สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง

ในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูง (higher-order differential equations) และ การแก้สมการ เนื้อหาโดยหลักจะเป็นการขยายแนวความคิด จากทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง และการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง ซึ่งได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

จากบทนิยาม 1.3 (หน้า 3) เราเรียกสมการเชิงเส้น

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x), \tag{4.1}$$

ที่มีค่า $b(x) \equiv 0$ ($b(x) = 0$ ทุกๆ ค่า x) ว่า*สมการเอกพันธ์*

และถ้า $b(x) \neq 0$ สำหรับบางค่า x เราจะเรียกสมการ (4.1)

ว่า *สมการไม่เอกพันธ์*

เราอาจจะเขียนสมการเชิงเส้น (4.1) ได้ในรูป

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+p_1(x)\frac{dy}{dx}+p_0(x)y = g(x),$$

หรือ $\quad y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y = g(x)$

ทฤษฎีบท 4.1 (ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงเพียงหนึ่งเดียวของผลเฉลย). *ถ้าฟังก์ชัน* $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ *และฟังก์ชัน* $b(x)$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง* I *ที่พิจารณา โดยที่* $a_n(x) \neq 0$ *สำหรับทุกๆ* $x \in I$ *และมี* $x_0 \in I$

สำหรับแต่ละค่าตั้งต้น (ซึ่งเป็นจำนวนจริงใดๆ n *จำนวน,* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}$*) ปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่* n

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=b(x),$$

ซึ่งมีเงื่อนไขค่าตั้งต้น

$$y(x_0)=\gamma_0,\ \ y'(x_0)=\gamma_1,\ldots,\ \ y^{(n-1)}(x_0)=\gamma_{n-1}$$

*จะ**มีผลเฉลย**ที่นิยามบนช่วง I และ**มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว**เท่านั้น*[1]

ตัวอย่าง 4.1. สำหรับปัญหาค่าตั้งต้น

$$(x-1)y''' - 3xy'' + 6x^2y' - \sin^{-1}(x)\ y = \sqrt{x},$$

$$y(x_0) = 1, \quad y'(x_0) = 0, \quad y''(x_0) = 7,$$

เราพบว่า

- $a_3(x) = x - 1,\ a_2(x) = -3x,\ a_1(x) = 6x^2$ นิยามบนช่วง $(-\infty, \infty)$,
- $a_3(x) = x - 1$ มีค่าเท่ากับศูนย์เมื่อ $x = 1$
- $a_0(x) = -\sin^{-1} x$ นิยามบนช่วง $[-1, 1]$
- และ $b(x) = \sqrt{x}$ นิยามบนช่วง $[0, \infty)$

พิจารณาปัญหาค่าตั้งต้น

$$4y''+4y'+y=0, \quad y(0)=0, y'(0)=0$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

พิจารณาปัญหาค่าตั้งต้น

$$y^{(4)} + e^x y''' - xy'' + (x^3 - 2x)y' + \sin(x)\ y = 0,$$

$$y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 0$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

บทแทรก 4.2. *ถ้าฟังก์ชัน* $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง* I *ที่พิจารณา โดยที่* $a_n(x) \neq 0$ *สำหรับทุกๆ* $x \in I$ *และมี* $x_0 \in I$

*ปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ***เอกพันธ์***เชิงเส้นอันดับที่* n

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots y^{(n-1)}(x_0) = 0$$

มีผลเฉลยคือ

$$y(x) = 0, \qquad \text{สำหรับทุกๆ } x \in I$$

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับสมการเอกพันธ์

บทนิยาม 4.1. ให้เป็น $f_1, f_2, \ldots, f_m$ เป็นฟังก์ชันใดๆ ที่นิยามบนโดเมนและโดเมนร่วมเกี่ยวเดียวกัน

เราเรียก

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_m f_m,$$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_m$ เป็นค่าคงตัวใดๆ, ว่า*ผลรวมเชิงเส้น* (linear combination) ของ $f_1, f_2, \ldots, f_m$

