$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \boxed{r(x)}$$ (เชิงเส้น)

1. $r(x) \equiv 0$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

สมการเอกพันธุ์

homogeneous equation

2. $r(x) \neq 0$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$

สมการไม่เอกพันธุ์

nonhomogeneous equation

$$ay'' + by' + cy = 0$$

a, b, c เป็นค่าคงตัว

สมการเอกพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

สมการช่วย

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2-4ac>0$, $\lambda=\lambda_1,\lambda_2$, $\lambda_1\neq\lambda_2$ (เป็นจำนวนจริง)

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y = c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$$, c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

$b^2-4ac=0$

$$\lambda = \frac{-b\pm\sqrt{0}}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y = c_1e^{\lambda x}+c_2xe^{\lambda x}$$

$b^2 - 4ac < 0$

$\lambda = r \pm s i \quad , \quad i = \sqrt{-1}$

ส่วนจริง

ส่วนจินตภาพ

$$y = e^{rx}\left[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)\right]$$

การใช้ผลเฉลยหนึ่งหาอีกผลเฉลยหนึ่งในสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น

เนื่องจากเราทราบแล้วว่าสำหรับสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองใดๆ

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

ผลเฉลยทั่วไปต้องอยู่ในรูป

$$\boxed{y = c_1y_1 + c_2y_2,}$$

สมมติว่า เรามี $\boxed{y_1}$ ซึ่งเป็นผลเฉลยของสมการ (3.24) เนื่องจาก

เราต้องการผลเฉลย y_2 ที่ไม่เป็นสัดส่วนซึ่งกันและกันกับ y_1 ดังนั้น

เราจะให้

$$y_2 = \boxed{v(x)}y_1,$$

$v(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว และพบว่าอนุพันธ์ของ y_2 คือ

$y_2 = v y_1$

$$y_2' = v'(x)y_1 + v(x)y_1'$$

$$y_2'' = v''(x)y_1 + 2v'(x)y_1' + v(x)y_1''$$

เนื่องจาก y_2 ผลเฉลยของสมการ

$$a(x)\underbrace{\left(v''(x)y_1 + 2v'(x)y_1' + v(x)y_1''\right)}_{y_2''}+b(x)\underbrace{\left(v'(x)y_1 + v(x)y_1'\right)}_{y_2'}+c(x)\underbrace{v(x)y_1}_{y_2} = 0$$

จัดรูปได้เป็น

$$\left(a(x)y_1\right)v''(x)+\left(2a(x)y_1' + b(x)y_1\right)v'(x)+\underbrace{\cancel{\left(a(x)y_1'' + b(x)y_1' + c(x)y_1\right)}}_{=0 \text{ เพราะว่า } y_1 \text{ เป็นผลเฉลยของ (3.24)}}v(x) = 0$$

$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$

นั่นคือเราได้สมการ

2^{nd} order ODE

$$(a(x)y_1)\,v''(x) + \left(2a(x)y_1' + b(x)y_1\right)v'(x) = 0$$

ให้ $\boxed{u = v'}$ ดังนั้น $\frac{du}{dx} = \boxed{u'} = \boxed{v''}$ และสามารถเขียนสมการใหม่ได้เป็น

1^{st} order ODE

$$(a(x)y_1)\,\frac{du}{dx} + \left(2a(x)y_1' + b(x)y_1\right)u = 0$$

ซึ่งนี้เป็นสมการแยกกันได้[14] และมีผลเฉลยคือ

$$\begin{aligned}
\boxed{\frac{1}{u}du} &= \boxed{\left(-\frac{2a(x)y_1'+b(x)y_1}{a(x)y_1}\right)}dx = \left(-2\frac{y_1'}{y_1}-\frac{b(x)}{a(x)}\right)dx \\
\int \frac{1}{u}du &= \int\left(-2\frac{y_1'}{y_1}-\frac{b(x)}{a(x)}\right)dx = -2\int \frac{y_1'}{y_1}dx - \int \frac{b(x)}{a(x)}dx \\
\ln u &= -2\ln y_1 - \int \frac{b(x)}{a(x)}dx \\
u &= \frac{1}{(y_1)^2}e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow u = e^{-2\ln y_1 - \int \frac{b}{a}dx}$

