บทนิยาม 1.1 (สมการเชิงอนุพันธ์). *สมการเชิงอนุพันธ์* (differential equation) คือ สมการซึ่งมีพจน์ของ อนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับตัวแปรอิสระ หนึ่งตัวหรือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับ ตัวแปรอิสระ หลายตัว

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x^2} \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{dy}{dx} = \sin(xy) \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \tag{1.4}$$

$$y''' + xy' + x^2y = x^3 \tag{1.5}$$

สำหรับสมการ (1.1)-(1.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าเทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวแปร เราเรียกสมการดังกล่าวนี้ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ* (ordinary differential equation, ODE)

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = u \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1.7}$$

$$u_t = c^2 u_{ss} \tag{1.8}$$

สมการ (1.6)-(1.8) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าเทียบกับตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวแปร เราเรียกสมการดังกล่าวนี้ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย*

(partial differential equation, PDE)

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x^2} \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{dy}{dx} = \sin(xy) \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \tag{1.4}$$

$$y''' + xy' + x^2y = x^3 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = u \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1.7}$$

$$u_t = c^2 u_{ss} \tag{1.8}$$

บทนิยาม 1.2 (อันดับของสมการ). *อันดับ*(order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึง *อันดับสูงสุด* ของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x^2} \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{dy}{dx} = \sin(xy) \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \tag{1.4}$$

$$y''' + xy' + x^2y = x^3 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = u \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1.7}$$

$$u_t = c^2 u_{ss} \tag{1.8}$$

ผลเฉลย

บทนิยาม 1.4 (ผลเฉลย). พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{d^n x}\right] = 0, \qquad (1.9)$$

- ให้ f เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ซึ่งนิยามสำหรับทุกๆ x ซึ่งอยู่อยู่ในช่วง I และ สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ได้ถึงอันดับที่ n สำหรับทุกๆ $x \in I$ ถ้าฟังก์ชัน f เป็นไปตามเงื่อนไขสองข้อ ต่อไปนี้

1. ฟังก์ชัน

$$F\left[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right]$$

ถูกนิยาม สำหรับทุกๆ $x \in I$, และ

2. เมื่อแทนค่า y ด้วยฟังก์ชัน $f(x)$ และแทนค่าอนุพันธ์ของ y ด้วยอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่มีอันดับสมนัยกันตามลำดับ ลงในสมการ (1.9) แล้วทำให้ F มีค่าเป็นศูนย์ทุกๆ ค่า x ที่อยู่ใน I นั่นคือ

$$F\left[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right] = 0$$

สำหรับทุกๆ $x \in I$

เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่า *ผลเฉลยชัดแจ้ง* (explicit solution)

ตัวอย่าง

$y = f(x) = e^x$ **เป็นผลเฉลยชัดแจ้ง (explicit solution)**

ของสมการ $\dfrac{dy}{dx} - y = 0$

- พิจารณาความสัมพันธ์

$$g(x,y)=0$$

ถ้าเราสามารถจัดรูปหรือทำให้ความสัมพันธ์ดังกล่าวสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ได้ เราจะเรียกความสัมพันธ์นี้ว่า *ผลเฉลยโดยปริยาย* (implicit solution)

- เพื่อความสะดวก เราจะรวมเรียก *ผลเฉลยชัดแจ้ง* และ *ผลเฉลยโดยปริยาย* ว่า *ผลเฉลย* (solution)

ตัวอย่าง

ความสัมพันธ์ $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=0$

เป็นผลเฉลยโดยปริยาย (implicit solution) ของสมการ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}$$

จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$

เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

จงแสดงว่าความสัมพันธ์ $y^2 - x^3 + 8 = 0$

เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

รูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

รูป*อนุพันธ์* (derivative form)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad (2.1)$$

หรือ รูป*ดิฟเฟอเรนเชียล* (differential form)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (2.2)$$

