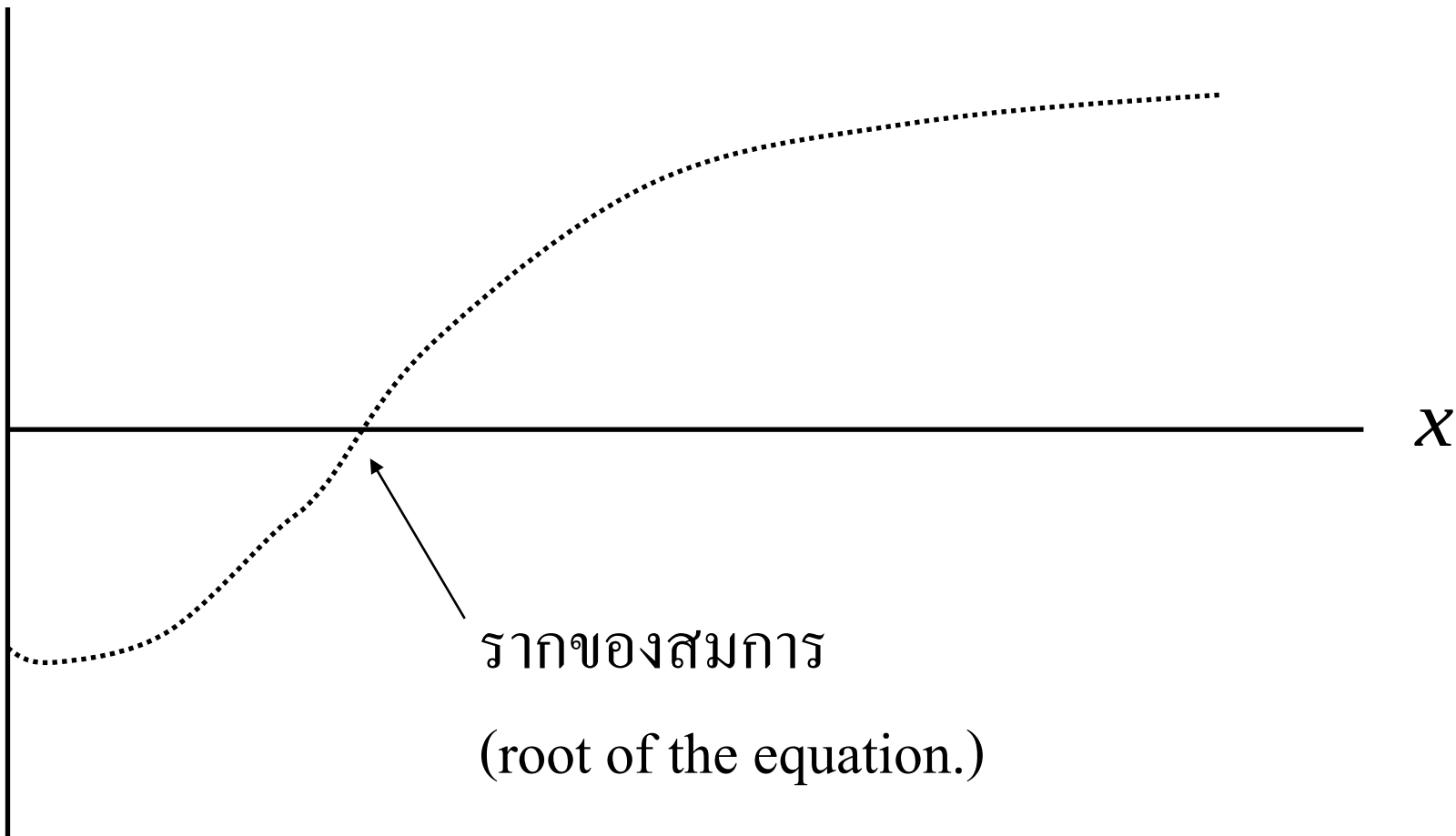


การหารากของสมการ (Roots of the equations)