บทนิยาม 4.2. เราเรียกฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ทั้ง m ฟังก์ชันนี้ว่า เป็น *อิสระเชิงเส้น* (linearly independent) บนช่วง I ถ้า**ไม่ปรากฏว่ามีค่าคงตัว** $c_1, \ldots, c_m$ (โดยที่ $c_1, \ldots, c_m$ ต้องไม่เป็นศูนย์พร้อมกันทั้งหมด) ซึ่งทำให้

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_m f_m(x) = 0$$

สำหรับทุกๆ $x \in I$

และเรียกฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ที่ไม่มีคุณสมบัตินี้ว่า *ไม่อิสระเชิงเส้น* (linearly dependent)

หมายเหตุ ถ้าฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ไม่อิสระเชิงเส้นซึ่งกันและกัน นั่นทำให้เราสามารถเขียนฟังก์ชันใด ฟังก์ชันหนึ่ง ให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันที่เหลือได้

พิจารณา $f_1=x$, $\mathrm{f}_2=1-x$, $f_3=1+x$

ทฤษฎีบท 4.3. *ถ้า* $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ *เป็นผลเฉลยที่นิยามบนช่วง* I *ของสมการเอกพันธ์เชิงเส้น*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0,$$

เมื่อฟังก์ชัน $a_0(x), \ldots, a_n(x)$ *และฟังก์ชัน* $b(x)$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง* I *ที่พิจารณา โดยที่* $a_n(x) \neq 0$ *สำหรับทุกๆ* $x \in I$, *แล้ว*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_m y_m(x),$$

เมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *เป็นค่าคงตัวใดๆ, ก็ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์เชิงเส้น*

บทนิยาม 4.3 (รอนสเกียน). ถ้าฟังก์ชัน $f_1, \ldots, f_n$ หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ $n-1$ แล้ว เราเรียกฟังก์ชัน

$$W\left[f_1, \ldots, f_n\right](x) := \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \tag{4.15}$$

ว่า*รอนสเกียน* (Wronskian) ของ $f_1, \ldots, f_n$

ทฤษฎีบท 4.4. *ให้* $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ *เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วง* I *โดยที่* $y_1, \ldots, y_n$ *เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเอกพันธ์เชิงเส้น*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \tag{4.19}$$

ถ้ามีจุด x_0 *ซึ่ง* $x_0 \in I$ *และ*

$$W\left[y_1, \ldots, y_n\right](x_0) \neq 0, \tag{4.20}$$

แล้ว ทุกๆ ผลเฉลยของสมการ (4.19) ซึ่งนิยามบนช่วง I สามารถถูกเขียนได้ในรูป

$$y(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x), \tag{4.21}$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใดๆ

เราเรียกเซต $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข (4.20) สำหรับบางจุด $x_0 \in I$ ว่า **เซตของผลเฉลยมูลฐาน** (fundamental solution set) ของสมการ (4.19) บนช่วง I

และเรียกผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลย $y_1, \ldots, y_n$,

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

เมื่อ $c_1, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวใดๆ, ว่า*ผลเฉลยทั่วไป* (general solution) ของสมการ 4.19

ตัวอย่าง 4.3. ถ้า $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^2$ และ $y_3(x) = x^{-1}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

$$x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \qquad x > 0 \tag{4.22}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ (4.22)

ทฤษฎีบท 4.5. *ถ้า* $y_1, \ldots, y_n$ *เป็นผลเฉลย* n *ผลเฉลยที่นิยามบนช่วง* I *ของสมการ*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=0 \tag{4.23}$$

แล้ว ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $\{y_1, \ldots, y_n\}$ *เป็นเซตของผลเฉลยมูลฐานของ (4.23)*

