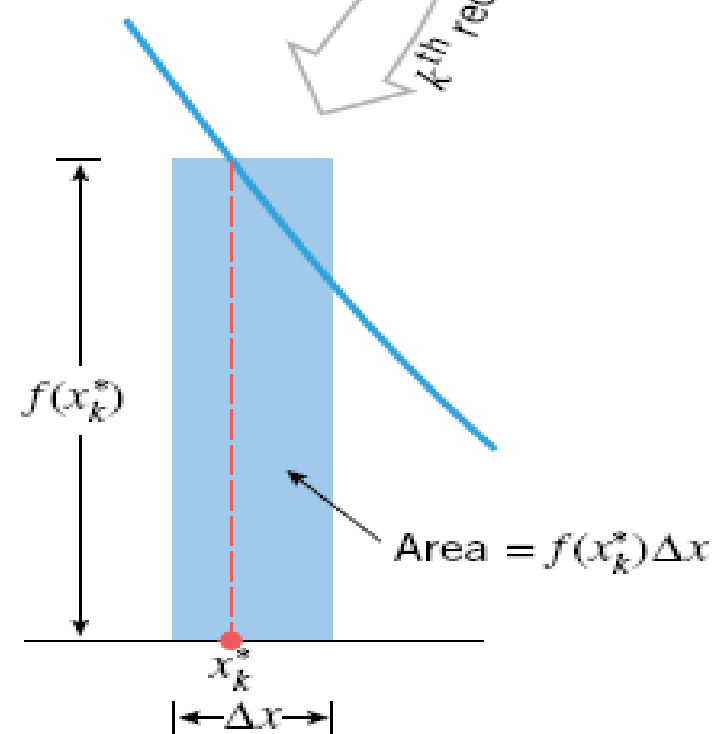
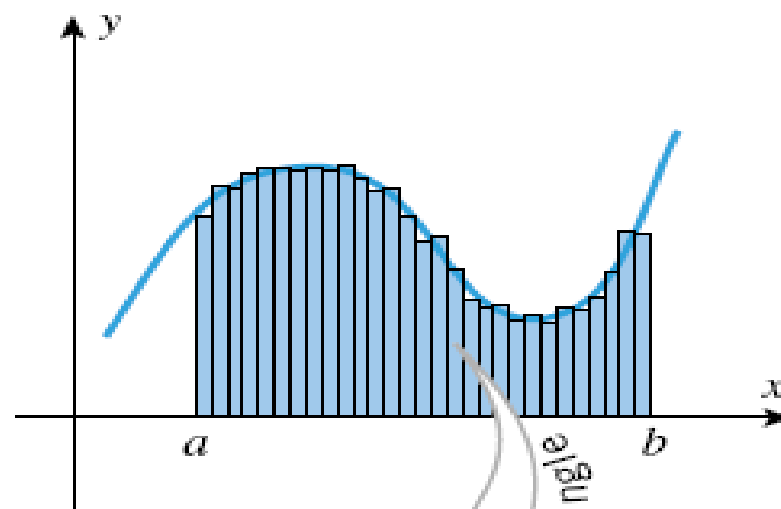
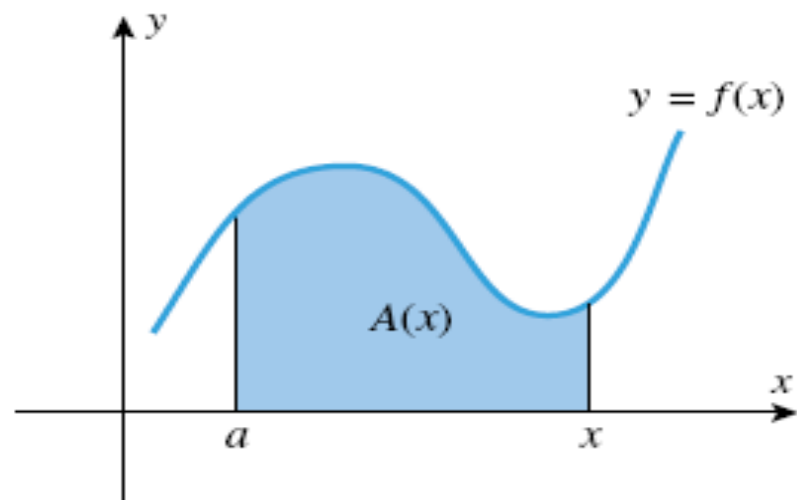


