บทนิยาม 4.3 (รอนสเกียน). ถ้าฟังก์ชัน $f_1, \ldots, f_n$ หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ $n-1$ แล้ว เราเรียกฟังก์ชัน

$$W\left[f_1, \ldots, f_n\right](x) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{4.15}$$

ว่า*รอนสเกียน* (Wronskian) ของ $f_1, \ldots, f_n$

การแปรผันของตัวแปรเสริม

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์อันดับที่ n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x)$$

เนื่องด้วย ผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0$$

คือ $\quad y_h=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x),$

$$y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใดๆ และ $\{y_1(x), \ldots, y_n(x)\}$ เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐาน โดยขั้นตอนวิธีของการแปรผันของตัวแปรเสริม จะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะอยู่ในรูป

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x),$$

เมื่อ $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ซึ่งยังไม่ทราบค่า และไม่เป็นค่าคงตัว

พบว่าอนุพันธ์ของ y_p คือ

$$y_p' = (u_1 y_1' + \cdots + u_n y_n') + (u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n)$$

เพื่อหลีกเลี่ยงการเกิดอนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชันไม่ทราบค่า $u_1, \ldots, u_n$

ในการหาอนุพันธ์อันดับที่สองของผลเฉลยเฉพาะ y_p เราจะสมมติให้

$$u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n = 0$$

$$y_p' = (u_1 y_1' + \cdots + u_n y_n')$$

$$y_p'' =$$

และในทำนองเดียวกัน เราสามารถคำนวณหาอนุพันธ์อันดับอื่นๆ ของผลเฉลยเฉพาะ $y_p'', y_p''', \ldots, y_p^{(n-1)}$ โดยให้เงื่อนไข

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + \cdots + u_n'y_n &= 0, \\ u_1'y_1' + \cdots + u_n'y_n' &= 0, \\ &\vdots \\ u_1'y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n'y_n^{(n-2)} &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้นเราได้ผลเฉลยเฉพาะ และอนุพันธ์อันดับต่างๆ ของผลเฉลยเฉพาะ
คือ

$$
\begin{aligned}
y_p &= u_1 y_1 + \cdots + u_n y_n \\
y_p' &= u_1 y_1' + \cdots + u_n y_n' \\
&\vdots \\
y_p^{(n-1)} &= u_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n y_n^{(n-1)} \\
y_p^{(n)} &= \left(u_1 y_1^{(n)} + \cdots + u_n y_n^{(n)} \right) + \left(u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} \right)
\end{aligned}
$$

เนื่องด้วย $y_1, \ldots, y_n$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้อง ดังนั้น

เมื่อแทนค่า $y_p, y_p', \ldots, y_p^{(n)}$ ลงในสมการไม่เอกพันธ์ (4.55) ทำให้ได้

$$a_n(x)\left(u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)}\right) = b(x)$$

ดังนั้นเราได้ระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย n สมการ

$$\begin{aligned}
u_1' y_1 + \cdots + u_n' y_n &= 0, \\
u_1' y_1' + \cdots + u_n' y_n' &= 0, \\
&\vdots \\
u_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\
u_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + u_n' y_n^{(n-1)} &= \frac{b(x)}{a_n(x)}
\end{aligned}$$

ซึ่งอาจจะพิจารณาในรูปเมทริกซ์ได้คือ

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_{n-1}' \\ u_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{bmatrix}$$

เราได้ผลเฉลยของระบบสมการ (4.58) คือ

$$u_k'(x) = \frac{r(x)W_k(x)}{W[y_1,\ldots,y_n](x)}, \qquad k = 1,\ldots,n,$$

เมื่อ $r(x) = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}, W[y_1,\ldots,y_n](x)$ คือ รอนสเกียน[8]ของผลเฉลย $y_1,\ldots,y_n$

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{k-1} & 0 & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_{k-1}' & 0 & y_{k+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-2)} & 0 & y_{k+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-1)} & 1 & y_{k+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

$$u_k(x) = \int \frac{r(x)W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)}dx, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

ซึ่งทำให้ได้ผลเฉพาะ y_p คือ

$$y_p = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{r(x)W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)}dx,$$

เมื่อ $r(x) = \dfrac{b(x)}{a_n(x)}$

หมายเหตุ โดยทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาค่าดีเทอร์มิเนนต์ของเมทริกซ์เรา

สามารถแสดงให้เห็นได้ว่า

$$
\begin{aligned}
W_k(x) &= (-1)^{n-k} W[y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n] \\
&= (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{k-1} & y_{k+1} & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_{k-1}' & y_{k+1}' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)} & \cdots & y_{k-1}^{(n-2)} & y_{k+1}^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยวิธีการแปรผันของตัวแปรเสริม

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้อง

$$y_h = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n,$$

2. สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธ์มีค่าเป็น

$$y_p = u_1(x) y_1 + \cdots + u_n(x) y_n$$

3. หาค่า $W[y_1, \ldots, y_n](x)$ และ $W_1(x), \ldots, W_n(x)$

4. หาค่า $u_k(x)$, เมื่อ

$$u_k(x) = \int \frac{r(x)W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_n](x)} dx, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$\text{เมื่อ } r(x) = \frac{b(x)}{a_n(x)}$$

5. แทนค่า $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ ที่ได้ลงใน y_p

6. ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธ์ คือ

$$y = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n + u_1 y_1 + \cdots + u_n y_n$$

จงใช้วิธีการแปรผันของตัวแปรเสริมหาผลเฉลยของสมการ

$$y''' - 4y' = e^{2x}$$

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x, \qquad x > 0$$

เมื่อ $\{x, x^{-1}, x^2\}$ เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐานของสมการเอกพันธ์ที่เกี่ยวข้อง