2. $y_1, \ldots, y_n$ *เป็นอิสระเชิงเส้น*

3. *รอนสเกียน* $W[y_1, \ldots, y_n](x) \neq 0$ *ทุกๆ ค่า* $x \in I$

จงหาตรวจสอบว่าฟังก์ชันที่ให้ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

และหารอนสเกียนของผลเฉลยเหล่านั้น

$$y''' + y' = 0, y_1 = 1,\ \ y_2 = \cos x,\ \ y_3 = \sin x$$

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = 0, y_1 = e^{x},\ \ y_2 = e^{-x},\ \ y_3 = e^{-2x}$$

จงหาค่า Wronskian ของฟังก์ชัน x, x^2, e^{-x}, e^{2x}

จงหาค่า Wronskian ของฟังก์ชัน $x, \cos x, e^{-x}, e^{2x}$

การหารพหุนาม

การหารพหุนาม ทำได้โดยการหารยาว ซึ่งในการหารนี้เราจะได้ **ผลหาร (quotient)** และ **เศษเหลือ (remainder)**

จงหาผลหารและเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม $P(x) = x^3 - 1$ ด้วย $x - 1$

พหุนาม = ตัวหาร x ผลหาร + เศษเหลือ

ถ้าเศษเหลือมีค่าเป็น 0

พหุนาม = ตัวหาร x ผลหาร

ตัวประกอบ (factor)

$$x^3 - x^2 + x + 1 = (x-1)(x^2+1) + 2$$

เศษเหลือ (remainder) คือ 2

$$x^3 - x^2 + x - 2 = (x-1)(x^2+1) - 1$$

เศษเหลือ (remainder) คือ -1

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$$

ตัวประกอบ (factor)

