สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับที่สอง

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองคือ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}),$$

$$y'' = f(x, y, y'),$$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันใดๆ ของ x, y และ $\frac{dy}{dx}$, x เป็นตัวแปรอิสระ, y เป็นตัวแปรไม่อิสระและ $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}$ เป็นอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x อันดับที่หนึ่ง และ ที่สอง ตามลำดับ

ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

- $F = m\frac{d^2y}{dt^2}$ กฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law)
- $F_{\text{สปริง}} = m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$ กฎของฮุก (Hooke's law)
- $F_{\text{แรงเสียดทาน}} = my'' = -by'$ สมการการเคลื่อนที่แบบการสั่น (vibration motion equation)
- $my''+by'+ky = F_{\text{ภายนอก}}(t)$ สมการการเคลื่อนที่แบบการสั่นชนิดมีแรงภายนอก (vibration motion equation with external force)
- $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t)$ กฎของคีร์ชฮอฟฟ์ (Kirchhoff's loop law)

สมการเชิงเส้น

เราสามารถเขียน

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สอง ได้เป็น

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$

เมื่อ $a_2(x) \neq 0$ และ a_2, a_1, a_0, b เป็นฟังก์ชันของ

ตัวแปร x

เนื่องจาก $a_2(x) \neq 0$ เราสามารถหารสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สองดังกล่าวด้วย $a_2(x)$ และ เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สองได้เป็น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \qquad (3.7)$$

เมื่อ $p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $q(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ และ $r(x) = \dfrac{b(x)}{a_2(x)}$

ถ้า $r(x) \equiv 0$ (นั่นคือ $r(x) = 0$ ทุกๆ ค่า x ที่อยู่ในช่วงที่พิจารณา) สมการ (3.7) จะสามารถถูกเขียนได้เป็น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad (3.8)$$

และเราเรียกสมการนี้ว่า *สมการเอกพันธุ์*[11] (homogeneous equation) แต่ ถ้า $r(x) \neq 0$ เราเรียกสมการ (3.7) ว่า *สมการไม่เอกพันธุ์* (nonhomogeneous equation)

$$y'' + 3xy' + x^3y^2 = e^x$$

$$(\sin x)y'' + (\cos x)y' + \tan\sqrt{x} = 0$$

$$y'' + 3xy' + x^3y = e^x$$

$$y'' + 3xy' + x^3y = 0$$

$$y'' + 3y' + 5y = e^x$$

$$y'' + 3y' + 5y = 0$$

ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ 3.2. *สำหรับสมการเอกพันธ์*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.10}$$

ถ้า y_1 *และ* y_2 *เป็นผลเฉลยของ*___สมการเอกพันธุ์เชิงเส้น___*แล้วผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยทั้งสอง*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 *และ* c_2 *เป็นค่าคงตัวใดๆ ก็ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น (3.10) ด้วย*

ทฤษฎีบท 3.3. *ถ้า* y_1 *และ* y_2 *เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.11}$$

ซึ่งนิยามบนช่วง I *บางช่วง, โดย* $\dfrac{y_1}{y_2}$ *ไม่เป็นค่าคงตัวแล้ว ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.3) บนช่วง* I *ต้องอยู่ในรูป*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

เมื่อ c_1 *และ* c_2 *เป็นค่าคงตัวใดๆ,* ***เท่านั้น***

สมการเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว

สมการแคแรกเทอริสติก

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

ผลเฉลยหรือราก ของสมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $b^2 - 4ac > 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน**

- $b^2 - 4ac = 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**

- $b^2 - 4ac < 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**

- $b^2 - 4ac > 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน**

เราสามารถสรุปได้ว่าในกรณีนี้ผลเฉลยทั่วไป ต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

- $b^2 - 4ac = 0$

λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**

ในกรณีนี้ ผลเฉลยของสมการคาแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$$

โดยทฤษฎีบท 3.3 ทำให้เราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x},$$

- $b^2 - 4ac < 0$

λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**

กรณีเกิดขึ้นเมื่อ $b^2 - 4ac < 0$ ทำให้เราได้รากของสมการ

แคแรกเทอริสติกเป็น

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

ดังนั้น ถ้าให้

$$r = -\frac{b}{2a}, \quad s = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{และ} \quad i = \sqrt{-1}$$

เราสามารถเขียนรากของสมการได้เป็น

$$\lambda_1 = r + is, \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = r - is$$

