การแปลงลาปลาซ

การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) เป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถใช้หาผลเฉลยของ*ปัญหาค่าตั้งต้น*ของสมการเชิงอนุพันธ์

"เราจะใช้การแปลงลาปลาซ แปลงจากปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์ เข้าสู่สมการพหุนาม และหลังจากจัดรูปสมการพนุนามโดยใช้วิธีทางพีชคณิต ก็จะใช้การแปลงลาปลาซผกผัน แปลงสมการพนุนามกลับ เพื่อหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์"

บทนิยาม สัญลักษณ์ และ การแปลงลาปลาซ

บทนิยาม 4.1. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับทุกๆ $x \geq 0$ ถ้า $\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$ หาค่าได้ เราเรียกฟังก์ชัน

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

(ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร s) ว่า *การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f และจะใช้สัญลักษณ์ $\mathscr{L}\{f\}$ แทน*การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f หรือก็คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{f\} = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

จะใช้สัญลักษณ์ $\mathscr{L}\{f\}$ แทน*การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f หรือก็คือ

$\mathcal{L}\{f\}$

$$F(s) = \mathscr{L}\{f\} = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx}dx$$

เราเรียกฟังก์ชัน $f(x)$ ว่า*การแปลงลาปลาซผกผัน* (inverse Laplace transform) ของฟังก์ชัน $F(s)$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(-\frac{e^{-sx}}{s} \right) - \left(-\frac{e^{0}}{s} \right)$$

0

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = 1$ เนื่องจาก

$x = \infty$

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-sx} dx = -\frac{e^{-sx}}{s}\Big|_0^\infty = \begin{cases} \frac{1}{s} & \text{ถ้า } s > 0 \\ \infty & \text{ถ้า } s \leq 0 \end{cases}$$

$x = 0$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน 1 คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad \text{เมื่อ } s > 0$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$f(x)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}$
1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
x	$\dfrac{1}{s^2}, \quad s > 0$
$x^n, \ n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{ax}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin ax$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos ax$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

ตารางที่ 4.1: ตารางการแปลงลาปลาซอย่างย่อ

$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$

$\mathcal{L}\{x^2\} = \frac{2}{s^3}$

$\mathcal{L}\{x^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$

$\vdots$

$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

ทฤษฎีบท 4.2 (ความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ). *ถ้าเราสามารถหาการแปลงลาปลาซของ f, f_1 และ f_2 สำหรับบางช่วง $s > \alpha$, เมื่อ α เป็นจำนวนจริง แล้ว*

- $\mathscr{L}\{f_1 + f_2\} = \mathscr{L}\{f_1\} + \mathscr{L}\{f_2\}$
- $\mathscr{L}\{cf\} = c\mathscr{L}\{f\}$

$\int (f+g)\,dx$

$\int f\,dx + \int g\,dx$

$\int \alpha f\,dx = \alpha \int f\,dx$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ และ $s > \alpha$

$$\boxed{\mathscr{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1\mathscr{L}\{f_1\} + c_2\mathscr{L}\{f_2\},}$$

สมบัติความเป็นเชิงเส้น

จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x) = \cosh ax$

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{\cosh ax\}$$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{ax} + e^{-ax}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{e^{ax}\} + \mathcal{L}\{e^{-ax}\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-(-a)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s+a) + (s-a)}{(s-a)(s+a)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s+\cancel{a}+s-\cancel{a}}{s^2-a^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{\cancel{2}s}{s^2-a^2}\right]$$

$$\mathcal{L}\{\cosh ax\} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos ax\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $\sinh ax$

$$\mathcal{L}\{\sinh ax\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{ax} - e^{-ax}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{e^{ax}\} - \mathcal{L}\{e^{-ax}\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s+a)-(s-a)}{(s-a)(s+a)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(s+a)-(s-a)}{(s-a)(s+a)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\cancel{s}+a-\cancel{s}+a}{s^2-a^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\left[\frac{\cancel{2}a}{s^2-a^2}\right]$$

$$\mathcal{L}\{\sinh ax\} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sin ax\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