การประยุกต์ใช้ปริพันธ์

Applications of Integration

การหาปริพันธ์ สามารถถูกนำมาประยุกต์ใช้ได้ในชีวิตประจำวัน ตัวอย่างเช่น งานทางด้านฟิสิกส์ วิศวกรรมศาสตร์ หรือแม้แต่งานทางด้านวิทยาศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสิ่งมีชีวิต

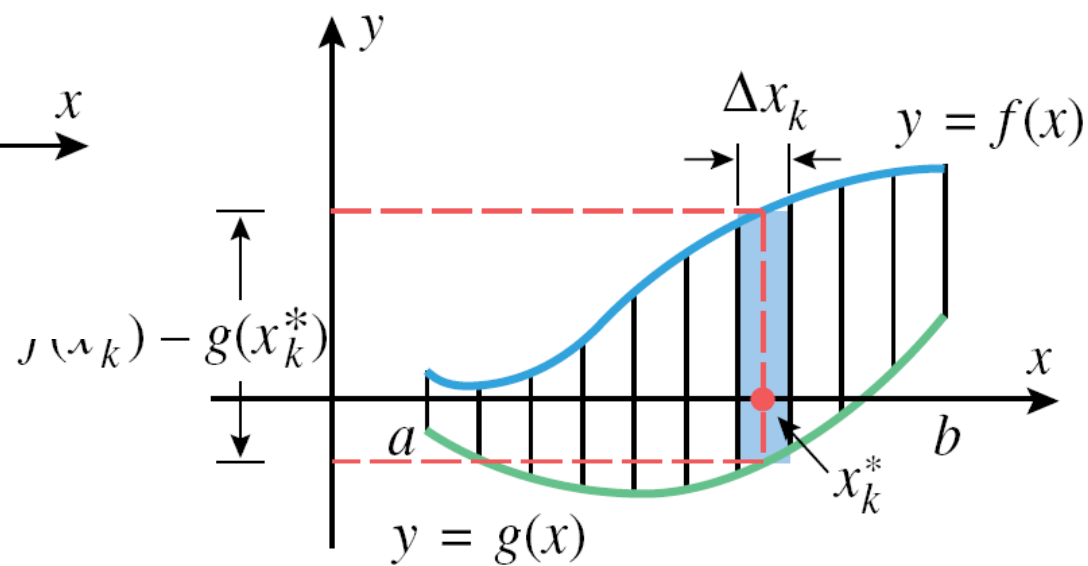
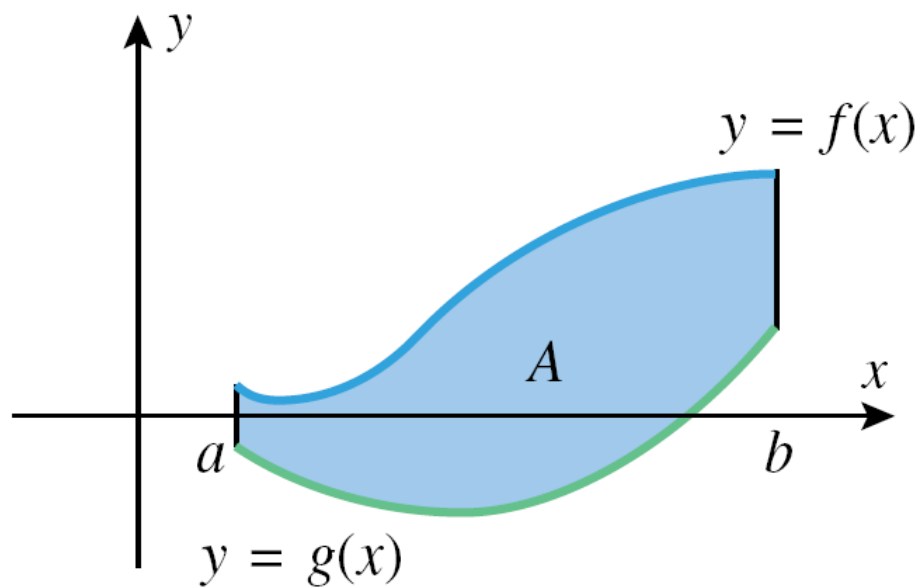


จงหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $y = \frac{1}{x}$ และอยู่เหนือแกน x
เมื่อ x อยู่ในช่วง $[1, 3]$

การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

Area between Curves

การหาพื้นที่ระหว่างเส้น โค้ง เป็นการประยุกต์ของ
การหาปริพันธ์จำกัดเขต

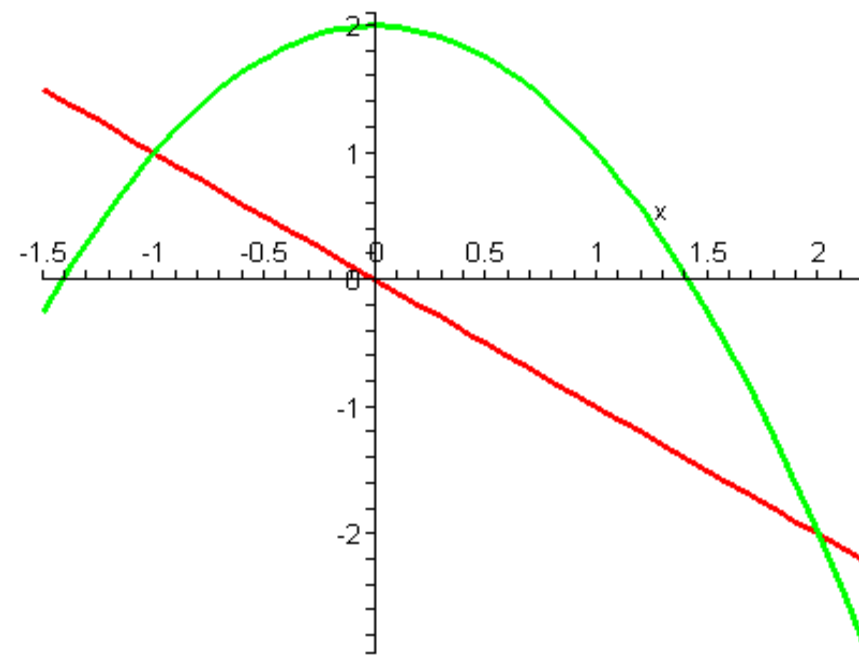


(b)

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

จงหาพื้นที่ของส่วนที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 2 - x^2$

และเส้นตรง $y = -x$



การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข

(numerical integration)