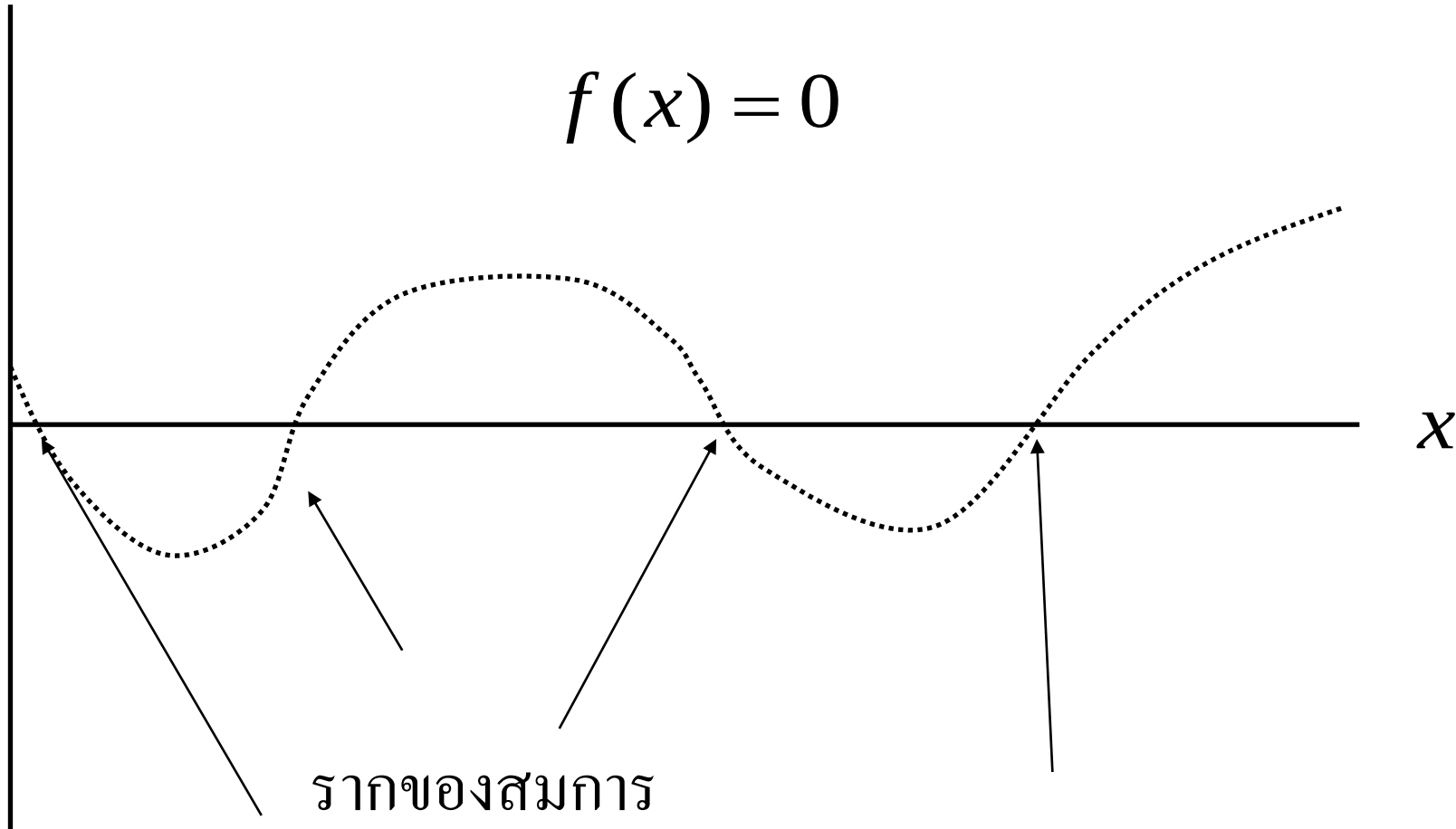
การหารากของสมการทำได้หลายวิธี เนื้อหาในส่วนนี้ต้องการนำเสนอวิธีที่อาจจะไม่ได้คำตอบที่เที่ยงตรงแต่มีค่าดีเพียงพอที่จะนำไปใช้งานได้ 3 วิธีได้แก่

1. วิธีแบ่งครึ่ง (bisection method)
2. วิธีทำซ้ำ (iterative method)
3. วิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method)

$$f(x) = 0$$



$$f(x) = 0$$



รากของสมการ

(roots of the equation.)

