

# อนุกรมกำลัง (power series)

อนุกรมกำลังเป็นรูปแบบหนึ่งของอนุกรม โดยมีลักษณะคล้ายคลึงกับพหุนาม เพียงแต่ว่ามีลักษณะเป็นพหุนามที่มีพจน์เป็นจำนวนอนันต์ อนุกรมกำลังมีบทบาทมากในการประมาณค่าของฟังก์ชัน และการเรียนในเนื้อหาคณิตศาสตร์ชั้นสูง เช่น วิชาการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ วิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลข เป็นต้น

# พหุนาม (polynomial)

เราเรียกฟังก์ชัน  $p_n(x)$  ว่าพหุนามระดับชั้น  $n$  (degree  $n$ ) ถ้า

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0$$

เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนนับหรือ 0

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เราเรียก  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  ว่าสัมประสิทธิ์

# อนุกรมกำลัง

เราเรียกรูปแบบอนุกรมอนันต์

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots$$

ว่าอนุกรมกำลังของ  $x$  รอบจุด  $x_0$  (power series of  $x$  around point  $x_0$ )

เมื่อ  $a_0, a_1, a_2, \dots$  เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ กำหนดให้  $(x - x_0)^0 = 1$

โดย เรียก  $a_0, a_1, a_2, \dots$  ว่า สัมประสิทธิ์ของอนุกรม

เรียก  $x_0$  ว่า จุดศูนย์กลาง

เรียก  $x$  ว่า ตัวแปร

สำหรับกรณี  $x_0 = 0$

เราเรียกรูปแบบอนุกรมอนันต์

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

ว่าอนุกรมกำลังของ  $x$

ตัวอย่างอนุกรมกำลังที่น่าสนใจ

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^7}{7!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

พิจารณาอนุกรม  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

ด้วยวิธีการทดสอบด้วยอัตราส่วนพบว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \text{---} \right| = < 1$$

ดังนั้นอนุกรม  $1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  ลู่เข้าเมื่อ

# สมบัติของอนุกรมกำลัง

ถ้า  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  และ  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$  เป็นอนุกรมกำลังที่ลู่เข้าเมื่อ

$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  สำหรับบางจำนวน  $\varepsilon > 0$  แล้ว

$$1. \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n$$

$$2. \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n)(x-x_0)^n$$

$$3. \quad c \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} ca_n(x-x_0)^n \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \\
 &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad \int \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x - x_0)^{n+1}}{n+1} + C \\
 &= C + a_0(x - x_0) + a_1 \frac{(x - x_0)^2}{2} + a_2 \frac{(x - x_0)^3}{3} + a_3 \frac{(x - x_0)^4}{4} + \dots
 \end{aligned}$$

เมื่อ  $C$  เป็นค่าคงตัวใด ๆ

# แนวคิดในการประมาณฟังก์ชันด้วยพหุนาม

เราอาจตั้งสมมติฐานว่า เราสามารถแทนฟังก์ชัน  $f(x)$  ได้ด้วยพหุนาม  $p_n(x)$  ถ้าทั้งฟังก์ชันและพหุนามมีค่าเท่ากันแล้วอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ณ  $x=0$  ต้องมีค่าเท่ากันด้วย พบว่า

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3}$$

$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)a_nx^{n-4}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 3 \cdot 2a_n$$

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 2a_2$$

$$f'''(0) = 3 \cdot 2a_3$$

$$f^{(4)}(0) = 4 \cdot 3 \cdot 2a_4$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 3 \cdot 2a_n$$

$$a_0 = f(0)$$

$$a_1 = f'(0)$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3}$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$a_0 =$$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$$a_4 =$$

$$a_5 =$$

$\vdots$

$$a_n =$$

ดังนั้นเราสามารถประมาณฟังก์ชัน  $f(x)$  ด้วยพหุนาม

$$p_n(x) =$$

เราเรียกพหุนาม

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ว่าพหุนามแมคลอรินระดับชั้น  $n$  ของฟังก์ชัน  $f$

(Maclaurin polynomial degree  $n$  of  $f$ )

และเรียกอนุกรม

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

ว่าอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน  $f$  (Maclaurin series of  $f$ )

ถ้า  $x$  อยู่ในช่วงที่ทำให้อนุกรมดังกล่าวลู่เข้า

สำหรับเมื่อพิจารณาในกรณีทั่วไปที่ไม่ใช่  $x=0$  เช่นเมื่อพิจารณา  
สำหรับกรณี  $x=x_0$

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + a_4(x - x_0)^4 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3a_4(x - x_0)^2 + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x - x_0) + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x - x_0)^{n-3}$$

$$f^{(4)}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)a_n(x - x_0)^{n-4}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 3 \cdot 2a_n$$

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x_0) = 2a_2$$

$$f'''(x_0) = 3 \cdot 2a_3$$

$$f^{(4)}(x_0) = 4 \cdot 3 \cdot 2a_4$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots 3 \cdot 2a_n$$

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f'(x_0)$$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3}$$