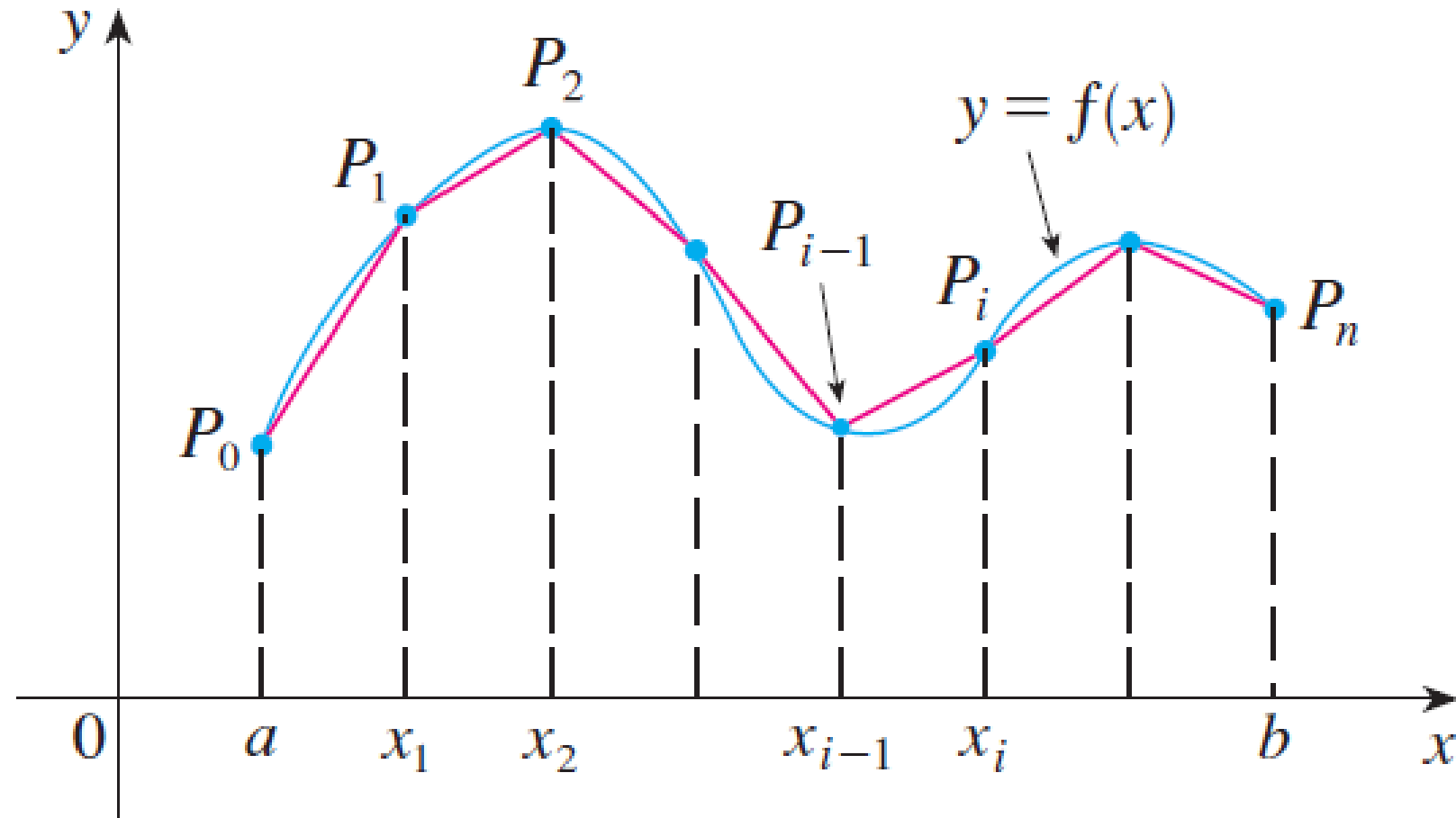
ในบางครั้ง อาจเป็นการยากที่จะประยุกต์ใช้การหาปริพันธ์เพื่อหาพื้นที่ใต้กราฟ แต่ด้วยแนวคิดของการประยุกต์ใช้การหาปริพันธ์ เราอาจหาค่าประมาณของพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันที่สนใจ โดยที่ไม่จำเป็นต้องหาปริพันธ์ก็ได้ ใช้เพียงแค่การคำนวณพื้นฐานเชิงตัวเลข