ถ้าให้ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ และ เขียนผลเฉลยทั่วไปได้ในรูป

$$y = e^{rx}\left[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)\right]$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$4y'' + 20y' + 24y = 0$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y' = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' = 4y$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$4y'' + 20y' + 25y = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' = 4y' - 7y$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y'' + 4y' + 5y = 0, y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y'' + 4y' + 2y = 0, y(0) = -1, \quad y'(0) = 2 + 3\sqrt{2}$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 2, \quad y'(0) = 25/3$$

สรุป

ในการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.22}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว เราจะพิจารณาสมการแคแรกเทอริสติก

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3.23}$$

ผลเฉลยหรือราก ของสมการแคแรกเทอริสติก (3.23) ประกอบด้วย

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เราพบว่าค่า λ_1 และ λ_2 จะเป็นไปได้ 3 กรณี เมื่อแบ่งตามเครื่องหมายของค่าดิสคริมิแนนต์ $b^2 - 4ac$ นั่นคือ

- $b^2 - 4ac > 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน**

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

- $b^2 - 4ac = 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**

  ถ้า $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

- $b^2 - 4ac < 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**

ถ้า $\lambda_1 = r + is$ และ $\lambda_2 = r - is$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

$$y = e^{rx}\left[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)\right]$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ

การใช้ผลเฉลยหนึ่งหาอีกผลเฉลยหนึ่งในสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น

เนื่องจากเราทราบแล้วว่าสำหรับสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองใดๆ

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

ผลเฉลยทั่วไปต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

สมมติว่า เรามี y_1 ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (3.24) เนื่องจาก

เราต้องการผลเฉลย y_2 ที่ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันกับ y_1 ดังนั้น

เราจะให้

$$y_2 = v(x)y_1,$$

$v(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว และพบว่าอนุพันธ์ของ y_2 คือ

$$y_2' = v'(x)y_1 + v(x)y_1'$$

$$y_2'' = v''(x)y_1 + 2v'(x)y_1' + v(x)y_1''$$

เนื่องจาก y_2 ผลเฉลยของสมการ

$$a(x)\left(v''(x)y_1 + 2v'(x)y_1' + v(x)y_1''\right) + b(x)\left(v'(x)y_1 + v(x)y_1'\right) + c(x)v(x)y_1 = 0$$

จัดรูปได้เป็น

$$(a(x)y_1)\,v''(x) + \left(2a(x)y_1' + b(x)y_1\right)v'(x) + \underbrace{\left(a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1\right)}_{=0 \text{ เพราะว่า } y_1 \text{ เป็นผลเฉลยของ } (\underline{3.24})} v(x) = 0$$

นั่นคือเราได้สมการ

$$(a(x)y_1)\, v''(x) + \left(2a(x)y_1' + b(x)y_1\right) v'(x) = 0$$

ให้ $u = v'$ ดังนั้น $\dfrac{du}{dx} = u' = v''$ และสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

$$(a(x)y_1)\,\frac{du}{dx} + \left(2a(x)y_1' + b(x)y_1\right) u = 0$$

ซึ่งนี้เป็นสมการแยกกันได้[14] และมีผลเฉลยคือ

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{u}du &= \left(-\frac{2a(x)y_1' + b(x)y_1}{a(x)y_1}\right)dx = \left(-2\frac{y_1'}{y_1} - \frac{b(x)}{a(x)}\right)dx \\
\int \frac{1}{u}du &= \int \left(-2\frac{y_1'}{y_1} - \frac{b(x)}{a(x)}\right)dx = -2\int \frac{y_1'}{y_1}dx - \int \frac{b(x)}{a(x)}dx \\
\ln u &= -2\ln y_1 - \int \frac{b(x)}{a(x)}dx \\
u &= \frac{1}{(y_1)^2}e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}
\end{aligned}
$$

เมื่อ แทนค่า $u = v'$ กลับ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} \\ v &= \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} dx \end{aligned}$$

เนื่องจาก $y_2 = vy_1$ ดังนั้น เราได้ผลเฉลยอีกผลเฉลยหนึ่งคือ

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} dx$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y''+2y'-15y=0$$

เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x)=e^{3x}$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x) = x$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad x > 0$$

เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x) = x^2$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, \qquad x > 0$$

เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x) = \dfrac{1}{x}$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0, \quad x > 0$$

เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x) = x^3$

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยของสมการ หรือ ปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