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n}$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$a_0 =$$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$$a_4 =$$

$$a_5 =$$

$\vdots$

$$a_n =$$

ดังนั้นเราสามารถประมาณฟังก์ชัน  $f(x)$  ด้วยพหุนาม

$$p_n(x) =$$

เราเรียกพหุนาม

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ว่าพหุนามเทย์เลอร์ระดับชั้น  $n$  ของฟังก์ชัน  $f$  ที่จุด  $x_0$

(Taylor polynomial degree  $n$  of  $f$  at  $x_0$ )

และเรียกอนุกรม

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

ว่าอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน  $f$  ที่จุด  $x_0$  (Taylor series of  $f$  at  $x_0$ )

ถ้า  $x$  อยู่ในช่วงที่ทำให้อนุกรมดังกล่าวลู่เข้า

ตัวอย่าง จงหาพหุนามแมคลอรินระดับชั้น  $n$  และอนุกรมแมคลอรินของ  
ฟังก์ชัน  $f(x) = e^x$

ตัวอย่าง จงหาพหุนามเทย์เลอร์ระดับชั้น  $n$  และอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด 1 ของ  
ฟังก์ชัน  $f(x) = e^x$

ตัวอย่าง จงหาพหุนามแมคลอรินระดับชั้น  $n$  และอนุกรมแมคลอรินของ  
ฟังก์ชัน  $f(x) = \cos x$

ตัวอย่าง จงหาพหุนามเทย์เลอร์ระดับชั้น  $n$  และอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด  $\frac{\pi}{2}$  ของ  
ฟังก์ชัน  $f(x) = \cos x$

ตัวอย่าง จงหาพหุนามแมคลอรินระดับชั้น  $n$  และอนุกรมแมคลอรินของ  
ฟังก์ชัน  $f(x) = \sin x$

ตัวอย่าง จงหาพหุนามเทย์เลอร์ระดับชั้น  $n$  และอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด  $\frac{\pi}{2}$  ของ  
ฟังก์ชัน  $f(x) = \sin x$

ตัวอย่าง จงหาพหุนามเทย์เลอร์ระดับชั้น  $n$  และอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด 1 ของ  
ฟังก์ชัน  $f(x) = \ln x$

## ค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณด้วยพหุนามเทย์เลอร์

ในการประมาณค่าของฟังก์ชันด้วยพหุนามเทย์เลอร์ จะมีค่าความคลาดเคลื่อน ซึ่งทำให้ผลการคำนวณค่าพหุนามแตกต่างจากค่าของฟังก์ชันจริง ซึ่ง Joseph Louise Lagrange ได้แสดงทฤษฎีการหาค่าความคลาดเคลื่อนอย่างชัดเจนต่อจาก Brook Taylor ผู้เสนอแนวคิดเรื่องอนุกรมเทย์เลอร์ไว้ในทฤษฎีเศษเหลือของอนุกรมเทย์เลอร์ว่า

## ทฤษฎีเศษเหลือของอนุกรมเทย์เลอร์

ถ้า  $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$  โดยที่  $P_n(x)$  คือ พหุนามเทย์เลอร์ของ  $f$  ระดับชั้น  $n$  ที่จุด  $x_0$  และ  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$  แล้ว

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

$$\text{สำหรับทุก ๆ } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (n+1) \frac{f^{(n)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)} \right|$$

เรียก  $\varepsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (n+1) \frac{f^{(n)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)} \right|$  ว่ารัศมีการลู่อเข้าของอนุกรมเทย์เลอร์

นั่นคือทุก  $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$  อนุกรม

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

จะลู่เข้า

$$\text{และ } R_n(x) \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \quad \text{สำหรับ } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

$$\text{และ } M = \max_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} |f^{(n+1)}(x)| \quad \text{เสมอ}$$

| $x$ | $e^x$        | $p_1(x)$     | $p_3(x)$     | $p_5(x)$     |
|-----|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0   | 1.0000000000 | 1.0000000000 | 1.0000000000 | 1.0000000000 |
| 0.1 | 1.1051709181 | 1.1000000000 | 1.1051666667 | 1.1051709167 |
| 0.2 | 1.2214027582 | 1.2000000000 | 1.2213333333 | 1.2214026667 |
| 1   | 2.718281828  | 2.0000000000 | 2.6666666667 | 2.7166666667 |

## แบบฝึกหัด

จงหาพหุนามเทย์เลอร์ระดับชั้น  $n$  และอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด  $x_0$  ของฟังก์ชันที่กำหนด

$$f(x) = e^{-x}, x_0 = 0$$

$$f(x) = \tan^{-1} x, x_0 = 0$$

$$f(x) = e^{-x}, x_0 = 1$$

$$f(x) = \tan^{-1} x, x_0 = 1$$

$$f(x) = e^{2x}, x_0 = 0$$

$$f(x) = \cos x, x_0 = \pi$$

$$f(x) = e^{2x}, x_0 = 1$$

$$f(x) = \ln(1-x), x_0 = 0$$

$$f(x) = e^{2x}, x_0 = 2$$

$$f(x) = \ln(1-2x), x_0 = 0$$

$$f(x) = e^{x^2}, x_0 = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x_0 = 9$$