ในบางครั้ง ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เราอาจจะได้ผลเฉลยจำนวนมากมายเป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งจำนวนผลเฉลยเหล่านั้น ขึ้นอยู่กับค่าคงตัว c ซึ่งเป็นค่าคงตัวใดๆ เรารวมเรียกผลเฉลยที่หมดนี้ว่า *ผลเฉลยทั่วไป* (general solution) แต่ถ้าเรากำหนดเฉพาะเจาะจงค่า c เราจะเรียกผลเฉลยนั้นว่า *ผลเฉลยเฉพาะ* (particular solution)

บทนิยาม 2.2 (ปัญหาค่าตั้งต้น). *ปัญหาค่าตั้งต้น* (initial-value problem)

เป็นข้อปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง หรือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับอื่นๆ ซึ่งประกอบไปด้วย

1. *สมการเชิงอนุพันธ์*

2. *เงื่อนไข* ซึ่ง ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดให้ โดยตัวเงื่อนไข อาจจะมีเพียงหนึ่งเงื่อนไข หรือหลายเงื่อนไขก็ได้ แต่ทุกเงื่อนไข จะต้องเป็นเงื่อนไขที่สัมพันธ์กับค่าของตัวแปร x **เพียงค่าเดียวเท่านั้น** และเรียกเงื่อนไขนี้ว่า *เงื่อนไขตั้งต้น* (initial condition)

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dx} = ye^{-x}, \quad y(0) = 1$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int e^{-x}\,dx$$

$$\ln|y| = -e^{-x} + C$$

general solⁿ

จาก $y(0) = 1$ $(x = 0, y = 1)$

$$\ln|1| = -e^{0} + C$$

$$0 = -1 + C$$

$$C = 1$$

particular solⁿ

ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น $\ln|y| = -e^{-x} + 1$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y' = \frac{x^2 y - y}{y+1}, \; y(3) = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x^2-1)}{y+1}$$

$$\frac{y+1}{y}\,dy = (x^2-1)\,dx$$

$$\int \frac{y+1}{y}\,dy = \int (x^2-1)\,dx$$

$$\int \frac{y+1}{y}\,dy = \int (x^2-1)\,dx$$

$$\int \frac{y+1}{y}\,dy = \int \left[\frac{y}{y} + \frac{1}{y}\right] dy = \int \left[1 + \frac{1}{y}\right] dy$$

$$= \int 1\,dy + \int \frac{1}{y}\,dy = y + \ln|y| + C_1$$

$$\int (x^2-1)\,dx = \frac{x^3}{3} - x + C_2$$

$$y + \ln|y| = \frac{x^3}{3} - x + C \quad (C = C_2 - C_1)$$

$$y + \ln|y| = \frac{x^3}{3} - x + C$$

จาก $y(3) = -1$ $\quad (x = 3,\ y = -1)$

$$-1 + \ln|-1| = \frac{3^3}{3} - 3 + C$$

$$-1 + \ln 1 = \frac{27}{3} - 3 + C$$

$$-1 + 0 = 9 - 3 + C$$

$$-1 = 6 + C$$

$$C = -1 - 6 = -7$$

ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น $y + \ln|y| = \frac{x^3}{3} - x - 7$

general $sol^{\underline{n}}$ (ติดค่า C)

particular $sol^{\underline{n}}$ (ไม่ติดค่า C)

ค่า C หาจากเงื่อนไขค่าตั้งต้น

สมการเอกพันธุ์

เราเรียกสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

ซึ่งสามารถจัดให้อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

ว่า *สมการเอกพันธุ์* (homogeneous equation)

ตัวอย่างสมการเอกพันธุ์

1. $$\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$$

2. $$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} + \frac{2\cancel{x}y}{\cancel{x^2}} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