รากของสมการ

รากของสมการ (roots of the equation)

คือ ค่า x_0 ที่ทำให้สมการมีค่าเท่ากับ 0

$$f(x_0) = 0$$

จงหาค่าของสมการ $x^3 = 3^x$

ทฤษฎีบทค่าระหว่างกลาง (Intermediate Value Theorem)

Theorem 1.4 (*Intermediate value theorem*) Let $f(x)$ be continuous in $[a, b]$ and let k be any number between $f(a)$ and $f(b)$. Then there exists a number ξ in (a, b) such that $f(\xi) = k$ (see Fig. 1.1).

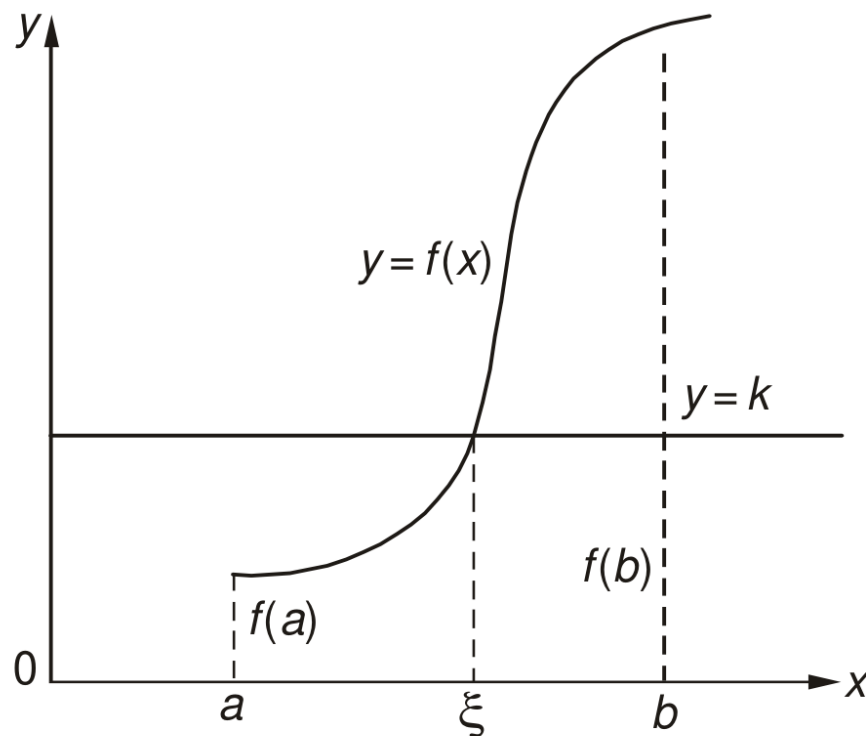


Figure 1.1 Intermediate value theorem.

การหาผลเฉลยของสมการ โดยวิธีแบ่งครึ่ง (bisection method)

