ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ มีขีดจำกัดในการใช้คือ

- ต้องเป็นสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น *ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว*
- ฟังก์ชัน $r(x)$ ต้องเป็นไปตามตาราง 3.1 เท่านั้น

การแปรผันของตัวแปรเสริม

Variational of Parameters

พิจารณาสมการไม่เอกพันธ์เชิงเส้น

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$$

สมมติว่าเราทราบผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

โดย y_h อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของของผลเฉลย y_1 และ y_2

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2,$$

แนวความคิดในการหาผลเฉลยเฉพาะ เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีรูปแบบคล้ายกับผลเฉลยทั่วไป y_h แต่เปลี่ยนค่าคงตัวใดๆ c_1 และ c_2 เป็น*ฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว* $u(x)$ และ $v(x)$ ตามลำดับ[15]

$$y_h = \boxed{c_1} y_1 + \boxed{c_2} y_2$$

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

$$\frac{d}{dx} y_p = \frac{d}{dx}\left(u \cdot y_1 + v \cdot y_2\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(u \cdot y_1\right) + \frac{d}{dx}\left(v \cdot y_2\right)$$

สำหรับการหาค่า $u(x)$ และ $v(x)$ เราจะเริ่มจาก

1. พิจารณาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ y_p

$$\boxed{y_p'} = uy_1' + \cancel{u'y_1} + vy_2' + \cancel{v'y_2}$$

เราจะเพิ่มเงื่อนไขให้

$$\boxed{u'y_1 + v'y_2 = 0}$$

ดังนั้นทำให้ได้ว่า

$$y_p' = \boxed{uy_1' + vy_2'}$$

และ

$$y_p'' = uy_1'' + u'y_1' + vy_2'' + v'y_2'$$

$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

2. แทนค่า y_p, y_p' และ y_p'' ลงในสมการ

$a_2 \cdot y_p'' + a_1 \cdot y_p' + a_0 \cdot y_p = r(x)$

$$a_2\left(uy_1''+u'y_1'+vy_2''+v'y_2'\right)+a_1\left(uy_1'+vy_2'\right)+a_0\left(uy_1+vy_2\right)=r(x)$$

$$u\underbrace{\cancel{\left(a_2y_1''+a_1y_1'+a_0y_1\right)}}_{=0\text{ เพราะ } y_1 \text{ เป็นผลเฉลยทั่วไป}}+v\underbrace{\cancel{\left(a_2y_2''+a_1y_2'+a_0y_2\right)}}_{=0\text{ เพราะ } y_2 \text{ เป็นผลเฉลยทั่วไป}}+a_2(u'y_1'+v'y_2')=r(x)$$

$$\boxed{a_2(u'y_1'+v'y_2')=r(x)}$$

ดังนั้นเราได้

$$\boxed{u'y_1'+v'y_2'=\frac{r(x)}{a_2(x)}}$$

$$u'y_1+v'y_2=0$$

System of 1st order ODE

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

$$u'y_1' + v'y_2' = \frac{r(x)}{a_2(x)}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{r}(x) \end{bmatrix}, \quad \bar{r} = \frac{r(x)}{a_2(x)}$$

กฎของ Cramer

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \bar{r} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}, \quad v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \bar{r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

$$u = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \bar{r} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} dx \qquad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$v = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \bar{r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} dx$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \rightarrow y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$y_p = u y_1 + v y_2$$

$$\boxed{\begin{aligned} u'y_1 + v'y_2 &= 0 \\ u'y_1' + v'y_2' &= \frac{r(x)}{a_2(x)} \end{aligned}}$$

ซึ่งมีผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$u' = -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}, \qquad \text{และ} \qquad v' = \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')},$$

เมื่อ $\bar{r} = \dfrac{r(x)}{a_2(x)}$

หาค่า u และ v ได้โดย

$$u(x) = \int -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx$$

$$v(x) = \int \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx$$

$\Rightarrow y_p = uy_1 + vy_2$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธ์ คือ

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1y_1 + c_2y_2 + u(x)y_1 + v(x)y_2, \end{aligned}$$