$= e^{\ln(y_1^{-2}) - \int \frac{b}{a}dx}$

$= e^{\ln(y_1^{-2})} \cdot e^{-\int \frac{b}{a}dx}$

$= y_1^{-2}$

$u = v'$

เมื่อ แทนค่า $u = v'$ กลับ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} v' &= \boxed{\frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}} \\ v &= \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} dx \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\boxed{y_2 = vy_1}$ ดังนั้น เราได้ผลเฉลยอีกผลเฉลยหนึ่งคือ

$$y_2 = y_1 \boxed{\int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx} dx}$$

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

หา y_1 ให้เจอ (ผลเฉลยตัวที่หนึ่ง)

ผลเฉลยอีกผลเฉลย

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} \cdot e^{-\int \frac{b}{a} dx} \, dx$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y''+2y'-15y=0$$

เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x)=e^{3x}$

สมการช่วย $\lambda^2+2\lambda-15=0$

$(\lambda-3)(\lambda+5)=0$

$\lambda=3,-5$

ผลเฉลยทั่วไป $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-5x}$

ผลเฉลยทั่วไป $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-5x}$

$$1\cdot y'' + 2y' - 15y = 0$$

$$y_1 = e^{3x}$$

$$y_2 = y_1 \cdot \int \frac{1}{(y_1)^2} \cdot e^{-\int \frac{b}{a}dx}\, dx$$

$a = 1$ $b = 2$

$$y_2 = e^{3x} \cdot \int \frac{1}{(e^{3x})^2} \cdot e^{-\int \frac{2}{1}dx}\, dx = e^{3x}\int \frac{1}{e^{6x}} \cdot e^{-2x}\, dx$$

$$= e^{3x}\int e^{-2x-6x}\,dx = e^{3x}\int e^{-8x}\,dx$$

$$= e^{3x}\cdot \frac{e^{-8x}}{-8} = \frac{e^{3x-8x}}{-8} = \frac{e^{-5x}}{-8}$$

ผลเฉลยทั่วไป $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-5x}$

$$y = \bar{c}_1 y_1 + \bar{c}_2 y_2$$

$$= \bar{c}_1 e^{3x} + \frac{\bar{c}_2 \cdot e^{-5x}}{-8}$$

$$= \bar{c}_1 e^{3x} + \bar{\bar{c}}_2 e^{-5x} \qquad \left(\bar{\bar{c}}_2 = \frac{\bar{c}_2}{-8} \right)$$

$$\alpha^2 y'' - 2\alpha\beta y' + \beta^2 y = 0$$

สมการช่วย

$$\alpha^2\lambda^2 - 2\alpha\beta\lambda + \beta^2 = 0$$

$$(\alpha\lambda - \beta)^2 = 0$$

$$\alpha\lambda - \beta = 0$$

$$\alpha\lambda = \beta$$

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$y_1 = e^{\frac{\beta}{\alpha}x}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{\beta}{a} dx} dx$$

$$\alpha^2 y'' \underline{-2\alpha\beta}\, y' + \beta^2 y = 0$$

$$y_1 = e^{\frac{\beta}{\alpha}x}$$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{\beta}{a} dx} dx$$

$$= e^{\frac{\beta}{\alpha}x} \int \frac{1}{\left(e^{\frac{\beta}{\alpha}x}\right)^2} e^{-\int \frac{(-2\alpha\beta)}{\alpha^2} dx} dx$$

$$= e^{\frac{\beta}{\alpha}x} \int \frac{1}{e^{2\frac{\beta}{\alpha}x}} e^{2\frac{\beta}{\alpha}\int 1 dx} dx$$

$$= e^{\frac{\beta}{\alpha}x} \int \frac{1}{\cancel{e^{2\frac{\beta}{\alpha}x}}} \cancel{e^{2\frac{\beta}{\alpha}x}} dx = e^{\frac{\beta}{\alpha}x} \int 1 \, dx$$

$$y_2 = x e^{\frac{\beta}{\alpha}x}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2 y'' + xy' - y = 0$$

เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x) = x$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b}{a} dx} dx$$

$$= x \int \frac{1}{(x)^2} e^{-\int \frac{x}{x^2} dx} dx$$

$$= x \int \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx = x \int x^{-2} e^{-\ln x} dx$$

$$= x \int x^{-2} e^{\ln x^{-1}} dx = x \int x^{-2} \cdot x^{-1} dx$$

$$= x \int x^{-3} dx$$

$$y_2 = x \int x^{-3}\,dx$$

$$= x \cdot \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{x^{-1}}{-2} = -\frac{1}{2x}$$