1. $y'' + \sqrt{2}y' + 4y = 0, \quad y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = 6$

2. $y'' + ey' + e^2 y = 0, \quad y(e) = e, y'(e) = e^2$

3. $y'' + \pi^2 y = 0, \quad y(\frac{1}{2}) = \pi, y'(\frac{1}{2}) = -1$

4. $2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0$

   เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x) = \frac{1}{x}$

สมการไม่เอกพันธ์

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษา การหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธ์เชิงเส้น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันของ x และ $r(x) \neq 0$

ในการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.28) เราจำเป็นต้องใช้**สมการเอกพันธุ์**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

เราเรียกสมการว่า*สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง กับสมการไม่เอกพันธุ์*

สมมติว่า

เรามี y_p เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = r(x)$$

ให้ y_{p2} เป็นผลเฉลยใดๆ ของสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น

$$y_{p_2}'' + p(x)y_{p_2}' + q(x)y_{p_2} = r(x)$$

พบว่า

$$
\begin{aligned}
& (y_{p_2} - y_p)'' + p(x)(y_{p_2} - y_p)' + q(x)(y_{p_2} - y_p) \\
= \quad & \left(y''_{p_2} + p(x)y'_{p_2} + q(x)y_{p_2}\right) - \left(y''_p + p(x)y'_p + q(x)y_p\right) \\
= \quad & r(x) - r(x) \\
= \quad & 0
\end{aligned}
$$

แสดงว่า $y_{p_2} - y_p$ เป็น*ผลเฉลยทั่วไป*ของสมการเอกพันธุ์

$$y_h = y_{p_2} - y_p$$

กล่าวได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น คือ

$$y = y_h + y_p$$

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

2. หาผลเฉลยเฉพาะ y_p ผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์

3. ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = y_h + y_p$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y''-2y'+y=e^{x}$

เมื่อพบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y=\dfrac{x^{2}e^{x}}{2}$

$$y'' - 2y' + y = 2\cos(x)$$

เมื่อพบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y = -\sin x$

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p โดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = r(x)$$

1. ตรวจสอบว่า $r(x)$ เป็นหนึ่งในรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1 หรือไม่? ถ้าใช่ จะดำเนินการหาผลเฉลยต่อ

$r(x)$	ค่า y_p ที่จะกำหนดให้เป็น
$ae^{\lambda x}$	$Ae^{\lambda x}$
$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0$
$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)e^{\lambda x}$	$(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)e^{\lambda x}$
$a\cos(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\cos(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\sin(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$a\cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\, e^{\lambda x}$
$b\sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))\, e^{\lambda x}$
$[a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$	$[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$
$\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$
$\mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$
$[\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]\, e^{\lambda x}$

2. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = 0$$

3. พิจารณา $r(x)$ แล้วเลือกผลเฉลย y_p ให้อยู่ในรูป

   ทางขวาของตาราง 3.1 **แต่**

   - ถ้า y_p ไม่มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ สามารถใช้ y_p ได้เลย

- ถ้า y_p **มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป** y_h **ของสมการเอกพันธุ์** ให้เอาค่า x คูณกับ y_p ที่เลือกมา

- ถ้า y_p ใหม่ ที่ได้จากการคูณด้วย x ยัง**มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป** y_h **ของสมการเอกพันธุ์** ให้ให้เอาค่า x คูณซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่า y_p ใหม่ที่ได้ ไม่มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์

4. แทนค่า y_p ลงในสมการไม่เอกพันธุ์ เพื่อเทียบหาสัมประสิทธิ์

หมายเหตุ สำหรับกรณีที่ $r(x)$ ไม่ได้เป็นหนึ่งในรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1 **แต่อยู่ในรูปผลรวม(หรือผลต่าง)**ของฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1 เช่น ถ้า $r(x)$ อยู่ในรูปผลรวมของฟังก์ชัน $r_1(x)$ และ $r_2(x)$

$$ay'' + by' + cy = r_1(x) + r_2(x), \qquad (3.32)$$

โดยที่ $r_1(x)$ และ $r_2(x)$ มีรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1

โดยขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

เราสามารถแยกหาค่าผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการไม่เอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = r_1(x)$$

และผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการไม่เอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = r_2(x)$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.32) จะอยู่

ในรูป[14]