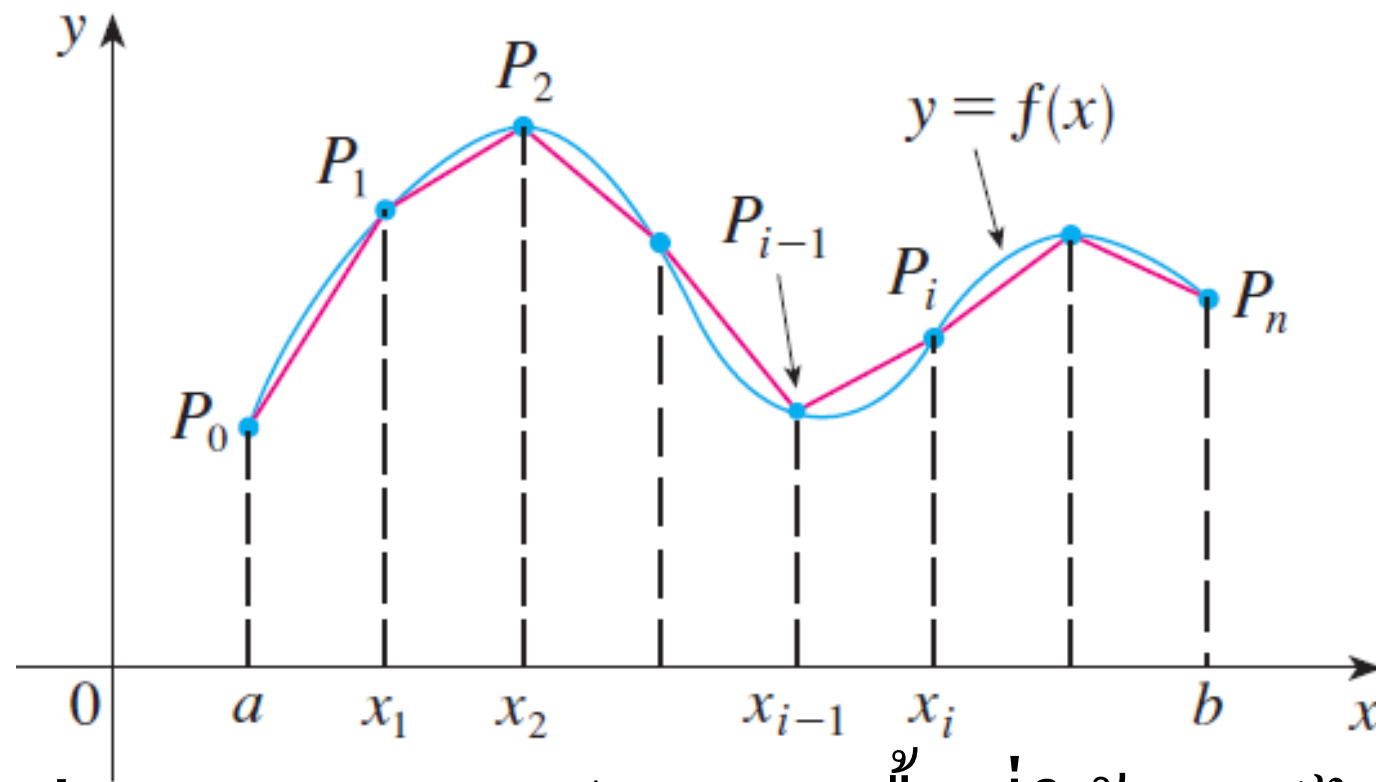
การหาปริพันธ์โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

Integration by Trapezoidal Rule

แนวคิดหนึ่งในการหาพื้นที่ใต้กราฟที่น่าสนใจ โดยการใช้การหาพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูเข้ามาช่วยในการ

คำนวณ





จากตัวอย่าง เราสามารถประมาณพื้นที่ใต้กราฟได้ คือ

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่} &= \frac{1}{2}(f(a) + f(x_1))(x_1 - a) + \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))(x_2 - x_1) + \\ &\quad \cdots + \frac{1}{2}(f(x_{n-1}) + f(b))(b - x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่} = & \frac{1}{2}(f(a) + f(x_1))(x_1 - a) + \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))(x_2 - x_1) + \\ & \cdots + \frac{1}{2}(f(x_{n-1}) + f(b))(b - x_{n-1}) \end{aligned}$$

