a_{n+2} &= \frac{n}{n+1}a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}a_{n-1}
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
a_4 &= \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3\cdot 4}a_1 = \frac{a_1}{12}, \\
a_5 &= \frac{3}{4}a_3 + \frac{1}{4\cdot 5}a_2 = \frac{3}{4}\left(\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2}\right) = \frac{a_0}{8} + \frac{3a_1}{8}, \\
a_6 &= \frac{4}{5}a_4 + \frac{1}{5\cdot 6}a_3 = \frac{a_1}{15} + \frac{1}{30}\left(\frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{2}\right) = \frac{a_0}{180} + \frac{a_1}{12}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

6. ผลเฉลยของสมการคือ

$$y = a_0\left[1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{8} + \frac{x^6}{180} + \cdots\right] + a_1\left[x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{3x^5}{8} + \frac{x^6}{12}\cdots\right]$$

7. จากเงื่อนไขค่าตั้งต้น

- $y(0) = 4$

$$y(0) = a_0[1 + 0 + 0 + \cdots] + a_1[0 + 0 + 0 + \cdots] = a_0 = 4$$

ซึ่งได้ $a_0 = 4$

- $y'(0) = 6$

เนื่องจาก

$$\frac{dy}{dx} = 4\left[\frac{x^2}{3} + \frac{5x^4}{8} + \frac{x^5}{30} + \cdots\right] + a_1\left[1 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{15x^4}{8} + \frac{x^5}{2}\cdots\right]$$

ดังนั้น

$$y'(0) = 4[0 + 0 + 0 + \cdots] + a_1[1 + 0 + 0 + \cdots] = a_1 = 6$$

ซึ่งได้ $a_1 = 6$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นคือ

$$
\begin{aligned}
y &= 4\left[1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{8} + \frac{x^6}{180} + \cdots\right] + 6\left[x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{3x^5}{8} + \frac{x^6}{12}\cdots\right] \\
&= 4 + 6x + \frac{11x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{11x^5}{4} + \cdots
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ โดยพิจารณาผลเฉลยในรูปของอนุกรมกำลังรอบจุด x_0 ที่กำหนดให้

   (a) $y'' - y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

   (b) $y'' - xy' - y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

   (c) $y'' - 4y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

   (d) $y'' - xy' - y = 0,$ $\quad x_0 = 1$

   (e) $y'' + k^2x^2y = 0,$ $\quad x_0 = 0,\ k$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

   (f) $(1-x)y'' + y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

   (g) $(1-x)y'' + y = 0,$ $\quad x_0 = 1$

   (h) $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

   (i) $y'' + xy' + 2y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

   (j) $xy'' + y' + xy = 0,$ $\quad x_0 = 1$

   (k) $(4-x^2)y'' + 2y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

   (l) $(1-x)y'' + xy' - y = 0,$ $\quad x_0 = 0$

2. จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

   (a) $y'' + x^2y = 0,$ $\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

   (b) $y'' - xy' - y = 0,$ $\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

   (c) $(2+x^2)y'' - xy' + 4y = 0,$ $\quad y(0) = -1,\ y'(0) = 3$

   (d) $y'' + xy' + 2y = 0,$ $\quad y(0) = 4,\ y'(0) = -1$

   (e) $(1-x)y'' + xy' - y = 0,$ $\quad y(0) = -3,\ y'(0) = 2$

   (f) $(4-x^2)y'' + 2y = 0,$ $\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

คำตอบของแบบฝึกหัด

คำตอบของแบบฝึกหัด 1.1 (หน้า 3)

1. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับหนึ่ง เชิงเส้น
2. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย อันดับสอง
3. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับสี่ ไม่เชิงเส้น
4. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับสอง ไม่เชิงเส้น
5. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย อันดับสอง
6. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับสอง เชิงเส้น
7. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับหก ไม่เชิงเส้น
8. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับสอง เชิงเส้น
9. สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย อันดับสี่
10. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับสี่ เชิงเส้น

คำตอบของแบบฝึกหัด 2.3 (หน้า 18)