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2}$$

จงหารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' + 2y' - 3y = r(x),$$

เมื่อ $r(x)$ มีค่าเป็น

1. $7\cos(3x)$
2. $5e^{-3x}$
3. $x^2\cos(\pi x)$
4. $2xe^x \sin x - e^x \cos x$
5. $x^2e^x + 3xe^x$
6. $\tan x$

จงหารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' = r(x)$$

เมื่อ $r(x)$ มีค่าเป็น

1. 1
2. $3x^2$
3. x^2e^x

จงหารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 2y' + y = r(x)$$

เมื่อ $r(x)$ มีค่าเป็น

1. e^x
2. xe^x
3. $e^x \sin x$

กำหนดให้ $y'' + 4y' + 4y = r(x)$
โดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์จะต้องสมมติ
ให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p อยู่ในรูปใดถ้า

$$r(x) = 2007e^{2x}$$

(1) $y_p = Ae^{2x}$

(2) $y_p = Axe^{2x}$

(3) $y_p = (A_0 + A_1 x)e^{2x}$

(4) $y_p = Ax^2e^{2x}$

(5) $y_p = Ax^3e^{2x}$

กำหนดให้ $y'' + 4y' + 4y = r(x)$ โดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์จะต้องสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p อยู่ในรูปใดถ้า

$$r(x) = 2550e^{-2x}$$

(1) $y_p = Ae^{-2x}$

(2) $y_p = Axe^{-2x}$

(3) $y_p = (A_0 + A_1 x)e^{-2x}$

(4) $y_p = Ax^2 e^{-2x}$

(5) $y_p = Ax^3 e^{-2x}$

กำหนดให้ $y'' + 4y' + 4y = r(x)$ โดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์จะต้องสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p อยู่ในรูปใดถ้า

$$r(x) = 555xe^{2x}$$

(1) $y_p = (A_0 + A_1 x)e^{2x}$ (2) $y_p = Axe^{2x}$

(3) $y_p = (A_0 x + A_1 x^2)e^{2x}$ (4) $y_p = Ax^2 e^{2x}$

(5) $y_p = (A_0 x^2 + A_1 x^3)e^{2x}$

กำหนดให้ $y'' + 4y' + 4y = r(x)$
โดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์จะต้องสมมติ
ให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p อยู่ในรูปใดถ้า

$$r(x) = 7,000,000xe^{-2x}$$

(1) $y_p = (A_0 + A_1 x)e^{-2x}$ (2) $y_p = Axe^{-2x}$

(3) $y_p = (A_0 x + A_1 x^2)e^{-2x}$ (4) $y_p = Ax^2 e^{-2x}$

(5) $y_p = (A_0 x^2 + A_1 x^3)e^{-2x}$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{-5x}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 2y' + y = 5e^x$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' + 2y' = 2x^2 + 5x$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 2y' + 2y = e^{x}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 2y' + 2y = e^{x} \sin x$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y''+2y'-3y=24e^{3x},\ y(0)=6, y'(0)=-2$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + 2y' = 2x + 5,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y'' = 6x, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = -1$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 4y = \cos x - \sin x$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' + 4y = \cos x - \sin x$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y'' + y = 2e^{-x}, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$2y''+3y'+y=x^2+e^{-x}$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y''+4y = x^2+3e^x, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 2$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธ์

$$y'' + 2y' - 3y = 3x + 1 + 5\sin x$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y''+9y = 18x-5e^{x}+12\cos(3x),$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าขอบ

$$y'' + 9y = 18x - 5e^{x} + 12\cos(3x), \quad y(0) = \frac{1}{2}, \; y(\frac{\pi}{6}) = \pi - \frac{e^{\pi/6}}{2}$$

ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ มีขีดจำกัดในการใช้คือ

- ต้องเป็นสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น*ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว*

- ฟังก์ชัน $r(x)$ ต้องเป็นไปตามตาราง 3.1 เท่านั้น

การแปรผันของตัวแปรเสริม

พิจารณาสมการไม่เอกพันธ์เชิงเส้น

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$$

สมมติว่าเราทราบผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

โดย y_h อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของของผลเฉลย y_1 และ y_2

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

แนวความคิดในการหาผลเฉลยเฉพาะ เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีรูปแบบคล้ายกับผลเฉลยทั่วไป y_h แต่เปลี่ยนค่าคงตัวใดๆ c_1 และ c_2 เป็น*ฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว* $u(x)$ และ $v(x)$ ตามลำดับ[15]