3. $$\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y}$$

4. $$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$$

5. $$(x^2 + 3xy + y^2)\,dx - x^2 dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y} \cdot \boxed{\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}} = \frac{\frac{4y-3x}{x}}{\frac{2x-y}{x}}$$

$$= \frac{\frac{4y}{x} - \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}}{\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{y}{x}} = \frac{4\left(\frac{y}{x}\right) - 3}{2 - \left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy} = \frac{\cancel{x^2}}{2\cancel{x}y} + \frac{3\cancel{y^2}}{2x\cancel{y}}$$

$$= 2\frac{x}{y} + \frac{3}{2}\cdot\frac{y}{x}$$

$$= 2\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$(x^2+3xy+y^2)\,dx - x^2\,dy = 0$$

$$(x^2+3xy+y^2)\,dx = x^2\,dy$$

$$x^2\,dy = (x^2+3xy+y^2)\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3xy+y^2}{x^2}$$

$$= \cancel{\frac{x^2}{x^2}} + \frac{3xy}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$= 1 + 3\frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการเอกพันธุ์

1. สมมติให้ $v = \frac{y}{x}$ จะได้ว่า $y = vx$ ซึ่งทำให้

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

2. แทนค่าลงในสมการ $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = f(v) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

3. จัดรูปใหม่

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x}$$

3. จัดรูปใหม่

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(v) - v}{x}$$

4. เนื่องจากสมการที่ถูกจัดรูปใหม่ เป็นสมการแยกกัน ได้

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{f(v)-v}}$$

เราสามารถใช้*ขั้นตอนวิธีแก้สมการแยกกัน*ได้ในการหาผลเฉลย

5. แทนค่า v ด้วย $\frac{y}{x}$ ลงในผลเฉลยที่ได้

1. ตรวจสอบว่าเป็นสมการเอกพันธุ์

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

2. ให้ $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{dx}{dx} + x\frac{dv}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$$

3. $$x\frac{dv}{dx} = f(v) - v$$

$$\frac{1}{f(v)-v}\,dv = \frac{1}{x}\,dx$$

4. $$\int \frac{1}{f(v)-v}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

5. แทนค่า $v = \frac{y}{x}$

จงหาผลเฉลยของสมการ $x\,y' = x + y$

$$x\frac{dy}{dx} = x+y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} = \frac{x}{x} + \frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{x}$$

ให้ $v = \frac{y}{x}$

$$y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = 1 + v$$

$$x\frac{dv}{dx} = 1 + \cancel{v} - \cancel{v} = x\frac{dv}{dx} = 1$$

$$x\frac{dv}{dx} = 1$$

$$dv = \frac{1}{x}dx$$

$$\int dv = \int \frac{1}{x}dx$$

$$v = \ln|x| + c$$

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + c \text{ (implicit sol}^{n}\text{)}$$

$$y = x \cdot (\ln|x| + c)$$

$$= x \cdot \ln|x| + c \cdot x \text{ (Explicit Sol}^{n}\text{)}$$

จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \sec\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}$

ให้ $v = \frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \cancel{v} + x\frac{dv}{dx} = \sec(v) + \cancel{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \sec v$$

$$\frac{1}{\sec v}\,dv = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{\sec v}\,dv = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\cos v\,dv = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \cos v\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\sin v = \ln|x| + c$$

$$\sin\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + c \text{ (implicit sol}^n\text{)}$$

$$\frac{y}{x} = \sin^{-1}(\ln|x| + c)$$

$$y = x\sin^{-1}(\ln|x| + c) \text{ (Explicit sol}^n\text{)}$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$\left(x^2 + 3xy + y^2\right) dx - x^2 dy = 0, \qquad y(1) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 3\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

ให้ $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = 1 + 3v + v^2$$

$$x\frac{dv}{dx} = 1 + 3v + v^2 - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = 1 + 2v + v^2$$

$$\frac{1}{1+2v+v^2}\,dv = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{(1+v)^2}\,dv = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(1+v)^2}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{(1+v)^2}\,dv$$

$$u^2 \qquad u = 1+v$$

$$du = d(1+v) = dv$$

$$\int \frac{1}{(1+v)^2}\,dv = \int \frac{1}{u^2}\,du = \int u^{-2}\,du$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1} + C_1$$

