

การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)

การประมาณค่าในช่วง (interpolation) คือ การประมาณค่า ณ ตำแหน่ง x ซึ่งอยู่ระหว่างจุดที่กำหนดให้ เช่น หากกำหนดจุดให้ $n+1$ จุด ได้แก่ $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ โดยที่ $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ การประมาณค่าในช่วงคือการหาฟังก์ชัน $\phi(x)$ ซึ่ง $\phi(x_i) = y_i, i=0, \dots, n$

การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)

- การประมาณค่าในช่วงด้วยพหุนาม
(polynomial interpolation)
- การประมาณค่าในช่วงแบบ cubic spline
- การประมาณค่าในช่วงด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ
(trigonometric function interpolation)

การประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์ (Lagrange Interpolation)

การประมาณค่าในช่วงแบบลากรองจ์เป็นการประมาณค่าในช่วง
แบบพหุนามรูปแบบหนึ่ง

แนวคิด

ถ้ามีจุดที่กำหนดให้ 2 จุด (x_0, y_0) และ (x_1, y_1)

ต้องการ $L(x_0) = y_0$ $L(x_1) = y_1$

$$L(x) =$$

$$L(x_0) = y_0 \qquad L(x_1) = y_1$$

$$L(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

แนวคิด

ถ้ามีจุดที่กำหนดให้ 3 จุด (x_0, y_0) (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

ต้องการ $L(x_0) = y_0$ $L(x_1) = y_1$ $L(x_2) = y_2$

$$L(x) =$$

$$L(x_0) = y_0$$

$$L(x_1) = y_1$$

$$L(x_2) = y_2$$

$$L(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

แนวคิด

ถ้ามีจุดที่กำหนดให้ 4 จุด (x_0, y_0) (x_1, y_1) (x_2, y_2) และ (x_3, y_3)

ต้องการ $L(x_0) = y_0$ $L(x_1) = y_1$ $L(x_2) = y_2$ $L(x_3) = y_3$

$L(x) =$

$$L(x_0) = y_0 \qquad L(x_1) = y_1 \qquad L(x_2) = y_2 \qquad L(x_3) = y_3$$

$$\begin{aligned} L(x) = & y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \\ & + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ & + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ & + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{aligned}$$

แนวคิด

ถ้ามีจุดที่กำหนดให้ $n+1$ จุด (x_0, y_0) (x_1, y_1) $\dots$ (x_n, y_n)

ต้องการ $L(x_0) = y_0$ $L(x_1) = y_1$ $\dots$ $L(x_n) = y_n$

$$L(x) =$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) y_i,$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

ค่าความผิดพลาดของการประมาณค่าฟังก์ชัน $f(x)$
ด้วยพหุนาม Lagrange $p_n(x)$

$$\epsilon_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

ตัวอย่าง จงประมาณค่า $\ln 9.2$ ด้วยพหุนาม Lagrange

เมื่อทราบว่า $\ln 9.0 = 2.1972$ และ $\ln 9.5 = 2.2513$

หมายเหตุ ค่า $\ln 9.2$ ที่ถูกต้องถึงทศนิยมหลักที่ 4 คือ 2.2192

ตัวอย่าง จงประมาณค่า $\ln 9.2$ ด้วยพหุนาม Lagrange

เมื่อทราบว่า $\ln 9.0 = 2.1972$, $\ln 9.5 = 2.2513$, $\ln 11 = 2.3979$

ตัวอย่าง จงประมาณค่า $\ln 2.7$ ด้วยพหุนาม Lagrange

เมื่อทราบว่า $\ln 2 = 0.69315$, $\ln 2.5 = 0.91629$ และ

$$\ln 3 = 1.09861$$

ตัวอย่าง จงประมาณค่า $\log 301$ ด้วยพหุนาม Lagrange

เมื่อทราบว่า $\log 300 = 2.4771$, $\log 304 = 2.4829$,

$\log 305 = 2.4843$ และ $\log 307 = 2.4871$

NEWTON'S FORMULAE FOR INTERPOLATION

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n),$$

$$\begin{aligned} y_n(x) = & a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ & + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots \\ & + a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

แนวคิด

ถ้ามีจุดที่กำหนดให้ 2 จุด (x_0, y_0) และ (x_1, y_1)

ต้องการ $N(x_0) = y_0$ $N(x_1) = y_1$

$$N(x) =$$

$$N(x_0) = y_0 \qquad N(x_1) = y_1$$

$$N(x) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

หมายเหตุ การประมาณด้วยพหุนามลากรองก็คือ

$$L(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

แนวคิด

ถ้ามีจุดที่กำหนดให้ 3 จุด (x_0, y_0) (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

ต้องการ $N(x_0) = y_0$ $N(x_1) = y_1$ $N(x_2) = y_2$

$N(x) =$

$$N(x_0) = y_0$$

$$N(x_1) = y_1$$

$$N(x_2) = y_2$$

$$N(x) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \left[y_2 - y_0 - (y_1 - y_0) \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \right] \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

หมายเหตุ การประมาณด้วยพหุนามลากรองก็คือ

$$L(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

จะออกแบบวิธีที่ทำได้ง่ายกว่านี้ได้ไหม?