1. $y = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{x^2}{2} + c$
2. $y = \ln|x| + c$
3. $y = \cos(x) + c$
4. $y = \sec(x) + c$
5. $y = e^{cx}$
6. $y = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}\right)^2 + c$
7. $y = e^{-x^2} + c$
8. $y = e^{-\cos(x)} + c$
9. $y = c(x+14)^4$
10. $y = \frac{1}{x^2 + c}$
11. $y = \sin\left(\sqrt{x} + c\right)$
12. $y = \left(\frac{4}{5}x\sqrt{x} + c\right)^2$
13. $y = \ln|x| - \ln|y-1| + c$
14. $\tan^{-1}(y) = -\tan^{-1}(x) + c$
15. $\frac{1}{y^4} + \frac{1}{x^4} = c$
16. $\cos(y) = \frac{-x^3}{3} + c$
17. $y^2 = c\,(x+2)^4\, e^{-2x} + 1$
18. $r\sin^2\theta = c$

หมายเหตุ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

คำตอบของแบบฝึกหัด 2.4 (หน้า 21)

1. $\ln|y| = 1 - e^{-x}$
2. $\cos(x) + x\sin(x) = y^6 - y - 1$
3. $\cos(x) = \frac{1}{2}y^2 - 1$
4. $x^2 + y^2 = 4$
5. $\ln|y| = \frac{-x^3}{3} - x - \frac{4}{3}$
6. $\ln|y| = -\ln|x| + \ln 4$
7. $3e^{x^2} = 6y - y^6 + 3$
8. $y + \ln|y| = \frac{x^3}{3} - x - 7$
9. $\ln|8 - 3y| = -3x + \ln 4$
10. $e^x + 2xy - 6e^x y = 0$

คำตอบของแบบฝึกหัด 2.5 (หน้า 27)

1. (a) $x^2 - 2xy - y^2 = c$

   (b) $y = x(\ln|x| + c)^2$

   (c) $y = x(\ln|x| + c)^{\frac{1}{2}}$

   (d) $y = x\ln|x| + xc$

   (e) $y = cx^3 - x$

   (f) $y^2 = x^2 + cx^4$

   (g) $y = \frac{cx^3}{1 - cx^2}$

   (h) $\cos\left(\frac{y}{x}\right) = c - \ln|x|$

   (i) $e^{\frac{y}{x}} = 2\ln|x| + c$

   (j) $\ln\left|\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x}\right| = \ln|x| + c$

   หมายเหตุ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. (a) $x^2 + y^2 = 5$

   (b) $x^4 + y^4 = 1$

   (c) $\ln|y| + \ln|x| = \ln 4$

   (d) $2x^4 - y^2 - 4x^2 = 0$

คำตอบของแบบฝึกหัด 2.6 (หน้า 32)

1. (a) $y = 1 + ce^{-x}$

   (b) $y = xe^{-x} + ce^{-x}$

   (c) $y = \frac{1}{2}e^{3x} + ce^{x}$

   (d) $y = \frac{1}{x}\left(\sin(x) + c\right)$

   (e) $y = x^3(x + c)$

   (f) $y = e^{-x}\left(\tan^{-1}(e^x) + c\right)$

   (g) $y = \dfrac{\ln|\sin(x)| + c}{1 + x^2}$

   (h) $y = x^2e^{-x} + ce^{-x} + x^2 - 2x + 2$

   (i) $y = \left(x^2 + c\right)\csc(x)$

   (j) $y = x^2(c - x)$

   (k) $y = \dfrac{1}{x} - \cot(x) + \dfrac{c}{x\sin(x)}$

   (l) $y = e^{x^2}\left(3x^2 + c\right)$

   (m) $y = \dfrac{x^3 + c}{\ln|x|}$

   (n) $y = x^2 + cx^2e^{\frac{1}{x}}$

   หมายเหตุ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. (a) $y = 1$

   (b) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2x}$

   (c) $y = 1 - e^{-\sin(x)}$

   (d) $y = \dfrac{1}{4}x^5 - \dfrac{56}{x^3}$

   (e) $y = -1 + e^{x + \frac{x^2}{2}}$

   (f) $y = \dfrac{1}{3} + \dfrac{16}{3}\left(x^2 + 4\right)^{\frac{3}{2}}$

คำตอบของแบบฝึกหัด 2.7 (หน้า 35)

