

วิชา 531208

วิธีของสมการเชิงอนุพันธ์ในวิศวกรรมโลหการ

Methods of Differential Equations in Metallurgical Engineering

วิชาบังคับก่อน : 103105 แคลคูลัส 3

ผู้รับผิดชอบวิชา : ผศ.ดร.เจษฎา ตัณฑนุช

โทร 4641

Email : jessada@g.sut.ac.th

Website : <https://math.sut.ac.th/~jessada>

Line ID : 0987654321jes

การวัดผล

- สอบย่อย (10%)
- สอบกลางภาค (40%)

วันพฤหัสบดีที่ 7 พฤษภาคม 2563

เวลา 9.00-11.00 น.

- สอบประจำภาค (50%)

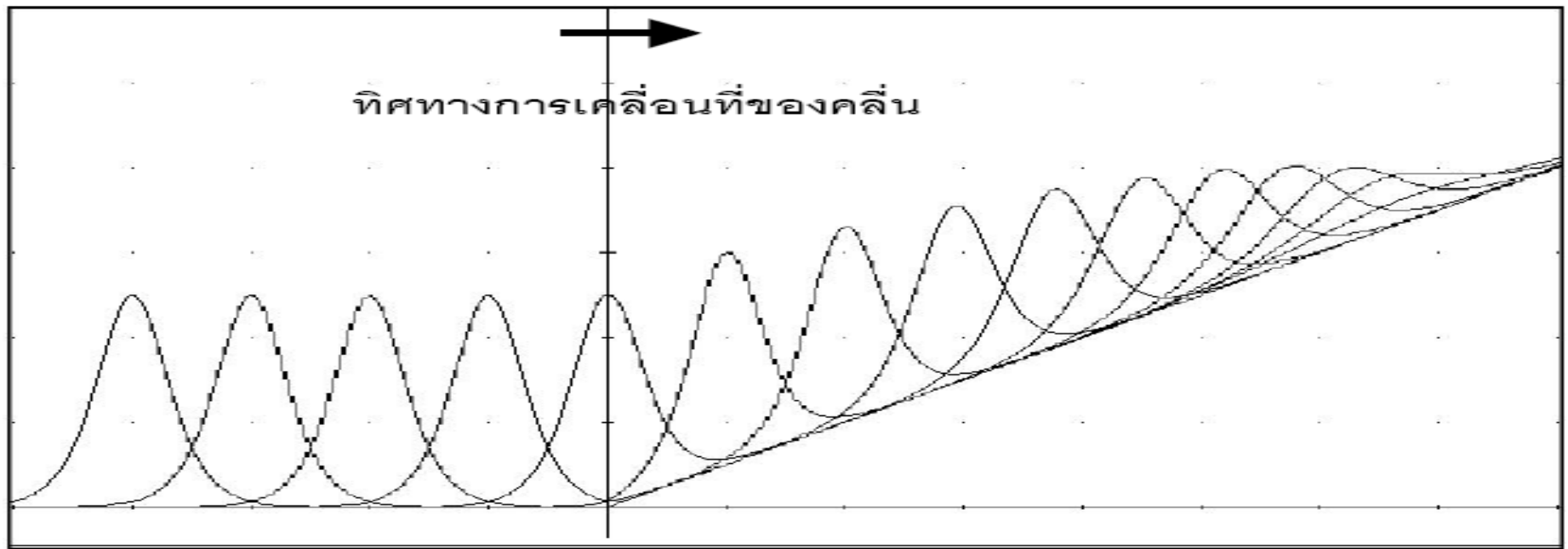
วันอาทิตย์ที่ 14 มิถุนายน 2563

เวลา 13.00-16.00 น.

สมการเชิงอนุพันธ์เป็นส่วนสำคัญของปัญหาทางคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เกษตรศาสตร์ แพทยศาสตร์ และสาขาอื่นๆ อีกมากมาย เนื่องด้วยสมการเชิงอนุพันธ์สามารถนำไปใช้อธิบายปรากฏการณ์ทางธรรมชาติได้เป็นจำนวนมาก



$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{KdV equation}$$



สมการการเคลื่อนที่

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \frac{dx}{dt} \quad (\text{ความเร็ว}) \\ g = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (\text{ความเร่ง}) \end{array} \right.$$