สำหรับกรณีที่เราแบ่งช่วงในการประมาณค่าปริพันธ์เท่า ๆ กัน

โดยที่ $d = x_1 - a = x_2 - x_1 = \cdots = b - x_{n-1}$

ได้ว่า

$$\text{พื้นที่} =$$

การประมาณพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ โดยใช้
พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อ $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่} = & \frac{1}{2}(f(a) + f(x_1))(x_1 - a) + \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))(x_2 - x_1) + \\ & \cdots + \frac{1}{2}(f(x_{n-1}) + f(b))(b - x_{n-1}) \end{aligned}$$

สำหรับกรณีที่เรแบ่งช่วงในการประมาณค่าปริพันธ์เท่า ๆ กัน

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2}d(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b))$$

เมื่อ d คือ ความกว้างของช่วงที่ใช้ในการประมาณค่าปริพันธ์

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2} d (f(a) + 2 f(x_1) + 2 f(x_2) + \cdots + 2 f(x_{n-1}) + f(b))$$

$$\text{พื้นที่} = d \left(\frac{1}{2} f(a) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right)$$

$$\text{พื้นที่} = \frac{d}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$d = \frac{b-a}{n} \quad y_i = f(x_i), x_0 = a, x_1 = a + d, \dots, x_n = b$$

จงประมาณพื้นที่ใต้กราฟของเส้นโค้ง $y = 3 + 2x - x^2$

เมื่อ $x \in [-1, 3]$ โดยใช้สี่เหลี่ยมคางหมูช่วยในการหาพื้นที่

กำหนดให้ $n = 4$

กำหนดให้ $n = 8$

$$\int_{-1}^3 (3 + 2x - x^2) dx = \frac{32}{3}$$

$$n = 4$$

$$d = 1$$

i	x_i	y_i	y_i	2 y_i
0	-1	0	0	
1	0	3		6
2	1	4		8
3	2	3		6
4	3	0	0	
	sum		0	20

$$n = 8$$

$$d = 0.5$$

i	x_i	y_i	y_i	2 y_i
0	-1	0	0	
1	-0.5	1.75		3.5
2	0	3		6
3	0.5	3.75		7.5
4	1	4		8
5	1.5	3.75		7.5
6	2	3		6
7	2.5	1.75		3.5
8	3	0	0	
	sum		0	42

จงประมาณค่า $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ (กำหนดให้ $n = 10$)

j	x_j	x_j^2	$e^{-x_j^2}$
0	0	0	1.000000
1	0.1	0.01	0.990050
2	0.2	0.04	0.960789
3	0.3	0.09	0.913931
4	0.4	0.16	0.852144
5	0.5	0.25	0.778801
6	0.6	0.36	0.697676
7	0.7	0.49	0.612626
8	0.8	0.64	0.527292
9	0.9	0.81	0.444858
10	1.0	1.00	0.367879
Sums			1.367879
			6.778167

