1. Differential Equation

2. Ordinary Differential Equation

ODE สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

3. Partial Differential Equation

PDE สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

ODE 1 ตัวแปรอิสระ:

PDE ตัวแปรอิสระมากกว่า 1 ตัว

4. ผลเฉลย

5. ผลเฉลยชัดแจ้ง Explicit sol$^{\underline{n}}$

6. ผลเฉลยโดยปริยาย Implicit sol$^{\underline{n}}$

Explicit sol$^{\underline{n}}$ $y = f(x)$

Implicit sol$^{\underline{n}}$ $f(x,y) = c$

7. ผลเฉลยทั่วไป General sol$^{\underline{n}}$

(ติด c)

8. ผลเฉลยเฉพาะ: Particular sol$^{\underline{n}}$

ระบุค่า c

ก. ปัญหาค่าตั้งต้น Initial Valued Prob.

- DE (สมการเชิงอนุพันธ์)
- Initial Condition (เงื่อนไขค่าตั้งต้น)

- สมการอย่างง่าย (simple equation)

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$y = \int f(x)\,dx + c$$

- สมการแยกกันได้ separable equation

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

- สมการเอกพันธุ์ homogeneous equation

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ให้ $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$$

สมการเชิงเส้น

สำหรับรูปแบบทั่วไปของ*สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น* (first order linear differential equation) คือ

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x), \tag{2.19}$$

เมื่อ $a_1(x) \neq 0$.

หรือ

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเชิงเส้น

- $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$,($a_1(x)=1,\ a_0(x)=1,\ b(x)=e^{-x}$)
- $xy'+x^2y=x^3$,($a_1(x)=x,\ a_0(x)=x^2,\ b(x)=x^3$)
- $\frac{dy}{dx}+(\sin x)\,y=\tan x$,($a_1(x)=1,\ a_0(x)=\sin x,\ b(x)=\tan x$)
- $\frac{dy}{dx}=x^2$,($a_1(x)=1,\ a_0(x)=0,\ b(x)=x^2$)
- $\frac{dy}{dx}+x^2y=0$,($a_1(x)=1,\ a_0(x)=x^2,\ b(x)=0$)

$\frac{dy}{dx}=-x^2y$

$\frac{1}{y}dy=-x^2dx$

$y'=2xy+3x^2e^{x^2}$, $y(0)=5$ $\Rightarrow$ $y'-2xy=3x^2e^{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$$

$$e^{\int p(x)\,dx}\left(\frac{dy}{dx} + p(x)\,y\right) = e^{\int p(x)\,dx}\,q(x)$$

$$\boxed{e^{\int p\,dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p\,dx}\,p(x)\,y} = e^{\int p(x)\,dx}\,q(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int p\,dx}\,y\right] = e^{\int p(x)\,dx}\,q$$

$$e^{\int p\,dx}\cdot y = \int e^{\int p\,dx}\,q\,dx + C$$

$$y = e^{-\int p\,dx}\left[\int e^{\int p\,dx}\,q\,dx + C\right]$$

ทฤษฎีบท 2.2. *ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

คือ

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + c\right],$$

เมื่อ c *เป็นค่าคงตัวใดๆ*

$$\frac{dy}{dx} + py = q$$

$$\int p\,dx$$

$$y = e^{-\int p\,dx}\left(\int q e^{\int p\,dx}\,dx + C\right)$$

ทฤษฎีบท 2.2. *ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น*

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

คือ

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right],$$

เมื่อ c *เป็นค่าคงตัวใดๆ*

จงหาผลเฉลยของสมการ $y' + 3y = 2xe^{-3x}$

$p = 3$ $q = 2xe^{-3x}$

$\int p\,dx = \int 3\,dx = 3x$

$$p = 3 \qquad q = 2x e^{-3x}$$

$$\int p\,dx = \int 3\,dx = 3x$$

$$y = e^{-\int p\,dx}\left[\int q \cdot e^{\int p\,dx}\,dx + C\right]$$

$$y = e^{-3x}\left[\int 2x \boxed{e^{-3x} \cdot e^{3x}}\,dx + C\right]$$

$$= e^{-3x}\left[\int 2x\,dx + C\right]$$

$$= e^{-3x}\left[\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} + C\right] = e^{-3x}\left[x^2 + C\right]$$

$$y = e^{-3x} \cdot x^2 + Ce^{-3x}$$

จงหาผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = 6xe^{x^2}$

$p = -2x \qquad q = 6xe^{x^2}$

$\int p\,dx = \int (-2x)\,dx = -x^2$

$y = e^{-\int p\,dx}\left[\int q \cdot e^{\int p\,dx}\,dx + c\right]$

$y = e^{-(-x^2)}\left[\int 6x\cancel{e^{x^2}} \cdot \cancel{e^{-x^2}}\,dx + c\right]$