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$$

พิจารณา สมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

ผลเฉลย $\qquad y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$

สมมติ $\qquad y_p = \underline{u y_1} + v y_2$

$y_1 = \qquad\qquad y_2 =$

$y_1' = \qquad\qquad y_2' =$

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' =$$

$$u = \int - \frac{y_2 \cdot \bar{r}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \, dx \quad , \quad \bar{r} = \frac{r(x)}{a_2(x)}$$

$$v = \int \frac{y_1 \cdot \bar{r}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \, dx$$

$$y_p = u y_1 + v \cdot y_2$$

$$y = y_h + y_p$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$1)\; y'' + y = \boxed{\csc x}$$

สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y'' + y = 0$$

สมการช่วย $\lambda^2 + 1 = 0$

$$\lambda = \pm i \;, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$y_h = c_1 \cdot \cos x + c_2 \cdot \sin x$$

ให้ $y_p = u \cdot \cos x + v \cdot \sin x$

$$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \sin x$$

$$y_p = u \cdot \cos x + v \cdot \sin x$$

$$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \sin x$$

$$y_1' = -\sin x \qquad y_2' = \cos x$$

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = (\cos x)\cos x - \sin x(-\sin x)$$

$$= \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$= 1$$

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \csc x \end{bmatrix}$$

$$u = \int -\frac{y_2 \cdot \bar{r}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}\, dx$$

$$= \int -\frac{\sin x \cdot \boxed{\csc x}}{1}\, dx$$

$$= \int -\frac{\cancel{\sin x} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin x}}}{1}\, dx$$

$$= -\int 1\, dx = -x$$

$$v = \int \frac{y_1 \cdot \bar{r}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}\, dx$$

$$= \int \frac{\cos x \cdot \csc x}{1}\, dx$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \cot x \, dx$$

$$= \ln|\sin x|$$

$$y_p = u y_1 + v y_2$$

$$= (-x)\cos x + \ln|\sin x|\sin x$$

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x - x\cos x$$
$$+ \sin x \ln|\sin x|$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y = \tan x$$

สมการเอกพันธ์ุที่เกี่ยวข้อง

$$y'' + y = 0$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

ข้อ 2 $\quad y_p = u y_1 + v y_2$

$$= u \cos x + v \sin x$$

$$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \sin x$$

$$y_1' = -\sin x \qquad y_2' = \cos x$$

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$u = \int -\frac{y_2 \bar{r}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \, dx$$

$$= \int -\frac{(\sin x) \tan x}{1} \, dx$$

$$= -\int \sin x \tan x \, dx$$

$$v = \int - \sin x \tan x \, dx$$

$$= -\int \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \, dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} \, dx$$

$$= -\int \left[\frac{1}{\cos x} - \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos x}} \right] dx$$

$$= \int \left[\cos x - \sec x \right] dx$$

$$u = \sin x - \ln |\sec x + \tan x|$$

$$u = \sin x - \ln|\sec x + \tan x|$$

$$v = \int \frac{y_1 \cdot \bar{r}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}\, dx = \int \frac{\cos x \cdot \tan x}{1}\, dx$$

$$= \int \cancel{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}\, dx = \int \sin x \, dx$$

$$v = -\cos x$$

$$y_p = u y_1 + v y_2$$

$$= (\sin x - \ln|\sec x + \tan x|) \cos x$$

$$+ (-\cos x) \sin x$$

$$= \cancel{\sin x \cos x} - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

$$- \cancel{\sin x \cos x}$$

$$y_p = -\cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln|\sec x + \tan x|$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$\underline{x^2} y'' + xy' - y = \boxed{x \ln x} \quad (x>0)$$