1. $y = \dfrac{2}{x\left(c - x^2\right)}$

2. $y^2 = \dfrac{2e^{2x}}{c - e^{4x}}$

3. $y = \dfrac{5x^2}{x^5 + c}$

4. $y = \left((x-2)^2 + \dfrac{c}{\sqrt{x-2}}\right)^2$

5. $y = \dfrac{x}{x + c}$

6. $y^4 = \dfrac{2e^{8x^2} + c}{e^{8x^2}}$

7. $y^2 = \dfrac{2}{ce^{2x} - 2x - 1}$

8. $y^3 = \dfrac{3e^{4x} + c}{4e^{3x}}$

9. $y^3 = \dfrac{1}{x^3(2x^3 + c)}$

10. $r = \dfrac{\theta^2}{c - \theta}$

11. $x^2 = \dfrac{1}{t^2\left(2\ln|t| + c\right)}$

12. $x^2 = \dfrac{2te^t + c}{te^t}$

หมายเหตุ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

คำตอบของแบบฝึกหัด 2.8 (หน้า 45)

1. (a) $y = \dfrac{c - x^2}{3x - 4}$

   (b) $x^3 - 2y^2x + 2y^3 = c$

   (c) $-2xy^2 + 2x^2 - 5x + y^2 - 4y = c$

   (d) ไม่เป็นสมการแม่นตรง

   (e) $x - \tan(y)\cos(x) = c$

   (f) $\dfrac{1}{3}x^3 + y\ln|x| + \dfrac{1}{3}y^3 = c$

   (g) $e^x \sin(y) + x\tan(y) = c$

   (h) $xe^y + \sin(x)\cos(y) = c$

   (i) $x^2 + \dfrac{2}{3}\left(x^2 - y\right)^{\frac{3}{2}} = c$

   (j) $\left(\theta^2 + 1\right)\sin(r) = c$

   (k) $\dfrac{x^2}{2} + x\sin y - y^2 = c$

   (l) $2x + e^{xy} - y^2 = c$

   หมายเหตุ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. (a) $x^2y + y + 25 = 0$

   (b) $\dfrac{y}{x^2} + \dfrac{1}{2} = 0$

   (c) $\ln|1 - 3y| + x^3 - \ln 4 = 0$

   (d) $xy^2 + y - 2 = 0$

   (e) $2xy^3 - x^2y^2 - y^4 + 9 = 0$

คำตอบของแบบฝึกหัด 2.9 (หน้า 53)

1. ตัวประกอบปริพันธ์คือ $\frac{1}{x}$

   ผลเฉลยของสมการคือ $\ln|x| - 2y = c$

   (หรือ ตัวประกอบปริพันธ์คือ e^{-2y}

   ผลเฉลยของสมการคือ $xe^{-2y} = \bar{c}$ โดย $|\bar{c}| = e^{c}$)

2. ตัวประกอบปริพันธ์คือ e^{3x}

   ผลเฉลยของสมการคือ $e^{3x}\left(3x^2y + y^3\right) = c$

3. ตัวประกอบปริพันธ์คือ e^{-x}

   ผลเฉลยของสมการคือ $e^{x} + e^{-x}(1-y) = c$

4. ตัวประกอบปริพันธ์คือ y

   ผลเฉลยของสมการคือ $xy - \sin y + y\cos y = c$

5. ตัวประกอบปริพันธ์คือ $\frac{1}{x^2}$

   ผลเฉลยของสมการคือ $3x - \frac{y}{x} + \frac{y^2}{2} = c$

6. ตัวประกอบปริพันธ์คือ $\frac{e^{2y}}{y}$

   ผลเฉลยของสมการคือ $xe^{2y} - \ln|y| = c$

7. ตัวประกอบปริพันธ์คือ $\sin y$

   ผลเฉลยของสมการคือ $e^{x}\sin y + y^2 = c$

8. ตัวประกอบปริพันธ์คือ y^2

   ผลเฉลยของสมการคือ $x^4 + 3xy + y^4 = c$

หมายเหตุ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

คำตอบของแบบฝึกหัด 3.4 (หน้า 75)