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

สำหรับการหาค่า $u(x)$ และ $v(x)$ เราจะเริ่มจาก

1. พิจารณาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ y_p

$$y_p' = uy_1' + u'y_1 + vy_2' + v'y_2$$

เราจะเพิ่มเงื่อนไขให้

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

ดังนั้นทำให้ได้ว่า

$$y_p' = uy_1' + vy_2'$$

และ

$$y_p'' = uy_1'' + u'y_1' + vy_2'' + v'y_2'$$

2. แทนค่า y_p, y_p' และ y_p'' ลงในสมการ

$$a_2\left(uy_1''+u'y_1'+vy_2''+v'y_2'\right)+a_1\left(uy_1'+vy_2'\right)+a_0\left(uy_1+vy_2\right)=r(x)$$

$$u\underbrace{\left(a_2y_1''+a_1y_1'+a_0y_1\right)}_{=0\text{ เพราะ }y_1\text{ เป็นผลเฉลยทั่วไป}}+v\underbrace{\left(a_2y_2''+a_1y_2'+a_0y_2\right)}_{=0\text{ เพราะ }y_2\text{ เป็นผลเฉลยทั่วไป}}+a_2(u'y_1'+v'y_2')=r(x)$$

$$a_2(u'y_1'+v'y_2')=r(x)$$

ดังนั้นเราได้

$$u'y_1'+v'y_2'=\frac{r(x)}{a_2(x)}$$

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

$$u'y_1' + v'y_2' = \frac{r(x)}{a_2(x)}$$

ซึ่งมีผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$u' = -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}, \quad \text{และ} \quad v' = \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')},$$

เมื่อ $\bar{r} = \dfrac{r(x)}{a_2(x)}$

หาค่า u และ v ได้โดย

$$u(x) = \int -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx$$

$$v(x) = \int \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธ์ คือ

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1y_1 + c_2y_2 + u(x)y_1 + v(x)y_2, \end{aligned}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y = \csc x$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y = \csc x + 3x - 1$$

สมการโคชี-ออยเลอร์

บทนิยาม 3.3 (สมการโคชี-ออยเลอร์). เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่สองซึ่งอยู่ในรูป

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = h(x), \qquad (3.51)$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัวใดๆ และ $a \neq 0$, ว่า*สมการโคชี-ออยเลอร์* (Cauchy-Euler equation)

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = h(x),$$

- $3x^2y'' - 2xy' + 7y = \sin x$
- $2y'' - 3xy' + 11y = 3x - 1$
- $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = 5x^2,\ x > 0$
- $2x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} = \ln x,\ x > 0$
- $2x^2y'' + 2y' + y = \ln x,\ x > 0$
- $3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 11x\dfrac{dy}{dx} - 3y = 0,\ x > 0$

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการโคชี-ออยเลอร์

$$ax^2\frac{d^2y}{dx^2} + bx\frac{dy}{dx} + cy = h(x) \qquad (3.52)$$

1. ทำการเปลี่ยนตัวแปร โดยให้ $x = e^t$ ซึ่งจะทำให้สมการ (3.52) เป็นสมการใหม่ ซึ่งขึ้นกับตัวแปรอิสระ t และจากการสมมติตัวแปรแบบนี้ทำให้ $x > 0$

2. เมื่อหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับตัวแปร t โดย**กฎลูกโซ่** ทำให้

$$\frac{dy}{dt} =$$

นั่นคือ

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

และ $\dfrac{d^2y}{dt^2} =$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

3. แทนค่า $x\dfrac{dy}{dx}$ และ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ลงในสมการ (3.52) ทำให้ได้

$$a(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}) + b\frac{dy}{dt} + cy = h(x), \qquad x > 0$$

และสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy = h(e^t)$$

4. หาผลเฉลยของสมการ (3.55) โดยใช้วิธีที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้แล้ว ซึ่งจะได้ผลเฉลยรูปของฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ t

$$y = \mathcal{Y}(t)$$

5. เขียนผลเฉลยให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของ x ได้โดยให้ $t = \ln x$

$$y = y(x) = \mathcal{Y}(\ln x)$$

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+11x\frac{dy}{dx}-3y=0,\ x>0$$

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = \frac{4}{x^5},\ x > 0$$

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยของสมการ หรือ ปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

1. $xy'' - y' + 4x^3 y = 0, \quad x > 0$

   เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x) = \sin(x^2)$

2. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$

3. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x}\cos(2x), \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

4. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x, \quad x > 0$