<u>หมายเหตุ</u> ผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ุที่เกี่ยวข้อง

$$y_h = c_1 x + \frac{c_2}{x}$$

สมการเอกพันธ์ุที่เกี่ยวข้อง

$$x^2 y'' + xy' - y = 0$$

$$y_p = u \cdot x + v \cdot \frac{1}{x}$$

$$y_p = u \cdot x + v \cdot \frac{1}{x}$$

$$y_1 = x \qquad y_2 = \frac{1}{x}$$

$$y_1' = 1 \qquad y_2' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} \cdot 1$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$$

$$\bar{r} = \frac{x \ln x}{x^2} = \frac{\ln x}{x}$$

$$U = \int -\frac{y_2 \cdot \bar{r}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}\,dx$$

$$= \int \frac{\cancel{-}\left(\frac{1}{\cancel{x}}\right)\left(\frac{\ln x}{x}\right)}{\cancel{-}\frac{2}{\cancel{x}}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\ln x}{x}\,dx$$

$9\,u^2$ $\quad \tilde{u} = \ln x \qquad d\tilde{u} = \frac{1}{x}\,dx \qquad dx = x\,d\tilde{u}$

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{\tilde{u}}{\cancel{x}}\,\cancel{x}\,d\tilde{u} = \int \tilde{u}\,dx = \frac{\tilde{u}^2}{2} + C$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

$$U = \frac{(\ln x)^2}{4}$$

$$V = \int \frac{y_1 \bar{r}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}\, dx$$

$$= \int \frac{\cancel{x} \cdot \frac{\ln x}{\cancel{x}}}{\left(-\frac{2}{x}\right)}\, dx = \int \frac{x \ln x}{-2}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int x \ln x \, dx \quad \text{(by parts)}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \right)$$

$$V = \frac{x^2}{8} - \frac{x^2 \ln x}{4}$$

$$u = \frac{(\ln x)^2}{4}$$

$$v = \frac{x^2}{8} - \frac{x^2 \ln x}{4}$$

$$y_p = u y_1 + v y_2$$

$$= \frac{(\ln x)^2}{4} \cdot x + \left(\frac{x^2}{8} - \frac{x^2 \ln x}{4} \right) \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x(\ln x)^2}{4} + \frac{x}{8} - \frac{x \ln x}{4}$$

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1 x + c_2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{x(\ln x)^2}{4} + \frac{x}{8} - \frac{x \ln x}{4}$$

$$= \tilde{c}_1 x + \frac{c_2}{x} + \frac{x(\ln x)^2}{4} - \frac{x \ln x}{4}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y = \boxed{\csc x + 3x - 1}$$

สมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y'' + y = 0$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$y_1 = \cos x$ $\quad$ $y_2 = \sin x$

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = 1$$

ให้ $y_p = u \cos x + v \sin x$

$$u = \int -\frac{\sin x\,(\csc x + 3x - 1)}{1}\,dx$$

$$v = \int \frac{\cos x\,(\csc x + 3x - 1)}{1}\,dx$$

$$y'' + y = \csc x + 3x - 1$$

1) $\boxed{y'' + y = \csc x}$ → y_{p_1} → การแปรผันของตัวแปรเสริม

2) $y'' + y = 3x - 1$ → y_{p_2} → เทียบสัมประสิทธิ์

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2}$$

ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

$$a y'' + b y' + c y = \underbrace{r(x)}$$

ต้องเป็นค่าคงตัว

มีอยู่ไม่กี่รูปแบบ

การแปรผันของตัวแปรเสริม

$$\underline{a(x)}\, y'' + \underline{b(x)}\, y' + \underline{c(x)}\, y = \underline{r(x)}$$

ยากกว่า !!! เพราะต้องทำการอินทิเกรต

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = r(x)$$

สมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

ดุน^2

$$y_p = u y_1 + v y_2$$

$$y_1 \qquad y_2$$

$$y_1' \qquad y_2'$$

$$\bar{r}(x) = \frac{r(x)}{a(x)}$$

$$u = \int - \frac{y_2 \cdot \bar{r}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \, dx$$

$$v = \int \frac{y_1 \bar{r}}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \, dx$$

$$y = y_h + y_p$$

$$= c_1 y_1 + c_2 y_2 + u y_1 + v y_2$$

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = r_1 + r_2 + r_3$$

- $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = r_1 \Rightarrow y_{p_1}$
- $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = r_2 \Rightarrow y_{p_2}$
- $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = r_3 \Rightarrow y_{p_3}$

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$