โดยสมการรูปดิฟเฟอเรนเชียล (2.2) จะสมมูลกับสมการรูปอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

สมการเชิงอนุพันธ์อย่างง่าย

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ที่ง่ายต่อการหาผลเฉลยที่สุด จะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2.3}$$

การแก้สมการนี้ จะเป็นแค่การหาค่า*อินทิกรัล* (integral) เท่านั้นเองซึ่งผลเฉลยของสมการรูปแบบนี้ คือ[2]

$$y = \int f(x)dx + c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

---

[2] ดูเรื่องการหาค่าอินทิกรัลได้ในหนังสือแคลคูลัสทั่วไป

ตัวอย่างผลเฉลยของสมการอนุพันธ์อย่างง่าย

- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = 1$ คือ
- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = x$ คือ
- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ คือ
- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = e^{x}$ คือ
- ผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = e^{x^2}$ คือ

สมการแยกกันได้

บทนิยาม 2.1 (สมการแยกกันได้). *สมการแยกกันได้* (separable equation) คือ

สมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, \tag{2.4}$$

เมื่อ g เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ h เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y

หมายเหตุ ในบางครั้ง เราอาจจะเขียนสมการแยกกันได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y),$$

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการแยกกันได้

1. จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล โดยที่ทางซ้ายมือของสมการ มีเฉพาะพจน์ที่เกี่ยวข้องกับ ตัวแปร y และทางขวามือของสมการ มีเฉพาะพจน์ที่เกี่ยวข้องกับ ตัวแปร x

$$h(y)dy = g(x)dx$$

2. ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

3. ผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูปผลเฉลยโดยปริยาย คือ

$$H(y) = G(x) + c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 2.5. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$$

จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \sqrt[3]{64xy}$

จงหาผลเฉลยของสมการ $xyy' = y - 1$

จงหาผลเฉลยของสมการ $y \ln y dx - x dy = 0$

จงหาผลเฉลยชัดแจ้ง (explicit solution) ของสมการ

$$\csc x \; y' = y$$

ในบางครั้ง ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เราอาจจะได้ผลเฉลยจำนวนมากมายเป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งจำนวนผลเฉลยเหล่านั้น ขึ้นอยู่กับค่าคงตัว c ซึ่งเป็นค่าคงตัวใดๆ เรารวมเรียกผลเฉลยที่หมดนี้ว่า*ผลเฉลยทั่วไป* (general solution) แต่ถ้าเรากำหนดเฉพาะเจาะจงค่า c เราจะเรียกผลเฉลยนั้นว่า *ผลเฉลยเฉพาะ* (particular solution)

บทนิยาม 2.2 (ปัญหาค่าตั้งต้น). *ปัญหาค่าตั้งต้น* (initial-value problem)

เป็นข้อปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง หรือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับอื่นๆ ซึ่งประกอบไปด้วย

1. *สมการเชิงอนุพันธ์*

2. *เงื่อนไข* ซึ่ง ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ โดยตัวเงื่อนไข อาจจะมีเพียงหนึ่งเงื่อนไข หรือหลายเงื่อนไขก็ได้ แต่ทุกเงื่อนไข จะต้องเป็นเงื่อนไขที่สัมพันธ์กับค่าของตัวแปร x **เพียงค่าเดียวเท่านั้น** และเรียกเงื่อนไขนี้ว่า *เงื่อนไขตั้งต้น* (initial condition)

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dx} = ye^{-x}, \; y(0) = 1$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y' = \frac{x^2 y - y}{y+1}, y(3) = -1$$

สมการเอกพันธุ์

เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ว่า *สมการเอกพันธุ์* (homogeneous equation)

ตัวอย่างสมการเอกพันธุ์

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4y - 3x}{2x - y}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

5. $\left(x^2 + 3xy + y^2\right) dx - x^2 dy = 0$

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการเอกพันธุ์

1. สมมติให้ $v = \dfrac{y}{x}$ จะได้ว่า $y = vx$ ซึ่งทำให้

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

2. แทนค่าลงในสมการ $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = f(v) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

