การแปลงลาปลาซ

การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) เป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถใช้หาผลเฉลยของ*ปัญหาค่าตั้งต้น*ของสมการเชิงอนุพันธ์

“เราจะใช้การแปลงลาปลาซ แปลงจากปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ เข้าสู่สมการพหุนาม และหลังจากจัดรูปสมการพนุนามโดยใช้วิธีทางพีชคณิต ก็จะใช้การแปลงลาปลาซผกผัน แปลงสมการพนุนามกลับ เพื่อหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์”

บทนิยาม สัญลักษณ์ และ การแปลงลาปลาซ

บทนิยาม 4.1. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับทุกๆ $x \geq 0$ ถ้า $\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$ หาค่าได้ เราเรียกฟังก์ชัน

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

(ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร s) ว่า *การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f และจะใช้สัญลักษณ์ $\mathscr{L}\{f\}$ แทน*การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f หรือก็คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{f\} = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

จะใช้สัญลักษณ์ $\mathscr{L}\{f\}$ แทน*การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f หรือก็คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{f\} = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

เราเรียกฟังก์ชัน $f(x)$ ว่า*การแปลงลาปลาซผกผัน* (inverse Laplace transform) ของฟังก์ชัน $F(s)$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = 1$ เนื่องจาก

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-sx} dx = -\frac{e^{-sx}}{s}\Big|_0^\infty = \begin{cases} \dfrac{1}{s} & \text{ถ้า } s > 0 \\ \infty & \text{ถ้า } s \leq 0 \end{cases}$$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน 1 คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad \text{เมื่อ } s > 0$$

$f(x)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}$
1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
x	$\dfrac{1}{s^2}, \quad s > 0$
$x^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{ax}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin ax$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos ax$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

ตารางที่ 4.1: ตารางการแปลงลาปลาซอย่างย่อ

ทฤษฎีบท 4.2 (ความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ). *ถ้าเราสามารถหาการแปลงลาปลาซของ f, f_1 และ f_2 สำหรับบางช่วง $s > \alpha$, เมื่อ α เป็นจำนวนจริง แล้ว*

- $\mathscr{L}\{f_1 + f_2\} = \mathscr{L}\{f_1\} + \mathscr{L}\{f_2\}$

- $\mathscr{L}\{cf\} = c\mathscr{L}\{f\}$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ และ $s > \alpha$

$$\mathscr{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1\mathscr{L}\{f_1\} + c_2\mathscr{L}\{f_2\},$$

จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x) = \cosh ax$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $\sinh ax$

จงหา $\mathscr{L}\{1 + 2x + 3e^{4x} - 5\sin 6x\}$

ทฤษฎีบท 4.3 (การเลื่อนขนานในแนวแกน s ของการแปลงลาปลาซ). *สำหรับการแปลงลาปลาซของ $f(x)$ ใดๆ*

$$\mathscr{L}\{f\} = F(s), \qquad s > \alpha$$

เราได้ว่า

$$\mathscr{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a), \qquad s > \alpha + a$$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $e^{ax} \sin bx$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $e^{ax}\sinh bx$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $\sinh x \cosh x$

ทฤษฎีบท 4.4 (การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง). *ถ้า* $f(x)$ *ต่อเนื่องบนช่วง* $[0,\infty)$

และ $f'(x)$

ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บน $[0,\infty)$ *โดยที่* $f(x)$ *เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง* α *แล้ว*

$$\mathscr{L}\{f'\} = s\mathscr{L}\{f\} - f(0), \qquad \text{เมื่อ} \;\; s > \alpha$$

$$\mathscr{L}\{f''\} \;\; =$$

ทฤษฎีบท 4.5 (การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับอื่นๆ).

ถ้า $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ *ต่อเนื่องบนช่วง* $[0, \infty)$ *และ* $f^{(n)}(x)$ *ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บน* $[0, \infty)$ *โดยที่ฟังก์ชันที่กล่าวมาทั้งหมดเป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง* α *แล้ว*

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\} = s^n \mathscr{L}\{f\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

เมื่อ $s > \alpha$

$\sinh ax$	$\dfrac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	128
$\cosh ax$	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	125
$\mathscr{L}\{e^{ax} f(x)\}$	$F(s-a), \quad s > \alpha + a$	125
$\mathscr{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\}$	$c_1 \mathscr{L}\{f_1\} + c_2 \mathscr{L}\{f_2\}$	124
$\mathscr{L}\{f'\}$	$s\mathscr{L}\{f\} - f(0), \quad s > \alpha$	126
$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}$	$s^n \mathscr{L}\{f\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad s > \alpha$	127