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

ตัวประกอบของ $x^3 - 1$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

ตัวประกอบของ $x^3 + 1$

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$$

ตัวประกอบของ x^2+5x+6

$$x^2+2x+1=(x+1)^2=(x+1)(x+1)$$

ตัวประกอบของ x^2+2x+1

ทฤษฎีบท เศษเหลือจากการหารพหุนาม

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

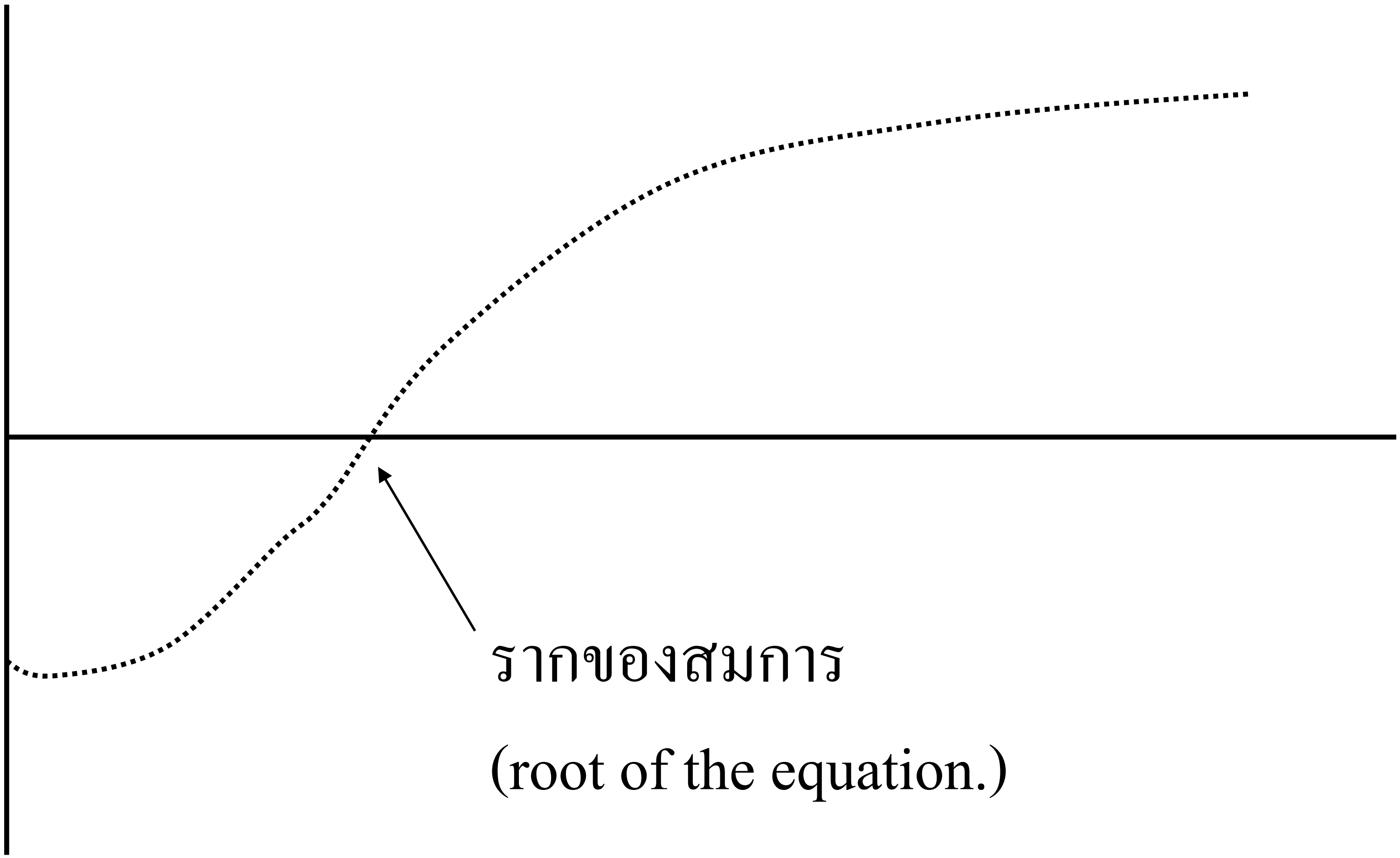
ด้วย $x - a$ คือ $P(a)$

ตัวอย่าง

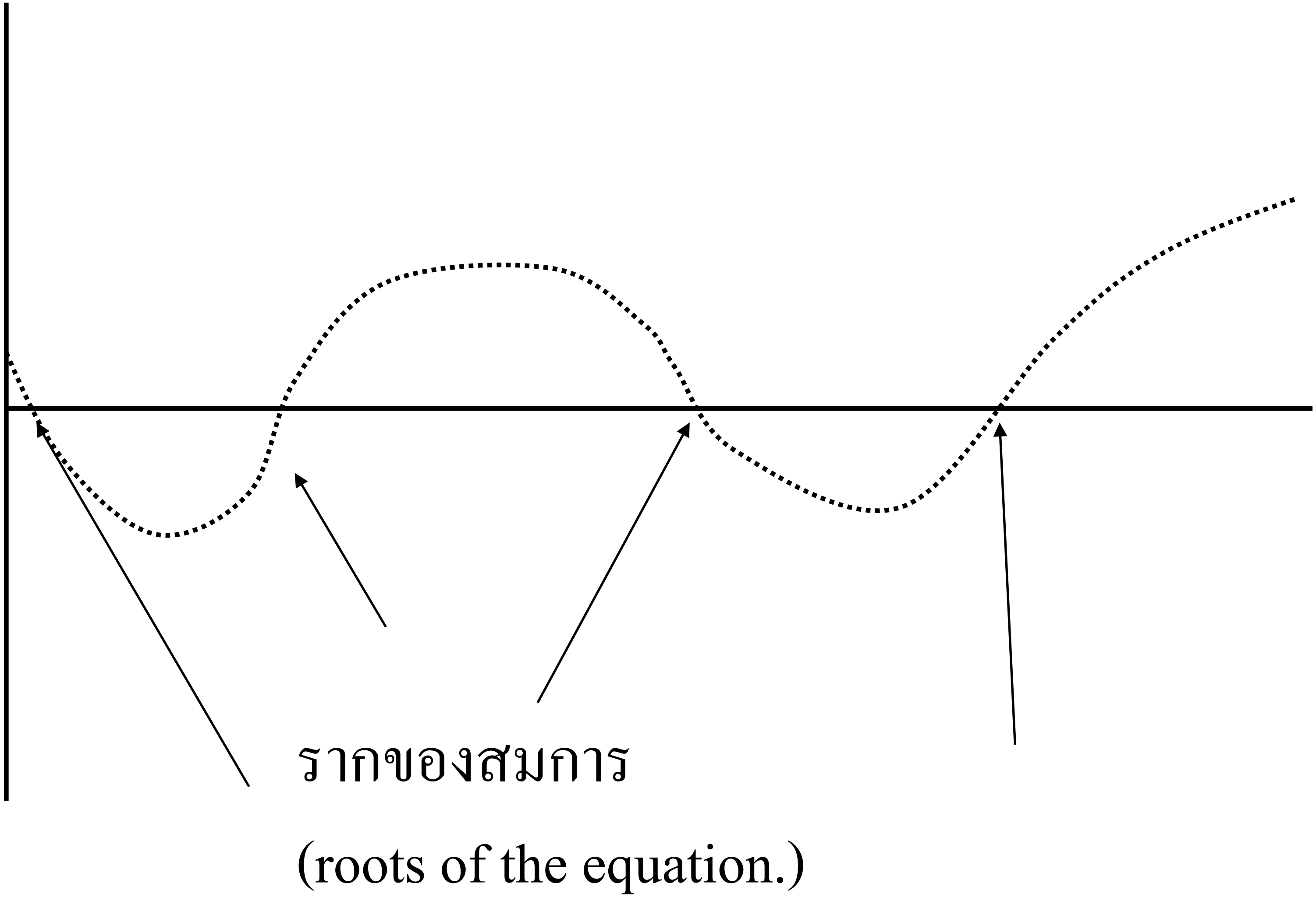
จงหาเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม

$P(x) = x^3 - 1$ ด้วย $x - 1$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$



$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$



รากของสมการพหุนาม

รากของสมการพหุนาม (roots of the equation) คือ ค่า x_0 ที่ทำให้สมการพหุนามมีค่าเท่ากับ 0

$P(x_0) = 0$ หรือ

$$a_n x_0{}^n + a_{n-1} x_0{}^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0$$

ตัวอย่าง

$x^3 - 1 = 0$ มีรากของสมการคือ $x=$

$x^2 + 5x + 6 = 0$ มีรากของสมการคือ

$(x+1)^{10} = 0$ มีรากของสมการคือ

$x^2 + 1 = 0$ มีรากของสมการคือ

ถ้าพหุนาม $a_n {x_0}^n + a_{n-1} {x_0}^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$

สามารถแยกตัวประกอบ (factor) ได้เป็น

$$a_n {x_0}^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = (x - a) R(x)$$

a จะเป็นรากของสมการพหุนาม

$$a_n {x_0}^n + a_{n-1} {x_0}^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0$$

ตัวอย่าง

$$x^3 - 1 = (\qquad\qquad)(\qquad\qquad\qquad\qquad)$$

รากของสมการพหุนาม $x^3 - 1 = 0$ คือ

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$$

รากของสมการพหุนาม $x^2+5x+6=0$ คือ

วิธีการหารากของสมการพหุนามระดับขั้นสอง

Method for finding roots of quadratic equations

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. $b^2 - 4ac > 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

มีสองรากที่แตกต่างกันคือ

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. $b^2 - 4ac = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

มีเพียงรากเดียว คือ

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3. $b^2 - 4ac < 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

หาผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงไม่ได้

จงหารากของสมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$

ถ้าพหุนามสามารถแยกตัวประกอบ (factor)ได้ เราก็จะได้รากของสมการ และในทางกลับกัน ถ้าได้รากของสมการพหุนาม เราก็จะสามารถแยกตัวประกอบได้