นิยาม

$$[x, x_0] = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$[x_0, x_1] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

$$[x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0},$$

$\vdots$

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{[x_1, x_2, \dots, x_n] - [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

หมายเหตุ ถ้า x_0 กับ x_1 มีค่าใกล้กันมาก ๆ จะได้ว่า

$$x_1 = x_0 + \varepsilon$$

$$[x_0, x_1] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [x_0, x_0 + \varepsilon]$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \varepsilon) - y(x_0)}{\varepsilon}$$

$$= y'(x_0), \quad \text{if } y(x) \text{ is differentiable.}$$

สมบัติอื่น ๆ ที่น่าสนใจ

$$[x_0, x_1] = \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0} = [x_1, x_0]$$

$$\begin{aligned}
[x_0, x_1, x_2] &= \frac{[x_1, x_2] - [x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{1}{x_2 - x_0} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) \\
&= \frac{1}{x_2 - x_0} \left[\frac{y_2}{x_2 - x_1} - y_1 \left(\frac{1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_0} \right) + \frac{y_0}{x_1 - x_0} \right] \\
&= \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\
&\quad + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [x_0, x_1, \dots, x_n] = & \frac{y_0}{(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0) \dots (x_1 - x_n)} + \dots \\
 & + \frac{y_n}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})}.
 \end{aligned}$$

$$N(x_0) = y_0 \qquad N(x_1) = y_1$$

$$N(x) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$= y_0 + (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$= y_0 + (x - x_0)[x_0, x_1]$$

$$N(x_0) = y_0 \qquad N(x_1) = y_1 \qquad N(x_2) = y_2$$

$$N(x) = y_0 + (y_1 - y_0) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \left[y_2 - y_0 - (y_1 - y_0) \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0} \right] \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$= y_0 + (x - x_0)[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) \left[\frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right] \frac{1}{(x_2 - x_1)}$$

$$= y_0 + (x - x_0)[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right] \frac{1}{(x_2 - x_0)}$$

$$= y_0 + (x - x_0)[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)[x_2, x_1, x_0]$$

$$N(x_0) = y_0 \quad N(x_1) = y_1 \quad N(x_2) = y_2 \quad N(x_3) = y_3$$

$$\begin{aligned} N(x) = & y_0 + (x - x_0)[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)[x_2, x_1, x_0] \\ & + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_3, x_2, x_1, x_0] \end{aligned}$$

ถ้ามีจุดที่กำหนดให้ n จุด $(x_0, y_0) (x_1, y_1) \dots (x_n, y_n)$

ต้องการ $N(x_0) = y_0 \quad N(x_1) = y_1 \quad \dots \quad N(x_n) = y_n$

$$N(x) = y_0 + (x - x_0)[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1)[x_2, x_1, x_0] \\ + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})[x_n, \dots, x_1, x_0]$$

ตัวอย่าง จงประมาณค่า $\ln 9.2$ ด้วยพหุนาม Newton

เมื่อทราบว่า $\ln 9.0 = 2.1972$ และ $\ln 9.5 = 2.2513$

หมายเหตุ ค่า $\ln 9.2$ ที่ถูกต้องถึงทศนิยมหลักที่ 4 คือ 2.2192

x	$\ln x$	$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$
9.0	2.1972	$[x_1, x_0] = \frac{\quad}{\quad} =$
9.5	2.2513	

x	$\ln x$	$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$
9.0	2.1972	$[x_1, x_0] = \frac{\quad}{\quad} =$
9.5	2.2513	

$$N(x) = y_0 + (x - x_0)[x_0, x_1]$$

$=$

$$N(9.2) \approx$$

ตัวอย่าง จงประมาณค่า $\ln 9.2$ ด้วยพหุนาม Newton

เมื่อทราบว่า $\ln 9.0 = 2.1972$, $\ln 9.5 = 2.2513$, $\ln 11 = 2.3979$

x	$\ln x$	$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+2}, x_{i+1}] - [x_{i+1}, x_i]}{x_{i+2} - x_i}$
9.0	2.1972		
9.5	2.2513		
11	2.3979		

$$N(x) = y_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]$$

$$=$$

$$N(9.2) \approx$$

$$N(x) = y_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]$$

=

$$N(9.2) \approx$$

หมายเหตุ ค่า $\ln 9.2$ ที่ถูกต้องถึงทศนิยมหลักที่ 4 คือ 2.2192

ตัวอย่าง จงประมาณค่า $\ln 2.7$ ด้วยพหุนาม Newton

เมื่อทราบว่า $\ln 2 = 0.69315$, $\ln 2.5 = 0.91629$ และ

$$\ln 3 = 1.09861$$

x	$\ln x$	$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+2}, x_{i+1}] - [x_{i+1}, x_i]}{x_{i+2} - x_i}$
2	0.69315		
2.5	0.91629		
3	1.09861		

$$N(x) = y_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]$$

$$=$$

$$N(2.7) \approx$$

ตัวอย่าง จงประมาณค่า $\log 301$ ด้วยพหุนาม Newton
เมื่อทราบว่า $\log 300 = 2.4771$, $\log 304 = 2.4829$,
 $\log 305 = 2.4843$ และ $\log 307 = 2.4871$

x	$\ln x$	$[x_i, x_{i+1}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
300	2.4771			
304	2.4829			
305	2.4843			
307	2.4871			

$$\begin{aligned}
 N(x) &= y_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] \\
 &\quad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
 &=
 \end{aligned}$$