$f(x)$	$F(s)=\mathscr{L}\{f\}$
1	$\frac{1}{s}$,
x	$\frac{1}{s^2}$,
$x^n,\ n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$,
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$,
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$,
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$,

$f(x)$	$F(s)=\mathscr{L}\{f\}$
$\sinh ax$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s>\lvert a\rvert$
$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s>\lvert a\rvert$
$\mathscr{L}\{e^{ax}f(x)\}$	$F(s-a), \quad s>\alpha+a$
$\mathscr{L}\{c_1f_1+c_2f_2\}$	$c_1\mathscr{L}\{f_1\}+c_2\mathscr{L}\{f_2\}$
$\mathscr{L}\{f'\}$	$s\mathscr{L}\{f\}-f(0), \quad s>\alpha$
$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}$	$s^n\mathscr{L}\{f\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-$ $\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0), \quad s>\alpha$

$$x^2e^{3x}$$

$$e^{-x}\cos 3x + e^{6x} - x$$

$$e^{-x}\cos x$$

$$2x^2e^{-x} - x^2 + \cos 4x$$

$$x^{-1}e^{\pi x}$$

$$x^{-1}e^{\pi x}$$

$$(1+e^{-x})^2$$

$$x^2 + e^x \sin 2x$$

$$\cos^2 x$$

$$(x-5)^4$$

จงหาค่า $F(s)$ **เมื่อ** $F(s)$ **เป็นการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) ของ**

$$f(x) = 3e^{3x} - 4e^{4x}$$

(1) $F(s) = \dfrac{s}{s^2 - 7s + 12}$

(2) $F(s) = \dfrac{-s}{s^2 - 7s + 12}$

(3) $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + 7s + 12}$

(4) $F(s) = \dfrac{-s}{s^2 + 7s + 12}$

(5) $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + 12}$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $x^4 e^{4x+4}$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $e^{-2x+2}\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)$

จงหาค่า $F(s)$ เมื่อ $F(s)$ เป็นการแปลงลาปลาซ ของ

$$f(x) = 6e^{5x} - 3\sin 4x$$

(1) $F(s) = \dfrac{2(s^2 - 2s + 26)}{s^3 - 5s^2 + 16s - 80}$ (2) $F(s) = \dfrac{3(s^2 - 2s + 26)}{s^3 - 5s^2 + 16s - 80}$

(3) $F(s) = \dfrac{4(s^2 - 2s + 26)}{s^3 - 5s^2 + 16s - 80}$ (4) $F(s) = \dfrac{5(s^2 - 2s + 26)}{s^3 - 5s^2 + 16s - 80}$

(5) $F(s) = \dfrac{6(s^2 - 2s + 26)}{s^3 - 5s^2 + 16s - 80}$

$$\frac{2s+2}{s^2+2s+1}$$

$$\frac{3}{(s+5)^8}$$

$$\frac{s-1}{s^2-2s+5}$$

$$\frac{3}{2s^2+8s+10}$$

$$\frac{3s+2}{s^2+2s+10}$$

จงหา $\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$ เมื่อ

$$F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8}$$

$$F(s) = \frac{2s + 16}{s^2 + 4s + 13}$$

$$F(s) = \frac{s - 1}{2s^2 + s + 6}$$

จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+7}{s^2+2s-3}\right\}$

$$\frac{s-e}{(s-\sqrt{2})(s-\pi)}$$

จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$ เมื่อ

$$F(s) = \frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$$

จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$ เมื่อ $F(s) = \dfrac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}$

จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ เมื่อ $F(s) = \dfrac{3s^2+5s+3}{s^4+s^3}$

จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\}$

จงหา $\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$ เมื่อ $F(s)=\dfrac{1}{s^4-8s^2+16}$

จงหา $\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}$ เมื่อ $\quad s^2F(s)+sF(s)-6F(s)=\dfrac{s^2+4}{s^2+s}$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y' + 2y = 0;\ y(0) = 1$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y' + 2y = e^{x}; \; y(0) = 1$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้โดย

การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซ

$$y'' - y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + y = x, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -2$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + 4y' + 13y = xe^{-x}, \qquad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y''+9y=\cos(2x), \qquad y(0)=1, y'(0)=\frac{12}{5}$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' - 2y' + y = 6xe^{x}, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 2$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + 2y' - 3y = \sin(2x), \qquad y(0) = y'(0) = 0$$