$$= \frac{-1}{u} + C_1 = \frac{-1}{1+v} + C_2$$

$$\int \frac{1}{(1+v)^2}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \frac{-1}{1+v} = \ln|x| + C$$

$$\frac{-1}{1+v} = \ln|x| + C$$

$$\frac{-1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)} = \ln|x| + C$$

$$\frac{-1}{\frac{x+y}{x}} = \frac{-x}{x+y} = \ln|x| + C \text{ (implicit sol}^{\underline{n}}\text{)}$$

$$\frac{-x}{x+y} = \ln|x| + C$$

จาก $y(1) = 0 \quad (x = 1, y = 0)$

$$\frac{-1}{1+0} = \cancel{\ln|1|} + C$$

$$C = \frac{-1}{1} = -1$$

ผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$\frac{-x}{x+y} = \ln|x| -$$

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\left(y^2-1\right)xdx+(x+2)ydy=0$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$xyy' = 2y^2 + 4x^2, \quad y(2) = 4$$

$$xy\frac{dy}{dx} = 2y^2 + 4x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cancel{y^2}}{x\cancel{y}} + \frac{4x^2}{xy}$$

$$= 2\left(\frac{y}{x}\right) + 4\frac{x}{y}$$

$$= 2\left(\frac{y}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{\frac{y}{x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{\frac{y}{x}}\right)$$

$$9u^2 \quad v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = 2v + \frac{4}{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = 2v + \frac{4}{v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = v + \frac{4}{v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = v + \frac{4}{v} = \frac{v^2+4}{v}$$

$$\frac{v}{v^2+4}\,dv = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{v}{v^2+4}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$u = v^2+4$$

$$du = 2v\,dv$$

$$v\,dv = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{v}{v^2+4}\,dv = \int \frac{1}{u}\,\frac{du}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u| + c_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln|v^2+4| + c_1$$

$$\frac{1}{2}\ln|v^2+4| = \ln|x| + c$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2+4\right| = \ln|x| + C$$

จาก $y(2)=4$ $(x=2,\ y=4)$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{4}{2}\right)^2+4\right| = \ln|2| + C$$

$$\frac{1}{2}\ln|2^2+4| = \ln 2 + C$$

$$\frac{1}{2}\ln 8 = \ln 2 + C$$

$$\frac{1}{2}\ln 2^{3} = \frac{3}{2}\ln 2 = \ln 2 + C$$

$$C = \frac{3}{2}\ln 2 - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\frac{1}{2}\ln|v^2+4| = \ln|x| + c$$

$$c = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\left(\frac{y}{x}\right)^2+4\right| = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln 2$$

เป็นผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

1. Diffential Equation

2. Ordinary DE (ODE) สามัญ

ตัวแปรอิสระ 1 ตัวแปร

3. Partial DE (PDE) ย่อย

ตัวแปรอิสระ มากกว่า 1 ตัวแปร

4. Order (อันดับ)

อันดับสูงสุดของอนุพันธ์

5. ผลเฉลย Solution

6. ผลเฉลย ชัดแจ้ง Explicit sol$^{\underline{n}}$

$y = f(x)$

7. ผลเฉลยโดยปริยาย Implicit sol$^{\underline{n}}$

ติดสมการ

8. ผลเฉลยทั่วไป general sol$^{\underline{n}}$

ติดค่า C

9. ผลเฉลยเฉพาะ particular sol$^{\underline{n}}$

ระบุค่า C

10 ปัญหาค่าตั้งต้น initial Valued problem

- สมการเชิงอนุพันธ์
- เงื่อนไขค่าตั้งต้น (initial value)

$$y(x_0) = y_0$$

11. $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)}$ derivative form

12. $f(y)\,dy + g(x)\,dx = 0$ differential form

- สมการอย่างง่าย (simple equation)

$$y' = f(x)$$

$$y = \int f(x)\,dx + C$$

- สมการแยกตัวแปรได้ (separable equation)

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dy$$

- สมการเอกพันธ์ (Homogeneous eq)

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

จะได้ $v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$$

⇒ ย้อนไปสู่สมการแยกกันได้

แทน $v = \frac{y}{x}$