3. จัดรูปใหม่

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x}$$

3. จัดรูปใหม่

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x}$$

4. เนื่องจากสมการที่ถูกจัดรูปใหม่ เป็นสมการแยกกันได้

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{f(v)-v}}$$

เราสามารถใช้*ขั้นตอนวิธีแก้สมการแยกกันได้*ในการหาผลเฉลย

5. แทนค่า v ด้วย $\frac{y}{x}$ ลงในผลเฉลยที่ได้

จงหาผลเฉลยของสมการ $x\,y' = x + y$

จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \sec\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$\left(x^2 + 3xy + y^2\right) dx - x^2 dy = 0, \qquad y(1) = 0$$

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\left(y^2-1\right)xdx+(x+2)ydy=0$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$xyy' = 2y^2 + 4x^2, \; y(2) = 4$$

สมการเชิงเส้น

สำหรับรูปแบบทั่วไปของ*สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น* (first order linear differential equation) คือ

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x), \tag{2.19}$$

เมื่อ $a_1(x) \not\equiv 0.$

หรือ
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น

- $\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-x}, (a_1(x) = 1,\ a_0(x) = 1,\ b(x) = e^{-x})$
- $xy' + x^2 y = x^3, (a_1(x) = x,\ a_0(x) = x^2,\ b(x) = x^3)$
- $\dfrac{dy}{dx} + \sin x\ y = \tan x, (a_1(x) = 1,\ a_0(x) = \sin x,\ b(x) = \tan x)$
- $\dfrac{dy}{dx} = x^2, (a_1(x) = 1,\ a_0(x) = 0,\ b(x) = x^2)$
- $\dfrac{dy}{dx} + x^2 y = 0, (a_1(x) = 1,\ a_0(x) = x^2,\ b(x) = 0)$

$$y' = 2xy + 3x^2 e^{x^2}, y(0) = 5$$

ทฤษฎีบท 2.2. *ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

คือ

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c\right],$$

เมื่อ c *เป็นค่าคงตัวใดๆ*

ทฤษฎีบท 2.2. *ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

คือ

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c\right],$$

เมื่อ c *เป็นค่าคงตัวใดๆ*

จงหาผลเฉลยของสมการ $y' + 3y = 2xe^{-3x}$

จงหาผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} - 2xy = 6xe^{x^2}$

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$x^2\ y' - 3xy - 2y^2 = 0$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$xy' - y = x^2 \cos x \qquad y(\pi) = \pi$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y - x + xy\cot x + xy' = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$xy' + 3y = 2x^5, \; y(2) = 1$$

สมการแบร์นูลลี

บทนิยาม (สมการแบร์นูลลี). เราเรียกสมการที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n,$$

เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วงเปิด (a, b) และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ, ว่า**สมการแบร์นูลลี** (Bernoulli equation)

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบร์นูลลี

1. หารสมการ $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n$,

   ด้วย y^n ทำให้ได้

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

2. ให้ $v = y^{1-n}$ ซึ่งมีอนุพันธ์เทียบกับ x คือ

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

3. แทนค่า v และ $\frac{dv}{dx}$ ลงในสมการ

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

ได้

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x)$$

4. เนื่องจาก $\dfrac{1}{1-n}$ เป็นค่าคงตัว ดังนั้นเรา

สามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปสมการ

เชิงเส้นได้ คือ

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)p(x)\ v = (1-n)q(x)$$

5. หาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นได้คือ

$$v(x) = e^{-(1-n)\int p(x)\ dx}\left[\int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)\ dx} dx + c\right]$$

6. ดังนั้นผลเฉลยของสมการ คือ

$$y^{1-n} = e^{-(1-n)\int p(x)\ dx}\left[\int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)\ dx}dx + c\right]$$