1. เป็นสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์
2. เป็นสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์
3. ไม่เป็นสมการเชิงเส้น
4. เป็นสมการเชิงเส้นเอกพันธุ์
5. เป็นสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์
6. ไม่เป็นสมการเชิงเส้น
7. เป็นสมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว
8. ไม่เป็นสมการเชิงเส้น

คำตอบของแบบฝึกหัด 3.5 (หน้า 81)

1. (a) เป็นอิสระเชิงเส้น
   (b) ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น
   (c) เป็นอิสระเชิงเส้น
   (d) ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น
   (e) ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น
   (f) เป็นอิสระเชิงเส้น
   (g) เป็นอิสระเชิงเส้น
   (h) ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

คำตอบของแบบฝึกหัด 3.6 (หน้า 92)

1. (i) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$

(ii) $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x}$

(iii) $y = c_1\cos 2\sqrt{2}x + c_2\sin 2\sqrt{2}x$

(iv) $y = e^{x}\left(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x\right)$

(v) $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$

(vi) $y = c_1e^{4x} + c_2e^{5x}$

(vii) $y = e^{\frac{-x}{2}}\left(c_1\cos\dfrac{\sqrt{5}}{2}x + c_2\sin\dfrac{\sqrt{5}}{2}x\right)$

(viii) $y = c_1e^{\frac{3x}{2}} + c_2xe^{\frac{3x}{2}}$

(ix) $y = c_1 + c_2e^{-x}$

(x) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x}$

(xi) $y = c_1e^{-4x} + c_2xe^{-4x}$

(xii) $y = c_1e^{\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x} + c_2e^{\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)x}$

(xiii) $y = e^{3x}\left(c_1\cos x + c_2\sin x\right)$

(xiv) $y = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{-4x}$

(xv) $y = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{-7x}$

(xvi) $y = c_1e^{\left(\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)x} + c_2e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)x}$

(xvii) $y = e^{\frac{-5}{2}x}\left(c_1 + c_2x\right)$

(xviii) $y = e^{3x}\left(c_1\cos 4x + c_2\sin 4x\right)$

(xix) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x}$

(xx) $y = e^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{2}x + c_2\sin\sqrt{2}x\right)$

(xxi) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$

(xxii) $y = c_1e^{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x} + c_2e^{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}$

(xxiii) $y = c_1e^{\frac{x}{2}} + c_2e^{-x}$

(xxiv) $y = e^{-2x}\left(c_1\cos x + c_2\sin x\right)$

(xxv) $y = c_1e^{\frac{x}{4}} + c_2xe^{\frac{x}{4}}$

(xxvi) $y = c_1e^{x} + c_2e^{-5x}$

(xxvii) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x}$

(xxviii) $y = e^{5x}\left(c_1\cos x + c_2\sin x\right)$

(xxix) $y = e^{-3x}\left(c_1 + c_2x\right)$

(xxx) $y = e^{2x}\left(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x\right)$

(xxxi) $y = c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$

(xxxii) $y = c_1e^{\frac{-2x}{3}} + c_2e^{\frac{x}{2}}$

(xxxiii) $y = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1 + c_2x\right)$

(xxxiv) $y = c_1e^{\frac{-11+\sqrt{205}}{6}x} + c_2e^{\frac{-11-\sqrt{205}}{6}x}$

หมายเหตุ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. (a) $y = e^{3x-1}$

(b) $y = 2e^{5x} + e^{x}$

(c) $y = 5xe^{3x}$

(d) $y = e^{-2x}\left(\cos(x) + 2\sin(x)\right)$

(e) $y = e^{\left(-2+\sqrt{2}\right)x} - 2e^{\left(-2-\sqrt{2}\right)x}$

(f) $y = \frac{9}{5}e^{x-1} + \frac{1}{5}e^{9-9x}$

(g) $y = 3e^{-4x}$

(h) $y = 3 - e^{-x}$

(i) $y = e^{-x}\left(1 + 2x\right)$

(j) $y = \frac{4}{3}e^{x} - \frac{1}{3}e^{3x}$

(k) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\left(1+\sqrt{3}x\right)} - \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\left(1-\sqrt{3}x\right)}$