จงหา $\mathscr{L}\{1+2x+3e^{4x}-5\sin 6x\}$

$$\mathcal{L}\{1+2x+3e^{4x}-5\sin 6x\} = \mathcal{L}\{1\}+2\mathcal{L}\{x\}+3\mathcal{L}\{e^{4x}\}-5\mathcal{L}\{\sin 6x\}$$

$$= \frac{1}{s}+2\cdot\frac{1}{s^2}+3\cdot\frac{1}{s-4}-5\cdot\frac{6}{s^2+6^2}$$

$$= \frac{1}{s}+\frac{2}{s^2}+\frac{3}{s-4}-\frac{30}{s^2+36}$$

$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{s}{s}\cdot\frac{(s-4)}{s-4}\cdot\frac{(s^2+36)}{s^2+36}+\frac{2}{s^2}\cdot\frac{(s-4)}{s-4}\cdot\frac{s^2+36}{s^2+36}+\frac{3}{s-4}\cdot\frac{s^2}{s^2}\cdot\frac{s^2+36}{s^2+36}$$

$$-\frac{30}{s^2+36}\cdot\frac{s^2}{s^2}\cdot\frac{s-4}{s-4}$$

$$= \frac{1}{S}\cdot\frac{S}{S}\cdot\frac{(S-4)}{S-4}\cdot\frac{(S^2+36)}{S^2+36} + \frac{2}{S^2}\cdot\frac{(S-4)}{S-4}\cdot\frac{S^2+36}{S^2+36} + \frac{3}{S-4}\cdot\frac{S^2}{S^2}\cdot\frac{S^2+36}{S^2+36}$$

$$- \frac{30}{S^2+36}\cdot\frac{S^2}{S^2}\cdot\frac{S-4}{S-4}$$

$$(S-4)(S^2+36)$$

$$S^3 - 4S^2 + 36S - 144$$

$$= \frac{S^4 - 4S^3 + 36S^2 - 144S + 2S^3 - 8S^2 + 72S - 288 + 3S^4 + 108S^2 - 30S^3 + 120S^2}{S^5 - 4S^4 + 36S^3 - 144S^2}$$

$$= \frac{4S^4 - 32S^3 + 256S^2 - 72 - 288}{S^5 - 4S^4 + 36S^3 - 144S^2}$$

ทฤษฎีบท 4.3 (การเลื่อนขนานในแนวแกน s ของการแปลงลาปลาซ). *สำหรับการแปลงลาปลาซของ* $f(x)$ *ใดๆ*

$$\boxed{\mathscr{L}\{f\} = F(s),} \qquad s > \alpha$$

เราได้ว่า

$$\mathscr{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a), \qquad s > \alpha + a$$

$$e^{ax} f(x) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}$$

$$e^{ax} \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\}$$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $e^{ax} \sin bx$

$$\mathcal{L}\{\sin bx\} = \frac{b}{s^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{ax} \cdot \sin bx\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

$$= \frac{b}{s^2-2as+a^2+b^2}$$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $e^{ax}\sinh bx$

$$\mathcal{L}\{\sinh bx\} = \frac{b}{s^2 - b^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{ax}\sinh bx\} = \frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$$

$$= \frac{b}{s^2 - 2as + a^2 - b^2}$$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $\sinh x \cosh x$

$$\mathcal{L}\{\cosh x\} = \frac{s}{s^2 - 1^2} = \frac{s}{s^2-1}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh x \cosh x\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \cdot \cosh x\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{x} \cdot \cosh x - e^{-x} \cdot \cosh x\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{e^{x} \cdot \cosh x\} - \mathcal{L}\{e^{-x} \cdot \cosh x\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s-1}{(s-1)^2-1} - \frac{s+1}{(s+1)^2-1}\right]$$

ทฤษฎีบท 4.4 (การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง). *ถ้า* $f(x)$ *ต่อเนื่องบนช่วง* $[0,\infty)$ *และ* $f'(x)$ *ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บน* $[0,\infty)$ *โดยที่* $f(x)$ *เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง* α *แล้ว*