$x^2 - 5x + 6 = 0$ มีรากคือ

ดังนั้นพหุนาม $x^2 - 5x + 6$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$x^2 + 5x + 6 = 0$ มีรากคือ

ดังนั้นพหุนาม $x^2 + 5x + 6$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ มีรากคือ 1

ดังนั้นพหุนาม $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$x^3+x^2+x+1=0$ มีรากคือ -1

ดังนั้นพหุนาม $x^3+x^2+x+1=0$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

หารสังเคราะห์ (synthetic division)

หารสังเคราะห์เป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยในการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้เพียงแค่สัมประสิทธิ์หน้า x^n เท่านั้นมาทำการคำนวณ

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = 0$ ด้วย $x - 1$

1	2	-3	-4	5

เศษเหลือ

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ ด้วย $x - 1$

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ ด้วย $x + 1$

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$x^3 - 1 = 0$ ด้วย $x - 1$

การประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบ

พหุนาม $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$\begin{array}{c|cccccc} b & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & 0 \\ \hline \end{array}$$

เศษเหลือต้องเป็น 0

B เป็นค่าที่ได้จาก

ตัวประกอบของ a_0 หารด้วยตัวประกอบของ a_n

จงประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบพหุนาม $x^3 - 2x^2 - x + 2$

จงประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบ

พหุนาม $2x^3 - 5x^2 - x + 6$

จงประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบ

พหุนาม $x^5 - 3x^4 - 9x^3 + 21x^2 - 10x + 24$

สมการเอกพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ในหัวข้อนี้ จะแสดงการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

เมื่อ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัวซึ่งเป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a_n \neq 0$

ในการหาผลเฉลยของสมการ (4.24) เราจะขยายแนวความคิดจากการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์เชิงเส้นอันดับที่สองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (4.25)$$

เราเรียกสมการ (4.25) นี้ว่า*สมการแคแรกเทอริสติก* (characteristic equation) หรือ *สมการช่วย* (auxiliary equation) ของสมการ (4.24) โดยทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต[5] สามารถเขียนสมการ (4.25) ได้ในรูป

$$a_n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

จำนวน n ตัวประกอบ, เมื่อ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน(โดยอาจจะมีบางค่าซ้ำกันก็ได้) ซึ่งเป็นผลเฉลยสมการ (4.25)

กรณีรากของสมการแคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน

ถ้ารากของสมการแคแรกเทอริสติก (4.25) ของสมการ (4.24) เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ สมการ (4.24) มีผลเฉลยจำนวน n ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น คือ

$$e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$$

และมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}, \tag{4.26}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y''' - 5y'' + 6y' = 0,$$

$$y(0) = 6,\ y'(0) = 7,\ y''(0) = 17$$

กรณีรากของสมการแคแรกเทอริสติกเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกัน

ในการหารากของสมการแคแรกเทอริสติก

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

ถ้ารากของสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด จำนวนรากของสมการจะต้องเกิดเป็นจำนวนคู่[6] ซึ่งอยู่ในรูปของคู่สังยุค $r_j \pm is_j$, $j = 1, \ldots, n/2$, เมื่อ r_j และ s_j เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$

สมการ (4.24) มีผลเฉลยจำนวน n ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้น คือ

$$e^{(r_1+is_1)x},\ e^{(r_1-is_1)x},\ \ldots,\ e^{(r_{n/2}+is_{n/2})x},\ e^{(r_{n/2}-is_{n/2})x}$$

เนื่องด้วยเอกลักษณ์ $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ ในการหาผลเฉลย