(l) $y = e^{3x}\left(2 + \frac{7}{3}x\right)$

(m) $y = 2e^{5x+5}e^{-x-1}$

(n) $y = e^{2x-2}\left(2 - x\right)$

(o) $y = e^{x}\left(\sin(x) - \cos(x)\right)$

คำตอบของแบบฝึกหัด 3.7 (หน้า 98)

1. $y_2 = -\frac{e^{-5x}}{8}, \qquad y = c_1e^{3x} + c_2e^{-5x}$

2. $y_2 = e^{2x}, \qquad y = c_1e^{x} + c_2e^{2x}$

3. $y_2 = \frac{x^3}{3}, \qquad y = c_1 + c_2x^3$

4. $y_2 = \frac{x^4}{5}, \qquad y = \frac{c_1}{x} + c_2x^4$

5. $y_2 = -\frac{1}{x^3}, \qquad y = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3}$

6. $y_2 = x^3, \qquad y = c_1x^2 + c_2x^3$

7. $y_2 = -\frac{1}{3x^2}, \qquad y = c_1x + \frac{c_2}{x^2}$

8. $y_2 = \frac{1}{x}\ln x, \qquad y = \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x}\ln x$

9. $y_2 = xe^{x}, \qquad y = c_1x + c_2xe^{x}$

10. $y_2 = -\frac{1}{2}\cos(x^2), \qquad y = c_1\sin(x^2) + c_2\cos(x^2)$

11. $y_2 = 1 + xe^{2x} - e^{2x}, \qquad y = c_1e^{x} + c_2(1 + xe^{2x} - e^{2x})$

12. $y_2 = -x - 1, \quad y = c_1 e^x + c_2(x+1)$

13. $y_2 = -\dfrac{1}{3x}, \quad y = c_1 x^2 + \dfrac{c_2}{x}$

14. $y_2 = -\dfrac{1}{2}x^{1/4}e^{-2\sqrt{x}}, \quad y = c_1 x^{1/4}e^{2\sqrt{x}} + c_2 x^{1/4}e^{-2\sqrt{x}}$

15. $y_2 = e^{-3x}(-4x-16), \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}(x+4)$

16. $y_2 = -\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}, \quad y = \dfrac{c_1 \sin x}{\sqrt{x}} + \dfrac{c_2 \cos x}{\sqrt{x}}$

หมายเหตุ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

คำตอบของแบบฝึกหัด 3.8.1 (หน้า 115)

1. (a) $y = c_1 \cos\sqrt{3}x + c_2 \sin\sqrt{3}x - 3$

   (b) $y = c_1 e^{\left(-2-\sqrt{2}\right)x} + c_2 e^{\left(-2+\sqrt{2}\right)x} - 10$

   (c) $y = c_1 \cos\dfrac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin\dfrac{x}{\sqrt{2}} + e^{2x}$

   (d) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^{-2x}$

   (e) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - x + x^3$

   (f) $y = e^{\frac{x}{2}}\left(c_1 \cos\dfrac{\sqrt{35}}{2}x + c_2 \sin\dfrac{\sqrt{35}}{2}x\right) + 3\cos 3x$

   (g) $y = e^{-2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \sin x\right) + \dfrac{1}{26}e^{3x}$

   (h) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x - \dfrac{1}{4}e^{-x}$

   (i) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} + \dfrac{3}{34}\cos x + \dfrac{5}{34}\sin x$

   (j) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 2 - x - x^2$

   (k) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{9}{4}x^2 + \dfrac{21}{4}x + \dfrac{45}{8}$

   (l) $y = c_1 + c_2 e^{-2x} - \sin x - \cos x$

   หมายเหตุ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. (a) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - e^x$

   (b) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + e^{-x} x \left(\frac{3}{8} x - \frac{3}{16} \right)$

   (c) $y = e^{-x} \left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \right) + \frac{3}{17} \sin 2x - \frac{12}{17} \cos 2x$

   (d) $y = c_1 + c_2 e^{-2x} + x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x$

   (e) $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x}$

   (f) $y = c_1 \cos \omega_0 x + c_2 \sin \omega_0 x + \frac{\cos \omega x}{(\omega_0)^2 - \omega^2}$

   (g) $y = c_1 + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{3} \cos 2x + \frac{2}{3} \sin 2x + \frac{8}{5} \sin x - \frac{2}{5} \cos x$