$\mathcal{L}\{f'\} = \int_0^\infty f'(x)e^{-sx}\,dx$ (integration by parts)

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0), \qquad \text{เมื่อ } s > \alpha$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f''\} &= \mathcal{L}\{(f')'\} \\
&= s\mathcal{L}\{f'\} - f'(0) \\
&= s(s\mathcal{L}\{f\} - f(0)) - f'(0) \\
&= s^2\mathcal{L}\{f\} - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{f'''\} = \mathcal{L}\{(f'')'\}$$

$$= s\,\underline{\mathcal{L}\{f''\}} - f''(0)$$

$$= s\left(s^2\mathcal{L}\{f\} - s f(0) - f'(0)\right) - f''(0)$$

$$= s^3\mathcal{L}\{f\} - s^2 f(0) - s f'(0) - f''(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(4)}\} =$$

$$= s^4\mathcal{L}\{f\} - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - s f''(0) - f'''(0)$$

ทฤษฎีบท 4.5 (การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับอื่นๆ).

ถ้า $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ *ต่อเนื่องบนช่วง* $[0, \infty)$ *และ* $f^{(n)}(x)$ *ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บน* $[0, \infty)$ *โดยที่ฟังก์ชันที่กล่าวมาทั้งหมด*

เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α *แล้ว*

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\} = s^n \mathscr{L}\{f\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

เมื่อ $s > \alpha$

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{x^2\} = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{x^3\} = \frac{3!}{s^4} = \frac{6}{s^4}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\{\sin ax\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos ax\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh ax\} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh ax\} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$\sinh ax$	$\dfrac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	128
$\cosh ax$	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	125
$\mathscr{L}\{e^{ax} f(x)\}$	$F(s-a), \quad s > \alpha + a$	125
$\boxed{\mathscr{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\}}$	$\boxed{c_1 \mathscr{L}\{f_1\} + c_2 \mathscr{L}\{f_2\}}$	124
$\boxed{\mathscr{L}\{f'\}}$	$s\mathscr{L}\{f\} - f(0), \quad s > \alpha$	126
$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}$	$s^n \mathscr{L}\{f\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad s > \alpha$	127

$f(x)$	$F(s)=\mathscr{L}\{f\}$
1	$\frac{1}{s}$,
x	$\frac{1}{s^2}$,
$x^n,\ n=1,2,3,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$,
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$,
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2+a^2}$,
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2+a^2}$,

$f(x)$	$F(s)=\mathscr{L}\{f\}$
$\sinh ax$	$\frac{a}{s^2-a^2},\quad s>\lvert a\rvert$
$\cosh ax$	$\frac{s}{s^2-a^2},\quad s>\lvert a\rvert$
$\mathscr{L}\{e^{ax}f(x)\}$	$F(s-a),\quad s>\alpha+a$
$\mathscr{L}\{c_1f_1+c_2f_2\}$	$c_1\mathscr{L}\{f_1\}+c_2\mathscr{L}\{f_2\}$
$\mathscr{L}\{f'\}$	$s\mathscr{L}\{f\}-f(0),\quad s>\alpha$
$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}$	$s^n\mathscr{L}\{f\}-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0),\quad s>\alpha$

x^2e^{3x}

$e^{-x}\cos 3x + e^{6x} - x$

$e^{-x}\cos x$

$2x^2e^{-x} - x^2 + \cos 4x$

$x^{-1}e^{\pi x}$

$x^{-1}e^{\pi x}$

$(1 + e^{-x})^2$

$x^2 + e^x \sin 2x$

$\cos^2 x$

$(x - 5)^4$

$$\mathcal{L}\{x^2 e^{3x}\}$$

$$\mathcal{L}\{x^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}\{x^2 e^{3x}\} = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-x}\cos x\}$$

$$\mathcal{L}\{\cos x\} = \frac{s}{s^2+1^2} = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{e^{-x}\cos x\} = \frac{s-(-1)}{(s-(-1))^2+1} = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$= \frac{s+1}{s^2+2s+1+1} = \frac{s+1}{s^2+2s+2}$$