ของสมการเชิงอนุพันธ์ เราจึงมักพิจารณาผลเฉลย n เฉลย ซึ่งเป็น

ฟังก์ชันของจำนวนจริงที่สมมูลกับผลเฉลยข้างต้น ได้แก่

$$e^{r_1x}\cos(s_1x),\ e^{r_1x}\cos(s_1x),\ldots,e^{r_{n/2}x}\cos(s_{n/2}x),\ e^{r_{n/2}x}\cos(s_{n/2}x)$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของ สมการ (4.24) อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{r_1 x}\left(c_1\cos(s_1x)+c_2\sin(s_1x)\right) \\ &\quad + e^{r_2 x}\left(c_3\cos(s_2x)+c_4\sin(s_2x)\right) \\ &\quad + \cdots + e^{r_{n/2} x}\left(c_{n-1}\cos(s_{n/2}x)+c_n\sin(s_{n/2}x)\right) \end{aligned}$$

เมื่อ $c_1,\ldots,c_n$ เป็นจำนวนจริงใดๆ

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(6)} + 14y^{(4)} + 49y'' + 36y = 0$$

$$\lambda^6 + 14\lambda^4 + 49\lambda^2 + 36 = (\lambda^2 + 9)(\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 1) = 0$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$$

$$y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 2, y'''(0) = 1$$

กรณีสมการแคแรกเทอริสติกมีรากซ้ำ

- ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว มีสมการแคแรกเทอริสติก ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$a_n(\lambda - \lambda_*)^n = 0$$

สมการเชิงอนุพันธ์นั้น จะมีผลเฉลย n ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นคือ

$$e^{\lambda_* x},\ xe^{\lambda_* x}, \ldots, x^{n-1}e^{\lambda_* x}$$

และมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_* x} + c_2 x e^{\lambda_* x} + \cdots + c_n x^{n-1} e^{\lambda_* x},$$

- และถ้าสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

  มีสมการแคแรกเทอริสติกซึ่งมีรากคือ

$$\lambda = r + is \quad \text{และ} \lambda = r - is$$

  จำนวนทั้งหมด n ราก

สมการเชิงอนุพันธ์นั้น จะมีผลเฉลย n ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นคือ

$$e^{rx}\cos sx,\ e^{rx}\sin sx,\ xe^{rx}\cos sx,\ xe^{rx}\sin sx, \ldots, x^{\frac{n}{2}-1}e^{rx}\cos sx,\ x^{\frac{n}{2}-1}e^{rx}\sin sx,$$

และมีผลเฉลยทั่วไปคือ

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{rx}\left(c_1\cos sx + c_2\sin sx\right) + e^{rx}\left(c_3 x\cos sx + c_4 x\sin sx\right) \\ &\quad + \cdots + e^{rx}\left(c_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}\cos sx + c_n x^{\frac{n}{2}-1}\sin sx\right) \\ &= e^{rx}\left(\left[c_1 + c_3 x + \ldots + c_{n-1}x^{\frac{n}{2}-1}\right]\cos sx + \left[c_2 + c_4 x + \ldots + c_n x^{\frac{n}{2}-1}\right]\sin sx\right) \end{aligned}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(8)} + 8y^{(7)} + 28y^{(6)} + 56y^{(5)} + 70y^{(4)} + 56y''' + 28y'' + 8y' + y = 0$$

$(\lambda + 1)^8$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(6)} - 6y^{(5)} + 18y^{(4)} - 32y''' + 36y'' - 24y' + 8y = 0$$

$(\lambda^2 - 2\lambda + 2)^3$

กรณีสมการแคแรกเทอริสติกมีรากประกอบด้วย

เป็นจำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน และรากซ้ำ

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(5)} - y^{(4)} - y' + y = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(8)} - 32y^{(4)} + 256y = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธ์ต่อไปนี้

$$y^{(4)} + y''' = x$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y''' + 4y' = x;$$

$$y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของปัญหาค่าตั้งต้น

$$2y^{(4)} - y''' - 9y'' + 4y' + 4y = 0,$$

$$y(0) = -2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2,\ y'''(0) = 0$$