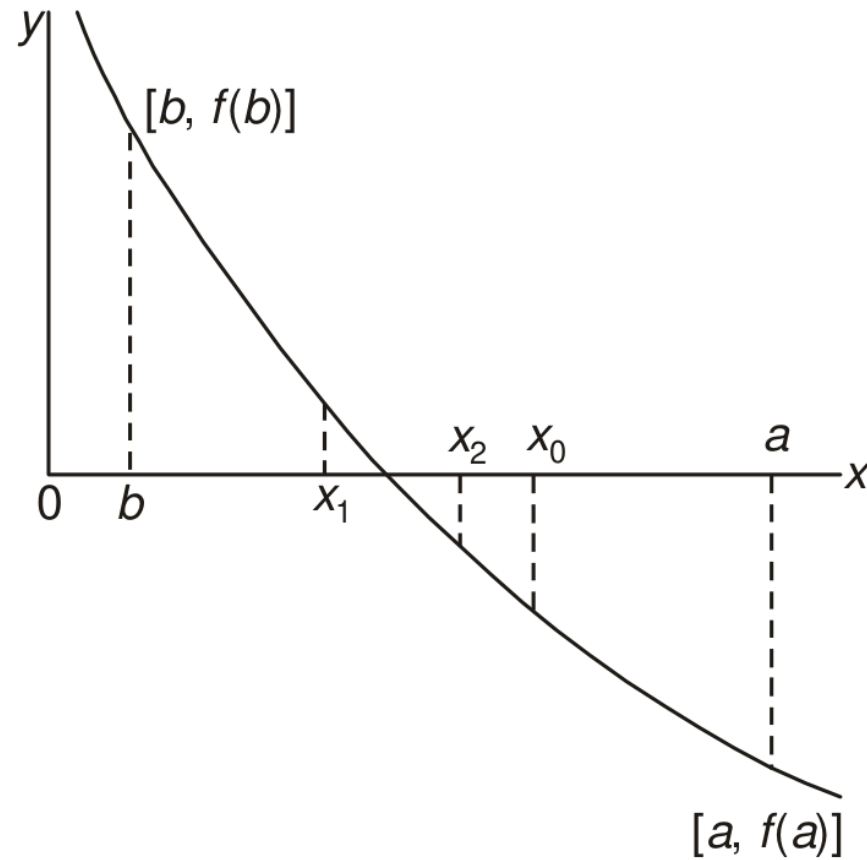


Figure 2.1 Graphical representation of the bisection method.

การที่เราจะใช้วิธีแบ่งครึ่งนี้ได้ เราต้องทราบก่อนว่าฟังก์ชันที่อยู่
ในสมการมีความต่อเนื่อง (continuous)

ตัวอย่างการหารากของสมการ $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$

พิจารณาจากค่า $x=1$ และ $x=2$

จงหารากของสมการ $x^3 - 2x - 5 = 0$

พิจารณาจากค่า $x=2$ และ $x=3$

จงหารากของสมการ $f(x) = x^3 + x^2 + x + 7 = 0$

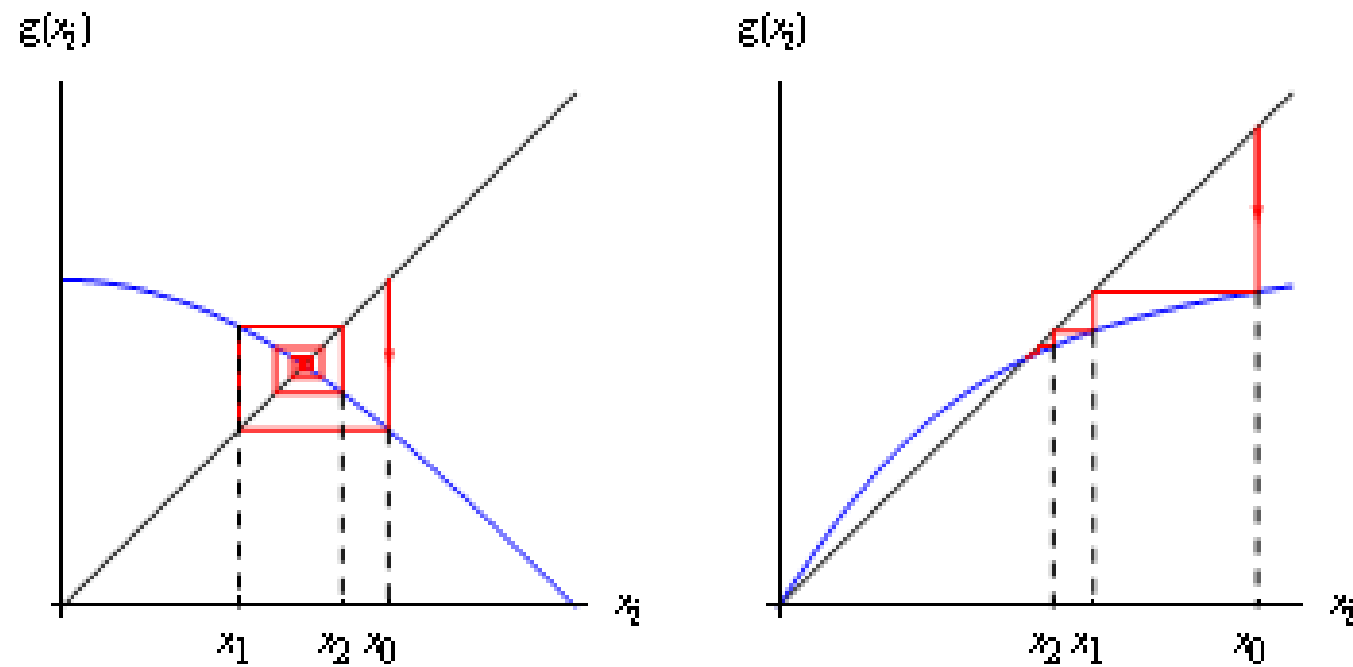
ให้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 3