$$\mathcal{L}\{(1+e^{-x})^2\} = \mathcal{L}\{1^2 + 2e^{-x} + (e^{-x})^2\}$$

$$= \mathcal{L}\{1 + 2e^{-x} + e^{-2x}\}$$

$$= \mathcal{L}\{1\} + 2\mathcal{L}\{e^{-x}\} + \mathcal{L}\{e^{-2x}\}$$

$$= \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{1\cdot(s+1)(s+2) + 2\cdot s(s+2) + 1\cdot s(s+1)}{s(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{s^2+3s+2+2s^2+4s+s^2+s}{s^3+3s^2+2s} = \frac{4s^2+8s+2}{s^3+3s^2+2s}$$

$$\mathcal{L}\{(x-5)^4\}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$x^4 - 4.x^3.5 + 6.x^2.5^2 - 4.x.5^3 + 5^4$$

$$\mathcal{L}\{(x-5)^4\} = \mathcal{L}\{x^4 - 20x^3 + 150x^2 - 500x + 625\}$$

$$= \frac{4!}{s^5} - 20 \cdot \frac{3!}{s^4} + 150 \cdot \frac{2}{s^3} - 500 \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{625}{s}$$

$$= \frac{24}{s^5} - \frac{120}{s^4} + \frac{300}{s^3} - \frac{500}{s^2} + \frac{625}{s}$$

$$\mathcal{L}\{(x-5)^4\} = \frac{24}{s^5} - \frac{120}{s^4} + \frac{300}{s^3} - \frac{500}{s^2} + \frac{625}{s}$$

$$= \frac{24 - 120s + 300s^2 - 500s + 625}{s^5}$$

$$\mathcal{L}\{\cos^2 x\}$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos^2 x\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\cos(2x) + 1}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{\cos(2x)\} + \mathcal{L}\{1\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s}{s^2 + 2^2} + \frac{1}{s}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{s^2 + s^2 + 4}{(s^2 + 4)s}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2s^2 + 4}{s^3 + 4s^2}\right]$$

$$\mathcal{L}\{\underline{\underline{\underline{\cos^2 x}}}\} = \frac{1}{2}\left[\frac{2s^2+4}{s^3+4s^2}\right]$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\left[\frac{s^2+2}{s^3+4s^2}\right]$$

$$= \frac{s^2+2}{s^3+4}$$

$$\mathcal{L}\{x^2 + e^x \sin 2x\}$$

$$= \mathcal{L}\{x^2\} + \mathcal{L}\{e^x \underline{\sin 2x}\}$$

$$= \frac{2}{s^3} + \frac{2}{(s-1)^2 + 2^2} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2 - 2s + 1 + 4}$$

$$= \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2 - 2s + 5}$$

$$\mathcal{L}\{2x^2e^{-x} - x^2 + \cos 4x\}$$

$$= 2\mathcal{L}\{x^2e^{-x}\} - \mathcal{L}\{x^2\} + \mathcal{L}\{\cos 4x\}$$

$$= 2\cdot\frac{2}{(s+1)^3} - \frac{2}{s^3} + \frac{s}{s^2+4^2}$$

$$= \frac{4}{(s+1)^3} - \frac{2}{s^3} + \frac{s}{s^2+16} = \frac{4}{s^3+3s^2+3s+1} - \frac{2}{s^3} + \frac{s}{s^2+16}$$

$$f(x) \longrightarrow F(s)$$

$$F(s) = \int_0^\infty \underline{f(x)e^{-sx}}\,dx$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$$

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\}$$

$$= c_1\,\mathcal{L}\{f_1\} + c_2\,\mathcal{L}\{f_2\}$$

c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{x\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}\{x^2\} = \frac{2}{s^3}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}\{\sin ax\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos ax\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\sinh ax\} = \frac{a}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cosh ax\} = \frac{s}{s^2-a^2}$$

$$\mathcal{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = s\,\mathcal{L}\{f(x)\} - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f''(x)\} = s^2\mathcal{L}\{f(x)\} - s\,f(0) - f'(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\} = s^n\mathcal{L}\{f(x)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0)$$

$$\cdots - s\,f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$