   (h) $y = c_1 + c_2 e^x - 12x - \frac{11}{2} x^2$

   (i) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + e^{-x} \left(\frac{37}{32} x - \frac{3}{16} x^2 - \frac{1}{4} x^3 \right)$

   (j) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x + e^x \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right)$

   (k) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{5} \sin x - \frac{1}{5} \cos x$

   (l) $y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x + e^{3x} \left(\frac{1}{18} x^2 - \frac{1}{27} x + \frac{1}{162} \right) + \frac{2}{3}$

   (m) $y = c_1 \cos \omega_0 x + c_2 \sin \omega_0 x + \frac{\cos \omega_0 x + \omega_0 x \sin \omega_0 x}{2 (\omega_0)^2}$

   (n) $c_1 + c_2 x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{5} x^5$

หมายเหตุ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

3. (a) $y = 3 - x + 6x^3$

   (b) $y = \sin x + 2 \cos x + e^{-x}$

   (c) $y = \frac{-19}{40} \cos 2x + \frac{7}{10} \sin 2x - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} x^2 + \frac{3}{5} e^x$

   (d) $y = e^x (4x - 3) + \frac{1}{6} x^3 e^x + 4$

   (e) $y = -\frac{1}{10} \cos^2 x + \frac{1}{20} (6 \sin x - 6) \cos x - \frac{1}{10} \sin x + \frac{1}{20}$

   (f) $y = -\frac{1}{10} e^x - \frac{1}{6} e^{2x} + \frac{1}{12}$

   (g) $y = e^{-x} \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + e^{-x} (x \sin 2x) \right)$

4. (a) $y_p = A_0x + A_1x^2 + A_2x^3 + A_3x^4 + A_4x^5 + \left(B_0x + B_1x^2 + B_2x^3\right)e^{-3x}$
$+C\cos 3x + D\sin 3x$

(b) $y_p = (A_0 + A_1x)\sin x + (B_0 + B_1x)\cos x + Ce^x$

(c) $y_p = A_0 + A_1x + \left(B_0x + B_1x^2\right)\sin x + \left(C_0x + C_1x^2\right)\cos x$

(d) $y_p = e^x(A\cos 2x + B\sin 2x) + e^{2x}[(C_0 + C_1x)\sin 2x + (D_0 + D_1x)\cos 2x]$

(e) $y_p = A_0 + A_1x + A_2x^2 + e^{2x}\left(B_0x^2 + B_1x^3\right) + (C_0 + C_1x)\sin 2x$
$+(D_0 + D_1x)\cos 2x$

(f) $y_p = e^{2x}\left(A_0 + A_1x + A_2x^2\right)$

(g) $y_p = e^x\left(A_0x + A_1x^2 + A_2x^3\right) + e^{-x}\left(B_0x + B_1x^2 + B_2x^3 + B_3x^4\right)$

(h) $y_p = e^{2x}\left(A_0x^2 + A_1x^3 + A_2x^4\right)$

(i) $y_p = A\sin x + B\cos x + C\sin 2x + D\cos 2x$

(j) $y_p = e^x\left[\left(A_0 + A_1x + A_2x^2\right)\sin 2x + \left(B_0 + B_1x + B_2x^2\right)\cos 2x\right]$
$+e^{-x}(C\cos x + D\sin x) + Ee^x$

(k) $y_p = e^{-x}[(A_0 + A_1x)\sin(2x) + (B_0 + B_1x)\cos 2x]$
$+e^{-2x}[(C_0 + C_1x)\sin x + (D_0 + D_1x)\sin x]$

หมายเหตุ $A, B, C, D, E, A_0, \ldots, A_4, B_0, \ldots, B_3, C_0, C_1, D_0, D_1, E_0, E_1$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

คำตอบของแบบฝึกหัด 3.8.2 (หน้า 125)

1. (a) $y = c_1 \cos \sqrt{3}x + c_2 \sin \sqrt{3}x - 3$

   (b) $y = c_1 e^{\left(-2-\sqrt{2}\right)x} + c_2 e^{\left(-2+\sqrt{2}\right)x} - 10$

