สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับที่สอง

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองคือ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx}),$$

$$y'' = f(x, y, y'),$$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันใดๆ ของ x, y และ $\frac{dy}{dx}$,

x เป็นตัวแปรอิสระ, y เป็นตัวแปรไม่อิสระและ

$\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}$ เป็นอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

อันดับที่หนึ่ง และ ที่สอง ตามลำดับ

ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

- $F = m\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}}$ กฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law)
- $F_{\text{สปริง}} = \boxed{m\frac{d^2y}{dt^2}} = -ky$ กฎของฮุก (Hooke's law)
- $F_{\text{แรงเสียดทาน}} = \boxed{my''} = -by'$ สมการการเคลื่อนที่แบบการสั่น (vibration motion equation)
- $my'' + by' + ky = F_{\text{ภายนอก}}(t)$ สมการการเคลื่อนที่แบบการสั่นชนิดมีแรงภายนอก (vibration motion equation with external force)
- $\boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}E(t)}$ กฎของคีร์ชฮอฟฟ์ (Kirchhoff's loop law)

สมการเชิงเส้น

Linear

เราสามารถเขียน

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สอง ได้เป็น

$$\boxed{a_2(x)}\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$

เมื่อ $a_2(x) \neq 0$ และ a_2, a_1, a_0, b เป็นฟังก์ชันของ

ตัวแปร x

เนื่องจาก $a_2(x) \neq 0$ เราสามารถหารสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สองดังกล่าวด้วย $a_2(x)$ และ เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สองได้เป็น

$$\boxed{y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),} \tag{3.7}$$

เมื่อ $p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $q(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ และ $r(x) = \dfrac{b(x)}{a_2(x)}$

ถ้า $r(x) \equiv 0$ (นั่นคือ $r(x) = 0$ ทุกๆ ค่า x ที่อยู่ในช่วงที่พิจารณา) สมการ (3.7) จะสามารถถูกเขียนได้เป็น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \boxed{0,} \tag{3.8}$$

และเราเรียกสมการนี้ว่า *สมการเอกพันธุ์*[11] (homogeneous equation) แต่ ถ้า $r(x) \neq 0$ เราเรียกสมการ (3.7) ว่า *สมการไม่เอกพันธุ์* (nonhomogeneous equation)

$y'' + 3xy' + x^3\boxed{y^2} = e^x$ สมการไม่เชิงเส้น

$(\sin x)y'' + (\cos x)y' + \tan\sqrt{x} = 0$

$\underbrace{(\sin x)y'' + (\cos x)y' + 0y = -\tan\sqrt{x}}$

สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์

$\boxed{y''} + 3x\boxed{y'} + x^3\boxed{y} = e^x$ สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์

$y'' + 3xy' + x^3y = 0$ สมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

$y'' + 3y' + 5y = e^x$ สมการเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์

$y'' + 3y' + 5y = 0$ สมการเชิงเส้นเอกพันธุ์

มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ 3.2. *สำหรับสมการเอกพันธุ์*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.10}$$

ถ้า y_1 *และ* y_2 *เป็นผลเฉลยของ* ***สมการเอกพันธุ์เชิงเส้น*** *แล้วผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยทั้งสอง*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 *และ* c_2 *เป็นค่าคงตัวใดๆ ก็ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น (3.10) ด้วย*

ทฤษฎีบท 3.3. *ถ้า* y_1 *และ* y_2 *เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.11}$$

ซึ่งนิยามบนช่วง I *บางช่วง, โดย* $\dfrac{y_1}{y_2}$ *ไม่เป็นค่าคงตัวแล้วผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.3) บนช่วง* I *ต้องอยู่ในรูป*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

เมื่อ c_1 *และ* c_2 *เป็นค่าคงตัวใดๆ,* ***เท่านั้น***

สมการเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว

$y = \alpha e^{\lambda x}$

$(a\lambda^2 + b\lambda + c)\alpha e^{\lambda x} = 0$

สมการแคแรกเทอริสติก

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

ผลเฉลยหรือราก ของสมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $\boxed{b^2 - 4ac > 0}$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน**

- $b^2 - 4ac = 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**

- $b^2 - 4ac < 0$

λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**

- $b^2 - 4ac > 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน**

เราสามารถสรุปได้ว่าในกรณีนี้ผลเฉลยทั่วไป ต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

- $b^2 - 4ac = 0$

λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**

ในกรณีนี้ ผลเฉลยของสมการคาแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$$

โดยทฤษฎีบท 3.3 ทำให้เราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x},$$

- $b^2 - 4ac < 0$

λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**

กรณีเกิดขึ้นเมื่อ $b^2 - 4ac < 0$ ทำให้เราได้รากของสมการ

แคแรกเทอริสติกเป็น

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

ดังนั้น ถ้าให้

$$r = -\frac{b}{2a}, \quad s = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{และ} \quad \boxed{i = \sqrt{-1}}$$