ผลเฉลยทั่วไป

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 x + c_2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$y = c_1 \cdot x + c_2\left(-\frac{1}{2x}\right)$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad x > 0$$

เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x) = x^2$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b}{a} dx} dx$$

$a = x^2 \qquad b = -4x$

$$y_2 = x^2 \int \frac{1}{(x^2)^2} e^{-\int \frac{(-4x)}{x^2} dx} dx$$

$$= x^2 \int \frac{1}{x^4} e^{4 \int \frac{1}{x} dx} dx$$

$$Y_2 = x^2 \int \frac{1}{x^4} e^{4\int \frac{1}{x} dx} dx$$

$$= x^2 \int \frac{1}{x^4} e^{4 \ln x} dx$$

$$= x^2 \int \frac{1}{x^4} \cdot e^{\ln x^4} dx$$

$$= x^2 \int \frac{1}{\cancel{x^4}} \cdot \cancel{x^4} dx = x^2 \int 1 \, dx$$

$$= x^2 \cdot x = x^3$$

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x^3$$

ผลเฉลยทั่วไป

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$2x^2 y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0$$

เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x) = \frac{1}{x}$

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b}{a} dx} dx$$

$a = 2x^2 \quad , b = 3x$

$$y_2 = \left(\frac{1}{x}\right) \int \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} e^{-\int \frac{3x}{2x^2} dx} dx$$

$$y_2 = \left(\frac{1}{x}\right) \int \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2} e^{-\int \frac{3x}{2x^2} dx} dx$$

$$= \frac{1}{x} \int x^2 e^{-\frac{3}{2} \int \frac{1}{x} dx} dx$$

$$= \frac{1}{x} \int x^2 \cdot e^{-\frac{3}{2} \ln x} dx$$

$$= \frac{1}{x} \int x^2 \cdot x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{x} \int x^{2-\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{x} \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$= c_1 \cdot \frac{1}{x} + c_2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{c_1}{x} + c_2 \sqrt{x}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$x^2y''-5xy'+9y=0, \quad x>0$$

เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x)=x^3$

$a=x^2 \qquad b=-5x$

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{(y_1)^2} e^{-\int \frac{b}{a}dx} dx$$

$$= x^3 \int \frac{1}{(x^3)^2} \cdot e^{-\int \frac{(-5x)}{x^2}dx} dx$$

$$= x^3 \int \frac{1}{x^6} \cdot e^{5\int \frac{1}{x}dx} dx$$

$$= x^3 \int x^{-6} \cdot e^{5\ln x} dx$$

$$y_2 = x^3 \int x^{-6} \cdot e^{5 \ln x} \, dx$$

$$= x^3 \int x^{-6} \cdot x^5 \, dx$$

$$= x^3 \int x^{-1} dx = x^3 \int \frac{1}{x} dx$$

$$y_2 = x^3 \ln |x|$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการ คือ

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$$= C_1 x^3 + C_2 x^3 \ln |x|$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

a, b, c เป็นค่าคงตัว

สมการช่วย $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$b^2 - 4ac > 0$, $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$b^2 - 4ac = 0$, $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

$b^2 - 4ac < 0$, $\lambda = r \pm si$, $i = \sqrt{-1}$

$$y = e^{rx}\left[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)\right]$$

a, b, c เป็นฟังก์ชันของ x

ถ้า y_1 เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{(y_1)^2} \cdot e^{-\int \frac{b}{a} dx} \, dx$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธุ์

แบบฝึกหัด

จงหาผลเฉลยของสมการ หรือ ปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

1. $y''+\sqrt{2}y'+4y=0, \quad y(0)=\sqrt{2}, y'(0)=6$

2. $y''+ey'+e^2y=0, \quad y(e)=e, y'(e)=e^2$

3. $y''+\pi^2y=0, \quad y(\frac{1}{2})=\pi, y'(\frac{1}{2})=-1$

4. $2x^2y''+3xy'-y=0, \quad x>0$

   เมื่อทราบว่าผลเฉลยหนึ่งของสมการคือ $y_1(x)=\dfrac{1}{x}$