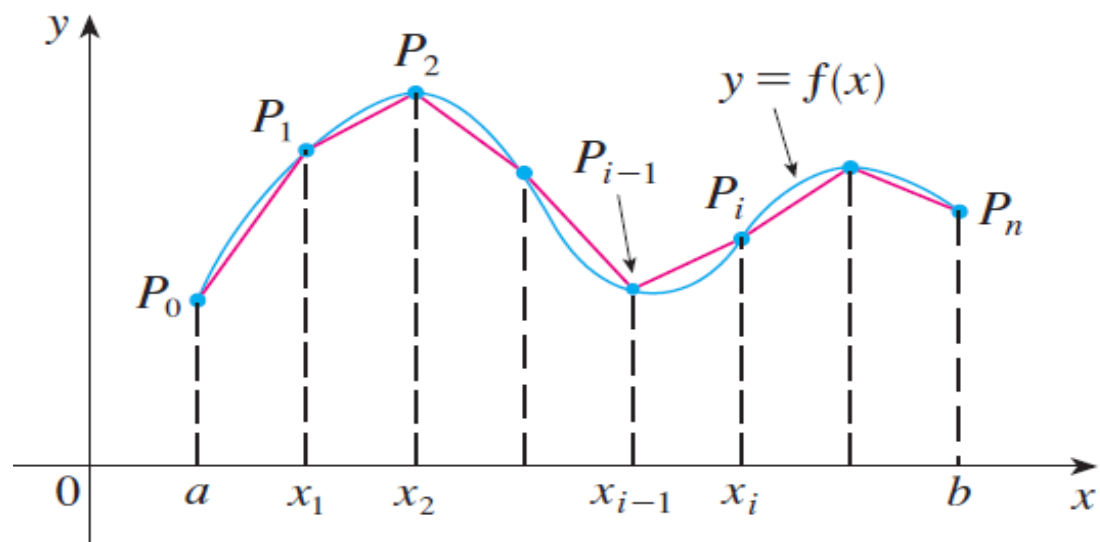
$n = 10$

$d = 0.1$

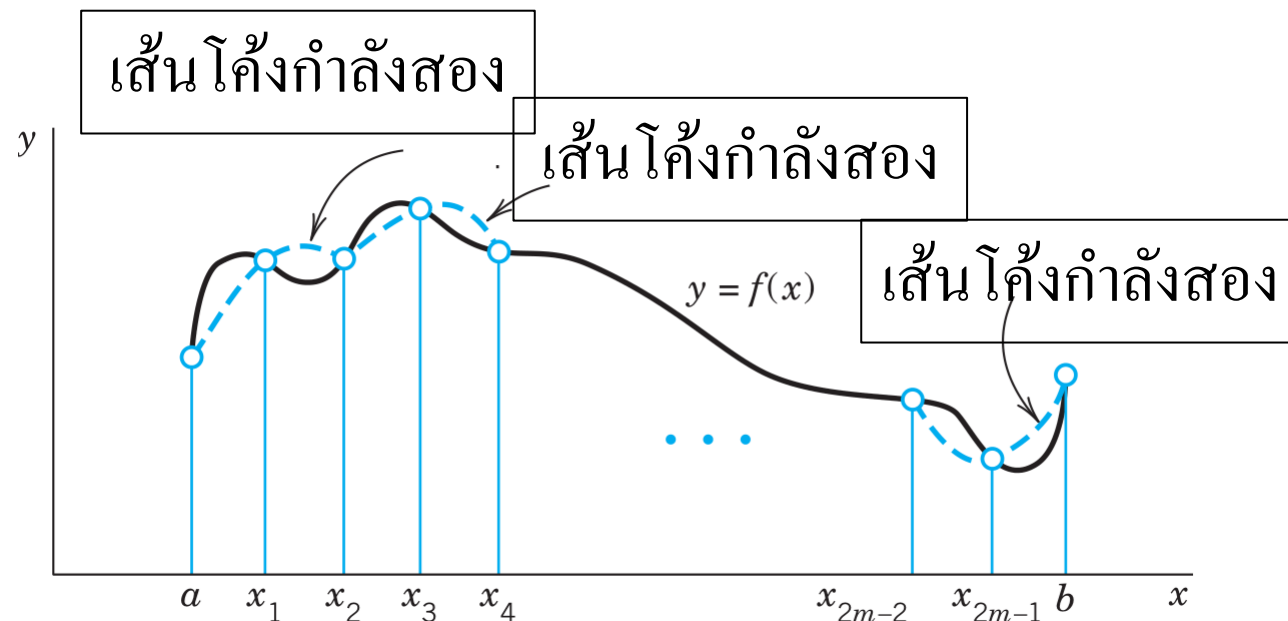
i	x_i	(x_i)^2	y_i	y_i	2 y_i
0	0	0	1	1	
1	0.1	0.01	0.99005		1.9801
2	0.2	0.04	0.960789		1.92158
3	0.3	0.09	0.913931		1.82786
4	0.4	0.16	0.852144		1.70429
5	0.5	0.25	0.778801		1.5576
6	0.6	0.36	0.697676		1.39535
7	0.7	0.49	0.612626		1.22525
8	0.8	0.64	0.527292		1.05458
9	0.9	0.81	0.444858		0.88972
10	1	1	0.367879	0.367879	
	sum			1.367879	12.6666