เราสามารถเขียนรากของสมการได้เป็น

ส่วนจริง ส่วนจินตภาพ

$$\lambda_1 = r \boxed{+} is, \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = r \boxed{-} is$$

$\lambda = r \pm is$

ถ้าให้ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ และ เขียนผลเฉลยทั่วไปได้ในรูป

$$y = \boxed{e^{rx}}[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)]$$

Euler formula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad i = \sqrt{-1}$$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

สมการช่วย $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. $b^2 - 4ac > 0$, $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

2. $b^2 - 4ac = 0$, $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

3. $b^2 - 4ac < 0$, $\lambda = r \pm is$, $i = \sqrt{-1}$

$$y = e^{rx}\left[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)\right]$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$4y'' + 20y' + 24y = 0$$

สมการช่วย $4\lambda^2 + 20\lambda + 24 = 0$

$$4(\lambda^2 + 5\lambda + 6) = 0$$

$$4(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

$$\lambda = -2, -3$$

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = \frac{-6}{2}, \frac{-4}{2} = -3, -2$$

$$\lambda = -2, -3$$

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x} \qquad \left[y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} \right]$$

$$y' = -2c_1 e^{-2x} - 3c_2 e^{-3x}$$

$$y'' = (-2)(-2)c_1 e^{-2x} + (-3)(-3)c_2 e^{-3x}$$

$$= 4c_1 e^{-2x} + 9c_2 e^{-3x}$$

$$4y'' + 20y' + 24y = 4\left[4c_1 e^{-2x} + 9c_2 e^{-3x}\right]$$

$$+ 20\left[-2c_1 e^{-2x} - 3c_2 e^{-3x}\right]$$

$$+ 24\left[c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}\right]$$

$$= (16 - 40 + 24)c_1 e^{-2x} + (36 - 60 + 24)c_2 e^{-3x} = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$\boxed{y''} + y' = 0$

สมการช่วย $\lambda^2 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda + 1) = 0$

$\lambda = 0, -1$

$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{(-1)x}$

$= c_1 e^{0} + c_2 e^{-x}$

$= c_1 + c_2 e^{-x}$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' = 4y \Rightarrow y'' - 4y = 0$$

สมการช่วย

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda^2 - 4 &= 0 \\ \lambda^2 &= 4 \\ \lambda &= 2, -2 \end{aligned}}$$

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$4y'' + 20y' + 25y = 0$$

สมการช่วย

$$4\lambda^2 + 20\lambda + 25 = 0$$

$$\lambda = \frac{-20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 4 \cdot 25}}{2 \cdot 4}$$

$$= \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 400}}{8}$$

$$= \frac{-20 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{-20}{8} = \frac{-5}{2}$$

$$y = c_1 e^{-\frac{5}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{5}{2}x}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' = 4y' - 7y$$

$\Rightarrow$ $y'' - 4y' + 7y = 0$

สมการช่วย

$\lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0$

$$\lambda = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot1\cdot7}}{2\cdot1}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}\,i}{2}$$

$$= \frac{\cancel{4} \pm \cancel{2}\sqrt{3}\,i}{\cancel{2}} = \boxed{2} \pm \sqrt{3}\,i$$

$$y = e^{2x}\left[c_1 \cos(\sqrt{3}\,x) + c_2 \sin(\sqrt{3}\,x)\right]$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y'' + 4y' + 5y = 0, y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

สมการช่วย $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}\,i}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

$$= -2 \pm i$$

$$\lambda = 2 \pm i$$

$$y = e^{2x}\left[c_1 \cos x + c_2 \sin x\right]$$

$$y' = e^{2x}\frac{d}{dx}\left[c_1 \cos x + c_2 \sin x\right] +$$

$$\left[c_1 \cos x + c_2 \sin x\right]\frac{d}{dx}e^{2x}$$

$$= e^{2x}\left[-c_1 \sin x + c_2 \cos x\right] +$$

$$2e^{2x}\left[c_1 \cos x + c_2 \sin x\right]$$

$y(0) = 1 \quad (x = 0,\ y = 1)$

$$1 = \overset{1}{\cancel{e^0}}\left[c_1 \overset{1}{\cancel{\cos 0}} + c_2 \overset{0}{\cancel{\sin 0}}\right] \Rightarrow c_1 = 1$$