   (c) $y = c_1 \cos \dfrac{x}{\sqrt{2}} + c_2 \sin \dfrac{x}{\sqrt{2}} + e^{2x}$

   (d) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^{-2x}$

   (e) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} - x + x^3$

   (f) $y = e^{\frac{x}{2}} \left(c_1 \cos \dfrac{\sqrt{35}}{2} x + c_2 \sin \dfrac{\sqrt{35}}{2} x \right) + 3 \cos 3x$

   (g) $y = e^{-2x} \left(c_1 \cos x + c_2 \sin x \right) + \dfrac{1}{26} e^{3x}$

   (h) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x} - \dfrac{1}{4} e^{-x}$

   (i) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-x} + \dfrac{3}{34} \cos x + \dfrac{5}{34} \sin x$

   (j) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 2 - x - x^2$

   (k) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + \dfrac{1}{2} x^3 + \dfrac{9}{4} x^2 + \dfrac{21}{4} x + \dfrac{45}{8}$

   (l) $y = c_1 + c_2 e^{-2x} - \sin x - \cos x$

2. (a) $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln \left|\tan x + \sec x\right|$

   (b) $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \ln |x|$

   (c) $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x - 1 + \sin 3x \ln \left|\sec 3x + \tan 3x\right|$

   (d) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \dfrac{3}{2} x \cos 2x + \dfrac{3}{4} \sin 2x \ln \left|\sin 2x\right|$

   (e) $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \dfrac{1}{4} \cos 2x \ln \left|\sec 2x + \tan 2x\right|$

   (f) $y = c_1 \cos \dfrac{x}{2} + c_2 \sin \dfrac{x}{2} + x \sin \dfrac{x}{2} + 2 \cos \dfrac{x}{2} \ln \left|\cos \dfrac{x}{2}\right|$

   (g) $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \dfrac{1}{2} x^2 e^{-x} \ln |x| - \dfrac{3}{4} x^2 e^{-x}$

   (h) $y = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} - \dfrac{1}{2} e^{x} \ln \left(1 + x^2\right) + x e^{x} \tan^{-1} x$

   (i) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} - e^{-x} \left(8x^2 + 4x + 1\right)$

   (j) $y = e^{-x} \left(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \dfrac{1}{4} \cos 2x \ln \left|\cos 2x\right| + \dfrac{1}{2} x \sin 2x \right)$

   (k) $y = c_1 e^{\frac{-x}{2}} + c_2 e^{-x} + \dfrac{1}{10} e^{-3x}$

   (l) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{x} + e^{2x} \left(\ln \left|e^{-x} + 1\right| - e^{-x} \right) + e^{x} \ln \left|e^{-x} + 1\right|$

หมายเหตุ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

คำตอบของแบบฝึกหัด 3.9 (หน้า 132)

1. (a) $y = c_1x + c_2x^3$

   (b) $y = c_1x^2 + \dfrac{c_2}{x^2}$

   (c) $y = c_1\sqrt{x} + c_2x^{3/2}$

   (d) $y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$

   (e) $y = c_1 \sin(2\ln x) + c_2 \cos(2\ln x)$

   (f) $y = c_1x^2 \sin(3\ln x) + c_2x^2 \cos(3\ln x)$

   (g) $y = c_1x^{1/3} + c_2x^2$

   (h) $y = c_1 \sin(3\ln x) + c_2 \cos(3\ln x)$

   (i) $y = c_1x^{1/3} + c_2x^{1/3} \ln x$

   (j) $y = c_1x^3 \sin(\ln x) + c_2x^3 \cos(\ln x)$

   (k) $y = c_1x^2 + c_2x^3 - 1 + 2x$

   (l) $y = c_1x^2 + c_2x^4 - 2x^3$

   (m) $y = \dfrac{c_1}{x^2} + \dfrac{c_2}{x} + 2\ln x - 3$

   (n) $y = c_1 \sin(2\ln x) + c_2 \cos(2\ln x) + \dfrac{2}{5}x \ln x$

   (o) $y = c_1 \sin(\ln x) + c_2 \cos(\ln x) - 2\cos(\ln x) \ln x$

   (p) $y = c_1 \sin(3\ln x) + c_2 \cos(3\ln x) + \dfrac{1}{6} \sin(3\ln x) \ln x$

   หมายเหตุ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. (a) $y = \dfrac{3}{x^2} + 2x^5$