พิจารณาจากค่า $x=-2$ และ $x=-3$

จงหาค่าของสมการ $x = e^{-x}$

จงหาค่าของสมการ $x^3 = 3^x$

การหาผลเฉลยของสมการ โดยวิธีทำซ้ำ (iterative method)



https://metric.ma.ic.ac.uk/metric_public/numerical_methods/iteration/fixed_point_iteration.html

จงหารากของสมการ $x^3 + x^2 - 2 = 0$

$$x = \sqrt{\frac{2}{1+x}}, \quad x = \sqrt{2-x^3}, \quad x = (2-x^2)^{1/3}$$

เงื่อนไขที่วิธีทำซ้ำ $x_{n+1} = \phi(x_n)$ จะลู่เข้า คือ

$$|\phi'(x)| < 1$$

จงหารากของสมการ $x^3 = 1 - x^2$
เมื่อทราบว่าผลเฉลยอยู่ในช่วง $[0, 1]$

จงหารากของสมการ $x^3 = 1 - x^2$
เมื่อทราบว่าผลเฉลยอยู่ในช่วง $[0, 1]$

$$x = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} = (x+1)^{-1/2}$$

$$\phi'(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{(x+1)^3}} < 1 \text{ in } [0, 1].$$

จงหารากของสมการ $2x - 3 = \cos x$

เมื่อทราบว่าผลเฉลยอยู่ในช่วง $\left[\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

โดยคำตอบต้องถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 3

Choosing $x_0 = 1.5$, we obtain successively:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2}(\cos 1.5 + 3) = 1.5354, & x_6 &= \frac{1}{2}(\cos 1.5243 + 3) = 1.5232, \\x_2 &= \frac{1}{2}(\cos 1.5354 + 3) = 1.5177, & x_7 &= \frac{1}{2}(\cos 1.5232 + 3) = 1.5238. \\x_3 &= \frac{1}{2}(\cos 1.5177 + 3) = 1.5265, \\x_4 &= \frac{1}{2}(\cos 1.5265 + 3) = 1.5221, \\x_5 &= \frac{1}{2}(\cos 1.5221 + 3) = 1.5243,\end{aligned}$$

จงหารากของสมการ $\sin x = 10(x - 1)$

เมื่อทราบว่าผลเฉลยอยู่ในช่วงระหว่าง 1 ถึง π

โดยคำตอบต้องถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 3

จงหาค่าของสมการ $x = e^{-x}$ โดยใช้วิธีการทำซ้ำ
เมื่อทราบว่าผลเฉลยอยู่ในช่วงระหว่าง 0 ถึง 1

Choosing $x_0 = 0.5$, we find

$$x_1 = e^{-0.5} = 0.60653,$$

$$x_3 = 0.57970,$$

$$x_5 = 0.57117,$$

$$x_7 = 0.56844,$$

$$x_9 = 0.56756,$$

$$x_{11} = 0.56728,$$

$$x_{13} = 0.56719,$$

$$x_{15} = 0.56716,$$

$$x_{17} = 0.56715,$$

$$x_{19} = 0.56714.$$

$$x_2 = 0.54524,$$

$$x_4 = 0.56007,$$

$$x_6 = 0.56486,$$

$$x_8 = 0.56641,$$

$$x_{10} = 0.56691,$$

$$x_{12} = 0.56706,$$

$$x_{14} = 0.56712,$$

$$x_{16} = 0.56713,$$

$$x_{18} = 0.56714,$$

วิธีนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson method)