หรือ สมการมีผลเฉลยชัดแจ้งคือ

$$y = \left\{e^{-(1-n)\int p(x)\ dx}\left[\int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)\ dx}dx + c\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

จงแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx} - 5y = -\dfrac{5}{2}xy^3$

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x} y^3$$

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$x\frac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4$$

สมการแบบแม่นตรง

สมมติว่าเรามีวงศ์เส้นโค้ง[10] (family of curves)

$$f(x, y) = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม (total differential) ของฟังก์ชัน f คือ

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

และเนื่องจาก $f(x, y) = c$ ซึ่งมีค่าเป็นค่าคงตัว ดังนั้น $df = 0$ ซึ่งทำให้เราได้

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \qquad (2.29)$$

เราพบว่า สมการ (2.29) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล ทำให้เรากล่าวได้ว่า $f(x, y) = c$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.29) นั่นเอง

จงแสดงว่า $x^2 + 3xy - 4y = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

เป็นผลเฉลยของสมการ $(2x + 3y)\,dx + (3x - 4)\,dy = 0$

บทนิยาม 2.6 (สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง). เรา

เรียกสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2.32)$$

ที่สามารถหาฟังก์ชัน $f(x,y)$ ซึ่ง

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง* (exact differential equation)

ซึ่งสมการ (2.32) มีผลเฉลยคือ

$$f(x, y) = c$$

เพื่อความสะดวก ภายหลังจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงเพียงสั้นๆ ว่า *สมการแบบแม่นตรง* (exact equation)

ทฤษฎีบท

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2.32)$$

1. *ถ้าสมการ (2.32) เป็นสมการแบบแม่นตรงแล้ว*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ทุกๆ (x,y) *ในโดเมน*

2. *ในทางกลับกัน ถ้า*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ทุกๆ (x,y) *ในโดเมน แล้ว สมการ (2.32) เป็น*

สมการแบบแม่นตรง

$$(2x + 3y)\,dx + (3x - 4)\,dy = 0$$

$$(3x^2 - 2y^2)\,dx + (6y^2 - 4xy)\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - 4x + 5}{2y - 4xy - 4}$$

$$(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$$

$$y\ dx + (2x - ye^y)\ dy = 0$$

$$y' = e^{2x} + y - 1$$

$$y\ dx + (2x - ye^y)\ dy = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{y}{x}\right) dx + \left(y^2 + \ln x\right) dy = 0$$

$$y' = e^{2x} + y - 1$$

$$(e^x \sin y + \tan y)\, dx + (e^x \cos y + x \sec^2 y)\, dy = 0$$

$$(\theta^2 + 1) \cos r\ dr + 2\theta \sin r\ d\theta = 0$$

$$y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$\left(3x^2 + 4xy\right) dx + \left(2x^2 + 2y\right) dy = 0$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของ

$$(ye^{xy} + \sin y)\, dx + (xe^{xy} + x\cos y)\, dy = 0$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y' = \frac{-2xy}{1+x^2}, \quad y(2) = -5$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y' = \frac{-y^2}{2xy+1}, y(1) = -2$$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ในบางครั้งเราพบว่า $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$ หรือนั่นคือ
ไม่เป็นสมการแบบแม่นตรงนั่นเองแต่อาจจะมี
ฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ ซึ่งเมื่อนำไปคูณกับสมการได้

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

แล้วทำให้เป็นสมการแบบแม่นตรง

ตัวประกอบปริพันธ์

บทนิยาม ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งไม่เป็นสมการแบบแม่นตรง แต่สมการซึ่งได้จากการคูณฟังก์ชัน $\mu(x, y)$ กับสมการเดิมแล้วเป็นสมการแบบแม่นตรง เราเรียกฟังก์ชัน $\mu(x, y)$ ว่า*ตัวประกอบปริพันธ์*ของสมการ (integrating factor of equation)

จงแสดงว่า $\mu(x, y) = xy^2$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0$$

จงแสดงว่า $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2}$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ

$$(2x^2 + y)dx + (x^2 y - x)dy = 0$$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \qquad (1.46)$$