   (b) $y = -2x^2 + x^3$

   (c) $y = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$

   (d) $y = x^2 - 2x + 4 + \dfrac{1}{x}$

   (e) $y = \dfrac{5}{3}x - 2x^2 + 3x^3 - \dfrac{23}{24}x^4$

   (f) $y = -\dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{2}{5}x^2(5\ln x - 1)$

   (g) $y = 4x^2 - 2x^3$

   (h) $y = \dfrac{1}{18}x^3 + \dfrac{1}{12x^2} - \dfrac{1}{6}\ln x + \dfrac{1}{36}$

บรรณานุกรม

[1] จันทนา ไอยราภาญจนกุล. (2536). **เอกสารคำสอนวิชา 322-331 สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation)** ภาควิชาคณิตศาสตร์, คณะวิทยาศาสตร์, มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่

[2] ชนะศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2530). **อนุกรมอนันต์ (Infinite Series)** (พิมพ์ครั้งที่สอง) กรุงเทพมหานคร, สำนักพิมพ์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

[3] ช่อฟ้า นิลรัตน์. (2533). **พีชคณิตนามธรรม** ภาควิชาคณิตศาสตร์, คณะวิทยาศาสตร์, มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ วิทยาเขตหาดใหญ่

[4] Anton, H., Bivens, I., Davis, S. (2002). **Calculus.** (7th ed.) USA: John Wiley & Sons, Inc.

[5] Apostol, T. M. (1997). **Linear algebra : a first course, with applications to differential equations.** USA: John Wiley & Sons, Inc.

[6] Bak, J. and Newman, D. J. (1982). **Complex analysis.** New York: Springer-Verlag New York, Inc.

[7] Boyce, W. E. and DiPrima, R. C. (2000). **Elementary Differential Equations.** (7th ed.) John Wiley & Sons, Inc.

[8] Bronson, R. (1994). **Schaum's outline of theory and problems of differential equations.** USA: McGraw-Hill

[9] Hewson, S. F. (2003). **A mathematical bridge: an intuitive journal in higher mathematics.** Singapore: World Scientific Printers

[10] Ibragimov, N. H. (1996). **CRC handbook of Lie group analysis of differential equations.** Vol. 3. USA: CRC Press, Inc.

[11] Knott, R. (2009). **Who was Fibonacci?** [On-line]. Available: http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibBio.html

[12] JOC/EFR (1997). **Biography of Guido Fubini** [On-line]. Available: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/Mathematicians/Fubini.html, School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland

[13] Kreyszig, E. (1999). **Advanced engineering mathematics.** (8th ed.) Singapore: John Wiley & Sons, Inc.

[14] Nagle, R. K., Saff, E. B., Snider, A.D. (2000). **Fundamental of differential equations.** (5th ed.) USA: Addison Wesley Longman

[15] Pownall, M. W. (1994). **Real analysis: A first course with foundations.** Iowa: Wm. C. Brown Publishers

[16] Protter, M. H., Morrey, C. B. (1991). **A first course in real analysis.** (2nd ed.) New York: Springer-Verlag

[17] Rogers, L. C. G., Williams, D. (2000). **Diffusions, Markov Process and Martingales. Vol.1&2** (2nd ed.) UK: Cambridge University Press

[18] Ross, S. L. (1984). **Differential equations.** (3rd ed.) USA: John Wiley & Sons, Inc.

[19] Salas, Hille and Etgen (2003). **Calculus (Serveral variables).** (9th ed.) USA: John Wiley & Sons, Inc.

[20] Schulz, E. **Differential equations.** School of Mathematics, Suranaree University of Technology: บริษัท สมบูรณ์การพิมพ์ จำกัด

[21] Spiegel, M. R. (1990). **Schaum's outline of theory and problems of mathematical handbook of formulas and tables.** (international ed.) Singapore: McGraw-Hill

[22] Stewart, J. (2008). **Calculus Early Transcendentals.** (6th ed.) USA: Thomson Higher Education

[23] Wikipedia, **Zeno's paradoxes** [On-line]. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Zeno

ดรรชนี