สมการการผสมกันของของเหลว

$$mx''(t) + bx'(t) + qx'(t - r) + kx(t) = 0$$

ระบบสมการระบบนิเวศน์วิทยาระหว่าง

ผู้ล่า-ผู้ถูกล่า

$$x'(t) = a_1 \left(\frac{1-x(t)}{p} \right) x(t) - b_1 y(t) x(t)$$

$$y'(t) = -a_2 y(t) + b_2 x(t-r) y(t-r)$$

สมการ Navier-Stokes equation

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho f - \text{grad} \rho - \text{div} \sigma$$

Boundary differential equation method: simplified dynamic soil stiffnesses for embedded rigid foundations

Toyoaki Nogami*, Harn Shearn Chen

Department of Civil Engineering, National University of Singapore, 10 Kent Ridge, Singapore, Singapore 119260

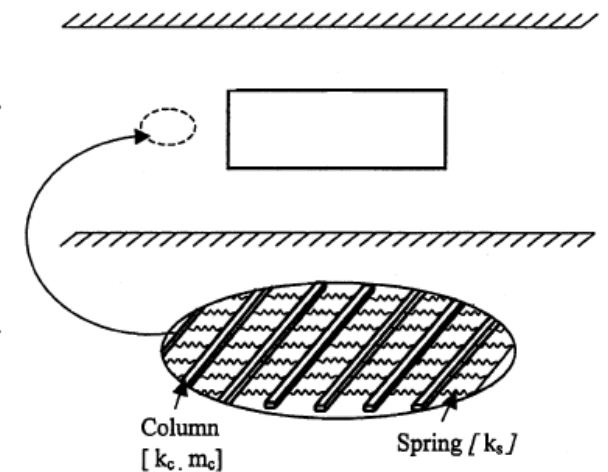
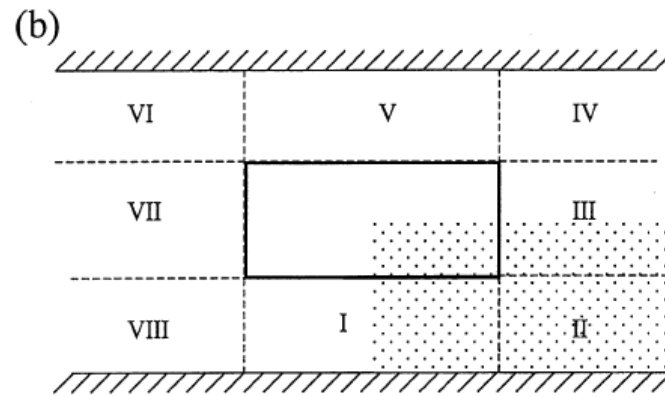
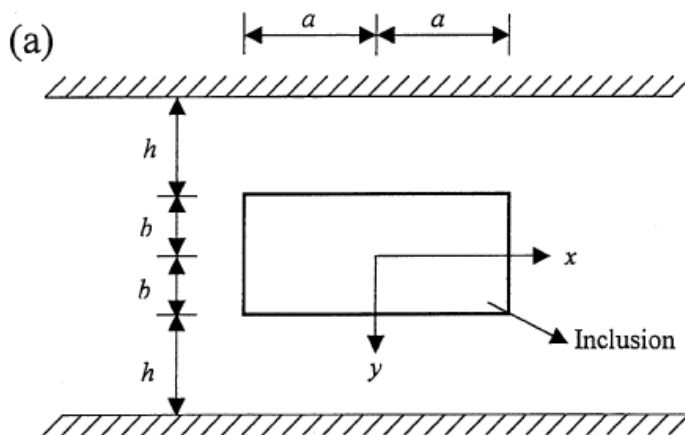