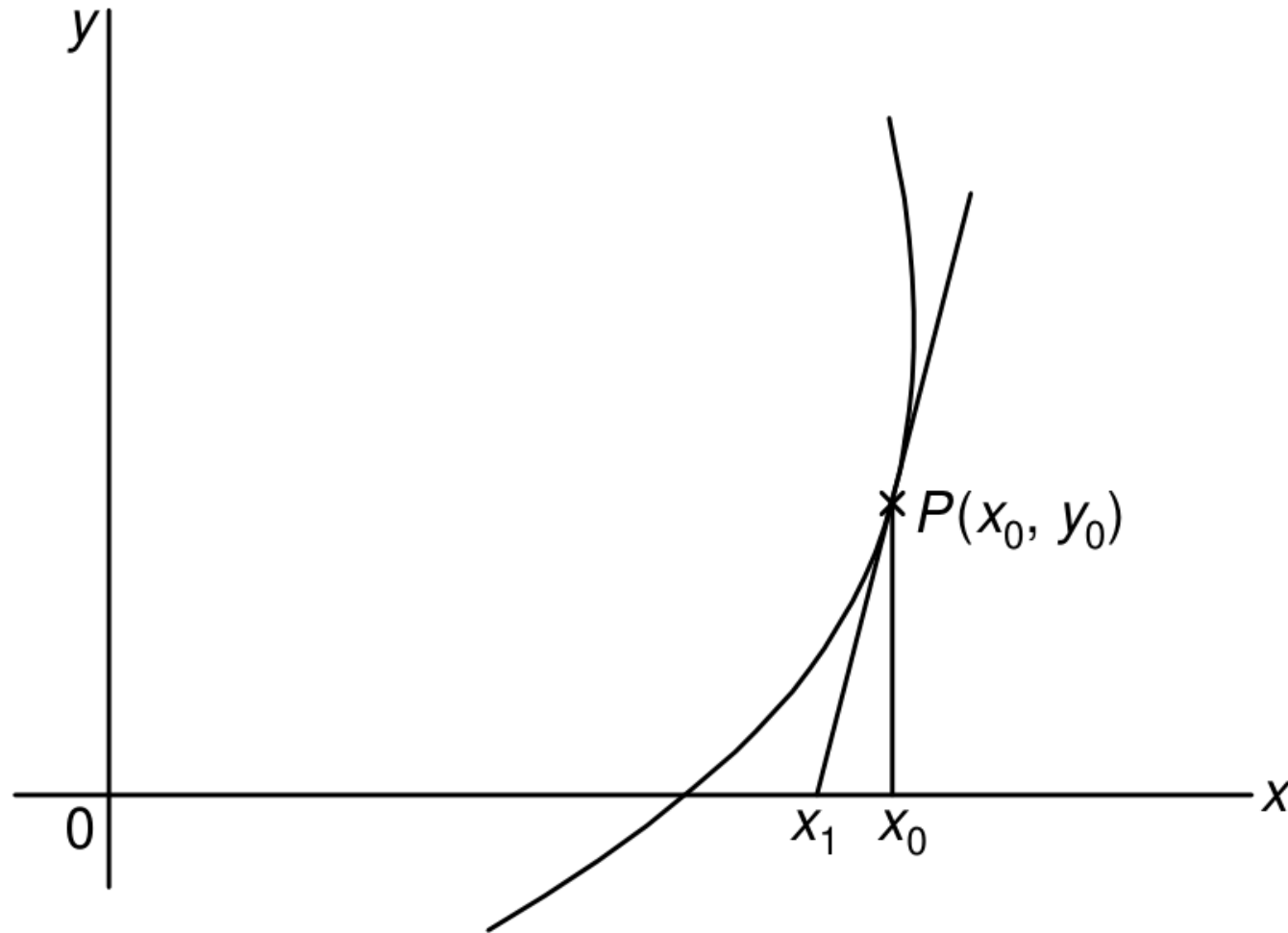
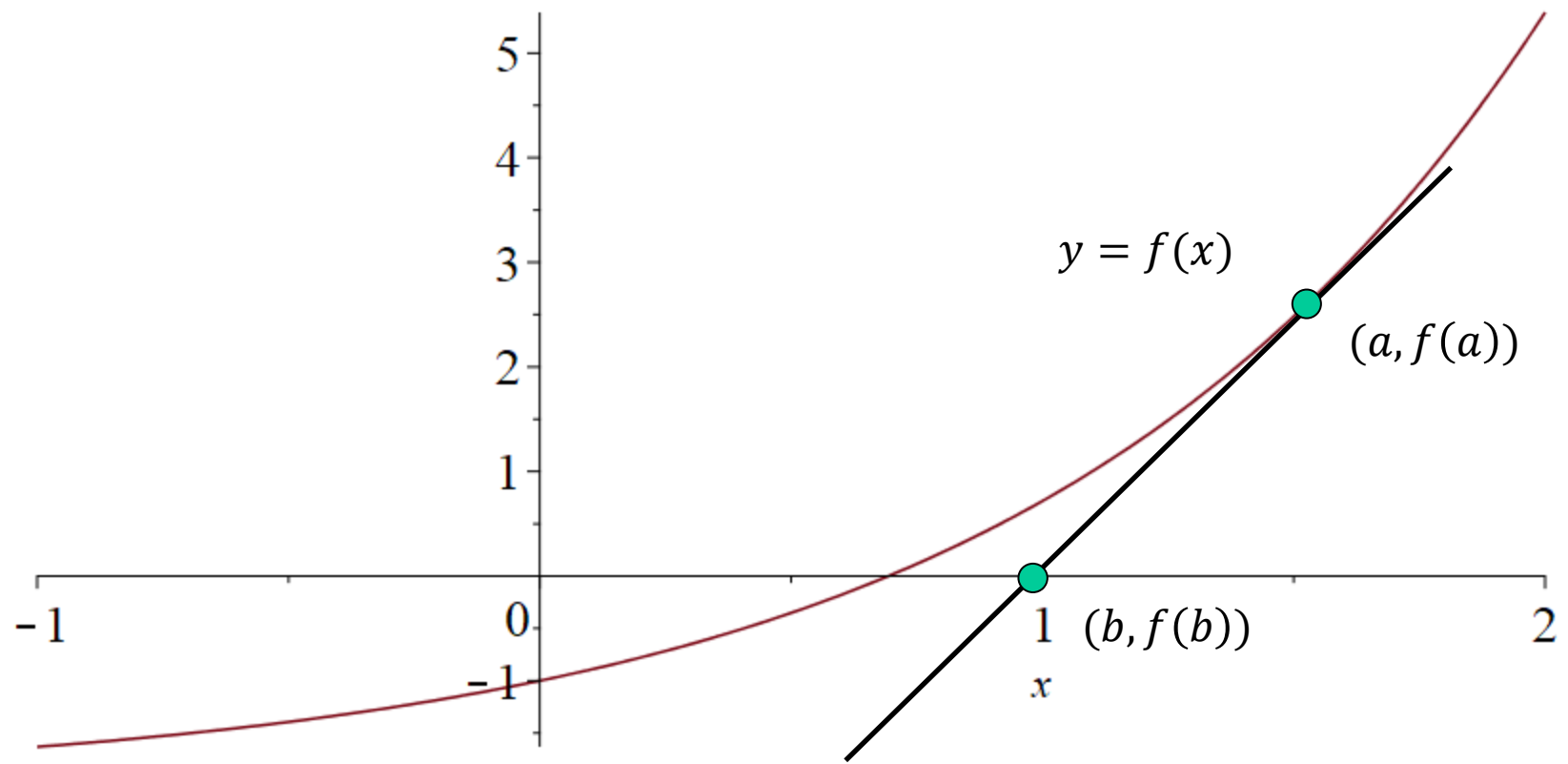


Figure 2.3 Newton–Raphson method.

แนวคิด



$$f'(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Newton–Raphson formula

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

การที่เราจะใช้วิธีนิวตัน-ราฟสันได้ เราต้องทราบก่อนว่า
ฟังก์ชันที่อยู่ในสมการหาอนุพันธ์ได้ (differentiable)

จงหารากของสมการ $x^2 = 2$ โดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน
โดยกำหนดให้ $x_0=1$

จงหารากของสมการ $x^3 - x - 1 = 0$ โดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน
โดยกำหนดให้ $x_0 = 1.5$

จงหารากของสมการ $x = e^{-x}$ โดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน
โดยกำหนดให้ $x_0=1$

จงหารากของสมการ $\sin x = \frac{x}{2}$ โดยใช้วิธีนิวตัน-ราฟสัน
โดยกำหนดให้ $x_0 = \frac{\pi}{2}$