$y'(0) = 0 \quad (x = 0,\ y' = 0)$

$$0 = e^0\left[\overset{0}{\cancel{-1 \sin 0}} + c_2 \overset{1}{\cancel{\cos 0}}\right] + 2\overset{1}{\cancel{e^0}}\left[\overset{1}{\cancel{\cos 0}} + \overset{0}{\cancel{c_2 \sin 0}}\right]$$

$$0 = e^{0}\left[\cancelto{0}{-1\sin 0} + c_2 \cancelto{1}{\cos 0}\right] + 2\cancelto{1}{e^{0}}\left[\cancelto{1}{\cos 0} + \cancelto{0}{c_2 \sin 0}\right]$$

$$0 = 1\,[c_2] + 2(1)$$

$$c_2 = -2$$

$$y = e^{2x}\left[c_1 \cos x + c_2 \sin x\right]$$

$$y = e^{2x}\left[\cos x - 2\sin x\right]$$

เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y'' + 4y' + 2y = 0, y(0) = -1, \quad y'(0) = 2 + 3\sqrt{2}$$

$$y'' + 4y' + 2y = 0$$

สมการช่วย $\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$

$$\lambda = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$y = c_1 e^{(-2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{2})x}$$

$$y = c_1 e^{(-2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{2})x}$$

$$y(0) = -1 \quad , \quad y'(0) = 2 + 3\sqrt{2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = (-2+\sqrt{2})c_1 e^{(-2+\sqrt{2})x} + (-2-\sqrt{2})c_2 e^{(-2-\sqrt{2})x}$$

$$y(0) = -1 = c_1 e^{(-2+\sqrt{2})\cdot 0} + c_2 e^{(-2-\sqrt{2})\cdot 0}$$

$$= c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1$$

$$c_1 + c_2 = -1 \quad \ldots \quad (1)$$

$$C_1 + C_2 = -1 \quad \ldots \text{ (1)}$$

$$y'(0) = 2 + 3\sqrt{2}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = (-2+\sqrt{2})C_1 e^{(-2+\sqrt{2})x} + (-2-\sqrt{2})C_2 e^{(-2-\sqrt{2})x}$$

$$y'(0) = 2 + 3\sqrt{2} = (-2+\sqrt{2})C_1 e^{0} + (-2-\sqrt{2})C_2 e^{0}$$

$$= (-2+\sqrt{2})C_1 + (-2-\sqrt{2})C_2$$

$$(-2+\sqrt{2})C_1 + (-2-\sqrt{2})C_2 = 2 + 3\sqrt{2} \quad \ldots \text{ (2)}$$

$$C_1 + C_2 = -1 \quad \cdots \text{(1)}$$

$$(-2+\sqrt{2})C_1 + (-2-\sqrt{2})C_2 = 2+3\sqrt{2} \quad \cdots \text{(2)}$$

$\text{(1)} \times (2+\sqrt{2})$

$$(2+\sqrt{2})C_1 + (2+\sqrt{2})C_2 = -(2+\sqrt{2}) = -2-\sqrt{2} \quad \cdots \text{(3)}$$

$\text{(2)} + \text{(3)}$

$$2\sqrt{2}\,C_1 = 2\sqrt{2} \Rightarrow C_1 = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$$

แทนค่ากลับใน (1)

$$1 + C_2 = -1$$

$$C_2 = -1-1 = -2$$

$$y = c_1 e^{(-2+\sqrt{2})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{2})x}$$

ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y = e^{(-2+\sqrt{2})x} - 2e^{(-2-\sqrt{2})x}$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 2, \quad y'(0) = 25/3$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

สมการช่วย $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$$(\lambda - 3)^2 = 0$$

$$\lambda = 3$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

$$y' = 3c_1 e^{3x} + c_2 (3x e^{3x} + e^{3x})$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

$$y' = 3C_1 e^{3x} + C_2\left(3x e^{3x} + e^{3x}\right)$$

$$y(0) = 2 \qquad y'(0) = \frac{25}{3}$$

$$y(0) = 2 = C_1 \overset{1}{\cancel{e^0}} + \overset{0}{\cancel{C_2 \cdot 0\, e^0}}$$

$$C_1 = 2$$

$$y'(0) = \frac{25}{3} = 3 \cdot 2 \cdot e^0 + C_2\left(3 \cdot 0 + e^0\right)$$

$$\frac{25}{3} = 6 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{25}{3} - 6 = \frac{25}{3} - \frac{18}{3} = \frac{7}{3}$$

$$y = 2e^{3x} + \frac{7}{3} x e^{3x}$$

สรุป

ในการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.22}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว เราจะพิจารณาสมการแคแรกเทอริสติก

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3.23}$$

ผลเฉลยหรือราก ของสมการแคแรกเทอริสติก (3.23) ประกอบ

ด้วย

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เราพบว่าค่า λ_1 และ λ_2 จะเป็นไปได้ 3 กรณี เมื่อแบ่ง

ตามเครื่องหมายของค่าดิสคริมิแนนต์ $\boxed{b^2 - 4ac}$ นั่นคือ

- $b^2 - 4ac > 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน**

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

$$\boxed{y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}}$$

- $\boxed{b^2 - 4ac = 0}$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**

ถ้า $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

$$\boxed{y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}}$$

- $b^2 - 4ac < 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**

$i = \sqrt{-1}$

ถ้า $\lambda_1 = r + is$ และ $\lambda_2 = r - is$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

$$y = e^{rx}\left[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)\right]$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