โดยทฤษฎีบท 1.6 สมการ (1.46) เป็นสมการแบบแม่นตรงก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)M(x,y)\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)N(x,y)\right] \\ \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x} \end{aligned}$$

ซึ่งจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \qquad (1.47)$$

- **ตัวประกอบปริพันธ์เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้น**

เพราะว่าตัวประกอบปริพันธ์เป็นฟังก์ชันของ x, $\mu = \mu(x)$, ดังนั้น $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ และ สามารถจัดรูปสมการ (2.47) ได้เป็น

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu \left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} \right) \tag{2.48}$$

เมื่อ $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ **เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น**

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mu}{\mu} &= \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx \\
\int \frac{d\mu}{\mu} &= \int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx \\
\ln|\mu| &= \int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx \\
|\mu| &= \exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right),
\end{aligned}
$$

เมื่อ $\exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right) = e^{\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right)}$,

เนื่องจากเราพิจารณาหาตัวประกอบปริพันธ์เพียงฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่ง เราสามารถละเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ และได้ว่า ตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$
\mu(x) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right)
$$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{1.46}$$

โดยทฤษฎีบท 1.6 สมการ (1.46) เป็นสมการแบบแม่นตรงก็ต่อเมื่อ

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)M(x,y)\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)N(x,y)\right] \\ \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}\end{aligned}$$

ซึ่งจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \tag{1.47}$$

- **ตัวประกอบปริพันธ์เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้น**

เพราะว่าตัวประกอบปริพันธ์เป็นฟังก์ชันของ y, $\mu = \mu(y)$, ดังนั้น $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$

และ สามารถจัดรูปสมการ (2.47) ได้เป็น

$$\frac{d\mu}{dy} = \mu \left(\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} \right) \tag{2.49}$$

เมื่อ $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$ **เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เท่านั้น** [14]

สังเกตได้ว่าสมการ (2.49) เป็นสมการแบบแยกกันได้ ทำให้เราสามารถ

หาค่า μ ได้ และได้ว่า ตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$\mu(y) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} \right] dy \right)$$

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยของสมการด้วยตัวประกอบปริพันธ์

1. พิจารณาสมการ $M\ dx + Ndy = 0$ ว่าไม่ใช่สมการแบบแม่นตรง (หรือสมการแบบอื่นๆ ที่เราสามารถหาคำตอบได้โดยวิธีการที่ได้กล่าวมาแล้ว)

2. คำนวณหาค่า $\partial M/\partial y$ และ $\partial N/\partial x$

3. (a) ถ้า $\dfrac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$ เป็นฟังก์ชันของ x **เท่านั้น** ตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.50) คือ

$$\mu(x) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right] dx\right)$$

(b) ถ้า $\dfrac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$ เป็นฟังก์ชันของ y **เท่านั้น** ตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ (2.50) คือ

$$\mu(y) = \exp\left(\int \left[\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right] dy\right)$$

4. นำ μ ที่หาได้ไปคูณเข้ากับสมการ (2.50)

$$\mu M \ dx + \mu N \ dy = 0$$

แล้วนำสมการที่ได้ใหม่นี้ไปหาคำตอบ โดยพิจารณาสมการดังกล่าวเป็นสมการแบบแม่นตรง

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)\frac{dy}{dx} = 0$$

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$y\ dx + (2x - \ ye^{y})\ dy = 0$$

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$$

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) dy = 0$$

สรุป

โดยทั่วไป เราจะเขียนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

ในรูป*อนุพันธ์*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

หรือ รูป*ดิฟเฟอเรนเชียล*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

โดยที่ x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรไม่อิสระ

- สมการเชิงอนุพันธ์อย่างง่าย $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$

- สมการแยกกันได้ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)}$

- สมการเอกพันธุ์ $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

- สมการเชิงเส้น $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

- และ สมการแบบแม่นตรง $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$