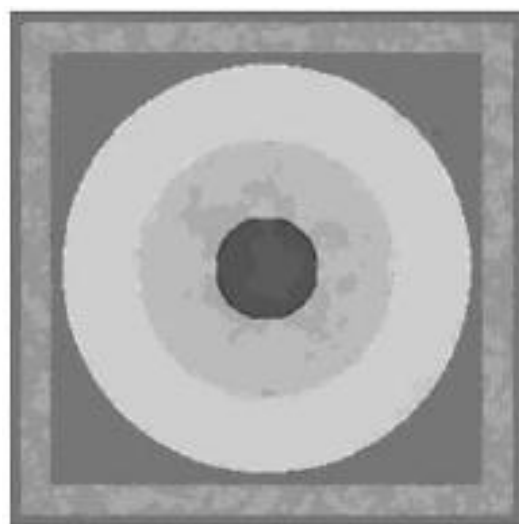
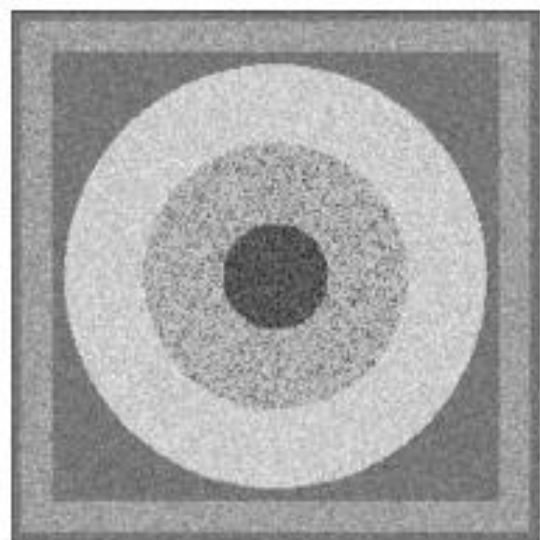
Fig. 3. Spring-column mechanistic model.

$$k_s \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + k_c \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + m_c \omega^2 u(x, y) = 0$$

$$0 = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \frac{1}{\beta u} (f - u), \quad \text{with } \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

The Euler-Lagrange equation for minimizing $E(u)$

$$E(u) := \int_{\Omega} (u - f \log u) + \beta \int_{\Omega} |\nabla u|.$$



การหาปริพันธ์ (Integration)

ถ้าฟังก์ชัน $F(x)$ มีอนุพันธ์คือ $f(x)$ หรือก็คือ

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

เราเรียกฟังก์ชัน $F(x)$ ว่าเป็น ปฏิยานุพันธ์ (antiderivative) ของ $f(x)$

เช่น x^2 เป็นปฏิยานุพันธ์ ของ $2x$

เช่น $\sin x$ เป็นปฏิยานุพันธ์ ของ $\cos x$

เช่น $(\sin x)+10$ เป็นปฏิยานุพันธ์ ของ $\cos x$

ปฏิยานุพันธ์ ของ $f(x)$ อาจจะมีได้หลายตัวเช่น

$x^2, x^2+1, x^2-1, x^2+e, x^2-\frac{\pi}{2}, \dots$ เป็นปฏิยานุพันธ์ ของ $2x$

หมายเหตุ อนุพันธ์ของค่าคงตัวใดๆ มีค่าเท่ากับ 0

เราเรียกเซตของปฏิยานุพันธ์ดังกล่าวว่า

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral) และใช้สัญลักษณ์ว่า

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์

ปริพันธ์

$$\frac{d0}{dx} =$$

$$\frac{d1}{dx} =$$

$$\frac{d\pi}{dx} =$$

$$\frac{de}{dx} =$$

$$\frac{dc}{dx} =$$

$$\int 0 dx =$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์

$$\frac{dx}{dx} =$$

$$\frac{dx^2}{dx} =$$

$$\frac{dx^5}{dx} =$$

$$\frac{dx^{-8}}{dx} =$$

$$\frac{dx^{\sqrt{2}}}{dx} =$$

ปริพันธ์

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์

$$\frac{d(x+2)}{dx} =$$

$$\frac{d(x^2-5)}{dx} =$$

$$\frac{d(x^5 + \frac{\pi}{2})}{dx} =$$

$$\frac{d(x^{-8} + x^{\frac{1}{2}})}{dx} =$$

ปริพันธ์

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์

$$\frac{dx^n}{dx} =$$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} =$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{dx} =$$

ปริพันธ์

$$\int x^n dx =$$

ปริพันธ์

$$\int x^n dx =$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx =$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx =$$

อนุพันธ์

$$\frac{de^x}{dx} =$$

$$\frac{d \sin x}{dx} =$$

$$\frac{d \cos x}{dx} =$$

$$\frac{d \tan x}{dx} =$$

ปริพันธ์

$$\int e^x dx =$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์

$$\frac{d \ln x}{dx} =$$

$$\frac{d \sec x}{dx} =$$

$$\frac{d \csc x}{dx} =$$

$$\frac{d \cot x}{dx} =$$

ปริพันธ์

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = (\sec x)^2$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -(\csc x)^2$$

สรุป

$\frac{dy}{dx}$

y

$\ln x$

$\log_a x$

e^x

a^x

สรุป

y

$\int y dx$

e^x

a^x

คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

$$\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$\int [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)] dx = k_1 \int f(x) dx \pm k_2 \int g(x) dx$$

เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

การหาปริพันธ์โดยวิธีแทนที่

Integration by Substitution

การหาปริพันธ์โดยวิธีแทนที่เป็นเสมือน บทกลับ ของ
การหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่

พิจารณา $\int f(g(x))g'(x)dx$

ถ้าให้ $u = g(x)$ พบว่า $\frac{du}{dx} = \frac{dg}{dx}(x) = g'(x)$

ดังนั้น differential ของ u คือ

$$du = g'(x)dx$$

แสดงว่า

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

$$= F(u) + c$$

แทนค่า u กลับ $= F(g(x)) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$\int e^{2x} dx =$$

$$\int \frac{1}{1+x} dx$$

$$\int \frac{1}{1+2x} dx$$

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

$$\int x e^{x^2} dx =$$

อนุพันธ์ของผลคูณ

$$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$\int \frac{d(u \cdot v)}{dx} dx = \int \left(u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \right) dx$$

การหาปริพันธ์ทีละส่วน

Integration by Parts

$$\int u dv = uv - \int v du$$

การหาปริพันธ์ทีละส่วนเป็นเสมือน บทกลับ

ของการหาอนุพันธ์ของผลคูณ

$$\int x e^x dx$$

การหาปริพันธ์โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย

Integration by Partial Fractions

การหาปริพันธ์โดยวิธีแยกเศษส่วนย่อย โดย
ส่วนใหญ่จะใช้สำหรับการหาปริพันธ์ของ
ฟังก์ชันตรรกยะ

ฟังก์ชันตรรกยะ

ฟังก์ชันตรรกยะคือฟังก์ชันที่สามารถถูกเขียนได้ในรูป
ของเศษส่วนของพหุนาม เช่น

$$\frac{1}{x+3}$$

เศษคือพหุนาม 1

ส่วนคือพหุนาม $x+3$

$$\frac{x^2+2}{x^3+3x+1}$$

เศษคือพหุนาม x^2+2

ส่วนคือพหุนาม x^3+3x+1

$$\frac{x^3+1}{(x+1)^3}$$

เศษคือพหุนาม x^3+1

ส่วนคือพหุนาม $(x+1)^3$

ตัวอย่าง เราพบว่า $\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int \frac{6x+7}{(x+2)^2} dx &= \int \left[\frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2} \right] dx \\ &= \int \frac{6}{x+2} dx - \int \frac{5}{(x+2)^2} dx\end{aligned}$$

ตัวอย่าง

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x-3)}$$

ตัวอย่าง

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4} = \frac{5x-10}{(\quad)(\quad)} = \frac{A_1}{(\quad)} + \frac{A_2}{(\quad)}$$

การหาปริพันธ์โดยวิธีแทนที่ด้วยฟังก์ชันตรีโกณ

Integration by Trigonometric Substitution

การหาปริพันธ์โดยวิธีแทนที่ด้วยฟังก์ชันตรีโกณเป็น
การขยายแนวคิดจากการหาปริพันธ์โดยวิธีแทนที่

เอกลักษณ์ตรีโกณ

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin(A + B) =$$

$$\sin(A - B) =$$

$$\cos(A + B) =$$

$$\cos(A - B) =$$

$$\sin(2x) =$$

$$\cos(2x) =$$

$$\cos^2(x) =$$

$$\sin^2(x) =$$

$$\sin A + \sin B =$$

$$\sin A - \sin B =$$

$$\cos A + \cos B =$$

$$\cos A - \cos B =$$

$$\sin A \cos B =$$

$$\cos A \cos B =$$

$$\sin A \sin B =$$

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณ

$$\int \cos x dx =$$

$$\int \sin x dx =$$

$$\int \cos^2 x dx =$$

สรุป

y

$\int y \, dx$

$\sin x$

$\cos x$

$\tan x$

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณ

$$\int \cos^2 x dx =$$

การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณ

$$\int \sin^2 x dx =$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ใช้การแทนค่า $x = \sin z$

เลียนแบบจาก $\cos z = \sqrt{1 - \sin^2 z}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

ใช้การแทนค่า $x = \sec z$

เลียนแบบจาก $\tan z = \sqrt{\sec^2 z - 1}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

ใช้การแทนค่า $x = \tan z$

เลียนแบบจาก $\sec z = \sqrt{\tan^2 z + 1}$