$= e^{x^2}\left[\int 6x\,dx + c\right]$

$= e^{x^2}\left[\cancel{6}\dfrac{x^2}{\cancel{2}} + c\right] = e^{x^2}\left[3x^2 + c\right]$

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$x^2\ y' - 3xy - 2y^2 = 0$$

$$x^2 y' - 3xy = 2y^2$$

ไม่ใช่สมการเชิงเส้น

$$x^2 y' = 2y^2 + 3xy$$

$$y' = \frac{2y^2}{x^2} + \frac{3xy}{x^2}$$

$$= 2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{x}\right)$$

สมการเอกพันธ์

$$v = \frac{y}{x}$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$xy' - y = x^2 \cos x \qquad \boxed{y(\pi) = \pi}$$

$$\frac{\cancel{x}y' - y}{x} = \frac{x^2 \cos x}{x}$$

$$y' - \frac{1}{x}y = x\cos x$$

$$p = -\frac{1}{x} \qquad q = x\cos x$$

$$\int p\,dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right) dx = -\ln x$$

$$y = e^{-\int p\,dx}\left[\int q \cdot e^{\int p\,dx}\,dx + c\right]$$

$$\int p\,dx = \int \left(-\frac{1}{x}\right) dx = -\ln x$$

$$y = e^{-\int p\,dx}\left[\int q \cdot e^{\int p\,dx}\, dx + c\right]$$

$$e^{-\int p\,dx} = e^{-(-\ln x)} = e^{\ln x} = x$$

$$e^{\int p\,dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln(x^{-1})} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$y = x\left[\int \cancel{x} \cos x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\, dx + c\right]$$

$$= x\left[\int \cos x\, dx + c\right]$$

$$= x\left[\sin x + c\right] = x \cdot \sin x + c$$

$$y = x[\sin x + c] = x \cdot \sin x + x \cdot c$$

จาก $y(\pi) = \pi$ $(x = \pi \, , \, y = \pi)$

$$\pi = \pi[\overset{0}{\cancel{\sin\pi}} + c]$$

$$c = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$y = x[\sin x + 1]$$

เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y - x + xy\cot x + xy' = 0 \qquad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$xy' + y + xy\cot x = x$$

$$\underset{=}{x}\,y' + \underbrace{(1 + x\cot x)}\,y = \underline{x}$$

$$y' + \left(\frac{1}{x} + \cot x\right) y = 1$$

$$p = \frac{1}{x} + \cot x \qquad q = 1$$

$$\int p\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \cot x\right) dx = \ln x + \ln(\sin x)$$

$$= \ln(x\sin x)$$

$$y = e^{-\int p\,dx}\left[\int q \cdot e^{\int p\,dx}\,dx + c\right]$$

$$= e^{-\ln(x\cdot\sin x)}\left[\int 1 \cdot e^{\ln(x\cdot\sin x)}\,dx + c\right]$$

$$= e^{\ln[(x\sin x)^{-1}]}\left[\int x\sin x\,dx + c\right]$$

$$= \frac{1}{x\cdot\sin x}\left[\int x\sin x\,dx + c\right]$$

$\int x\sin x\,dx$ $\quad 9u^2 \quad$ $u = x \qquad dv = \sin x\,dx$

$du = dx \qquad v = -\cos x$

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$$

$$= x(-\cos x) - \int(-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

$$y = \frac{1}{x\sin x}\left[-x\cos x + \sin x + c\right]$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \left(x = \frac{\pi}{2},\ y = 0\right)$$

$$0 = \frac{1}{\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \cancel{\sin\frac{\pi}{2}} + c\right]$$

$$0 \qquad \underline{1}$$

$$C = -1$$

ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y = \frac{1}{x\sin x}\left[-x\cos x + \sin x - 1\right]$$