การหาปริพันธ์โดยใช้กฎของ Simpson

Integration by Simpson's Rule



การหาปริพันธ์โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู



การหาปริพันธ์โดยใช้กฎของ Simpson

ทบทวนความจำ การประมาณค่าในช่วง (interpolation) ด้วยพหุนามลากรองจ์

$$p_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

กรณีระยะ $d = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx = \frac{d}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_0}^{x_4} y dx = \int_{x_0}^{x_2} y dx + \int_{x_2}^{x_4} y dx$$

$$= \frac{d}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{d}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$= \frac{d}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_{2m}} y dx &= \int_{x_0}^{x_2} y dx + \int_{x_2}^{x_4} y dx + \cdots + \int_{x_{2m-4}}^{x_{2m-2}} y dx + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} y dx \\
&= \frac{d}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{d}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{d}{3} (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \\
&= \frac{d}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})
\end{aligned}$$

สรุป

$$\int_a^b y dx \approx \frac{d}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

$$d = \frac{b-a}{2m} \quad y_i = f(x_i), x_0 = a, x_1 = a + d, \dots, x_{2m} = b$$

เปรียบเทียบ

การหาปริพันธ์โดยใช้กฎสี่เหลี่ยมคางหมู

$$\int_a^b y dx \approx \frac{d}{2} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

$$d = \frac{b-a}{n} \quad y_i = f(x_i), x_0 = a, x_1 = a + d, \dots, x_n = b$$

การหาปริพันธ์โดยใช้กฎ Simpson

$$\int_a^b y dx \approx \frac{d}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

$$d = \frac{b-a}{2m} \quad y_i = f(x_i), x_0 = a, x_1 = a + d, \dots, x_{2m} = b$$

จงประมาณพื้นที่ใต้กราฟของเส้นโค้ง $y = 3 + 2x - x^2$

เมื่อ $x \in [-1, 3]$ โดยใช้กฎของ Simpson ช่วยในการหาพื้นที่

กำหนดให้ $m = 2$

กำหนดให้ $m = 4$

$$m = 2$$

$$d = 1$$

i	x_i	y_i	y_i	4 y_i	2 y_i
0	-1	0	0		
1	0	3		12	
2	1	4			8
3	2	3		12	
4	3	0	0		
	sum		0	24	8

$$m = 4$$

$$d = 0.5$$

i	x _i	y _i	y _i	4 y _i	2 y _i
0	-1	0	0		
1	-0.5	1.75		7	
2	0	3			6
3	0.5	3.75		15	
4	1	4			8
5	1.5	3.75		15	
6	2	3			6
7	2.5	1.75		7	
8	3	0	0		
	sum		0	44	20

จงประมาณค่า $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ (กำหนดให้ $m = 5$)

$m = 5$

$d = 0.1$

i	x_i	(x_i)^2	y_i	y_i	4 y_i	2 y_i
0	0	0	1	1		
1	0.1	0.01	0.99005		3.9602	
2	0.2	0.04	0.960789			1.92158
3	0.3	0.09	0.913931		3.65572	
4	0.4	0.16	0.852144			1.70429
5	0.5	0.25	0.778801		3.1152	
6	0.6	0.36	0.697676			1.39535
7	0.7	0.49	0.612626		2.45051	
8	0.8	0.64	0.527292			1.05458
9	0.9	0.81	0.444858		1.77943	
10	1	1	0.367879	0.367879		
	sum			1.367879	13.1816	6.0758