บทนิยาม 1.1 (สมการเชิงอนุพันธ์). *สมการเชิงอนุพันธ์* (differential equation) คือ สมการซึ่งมีพจน์ของ อนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับตัวแปรอิสระ หนึ่งตัวหรือ อนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่า เทียบกับ ตัวแปรอิสระ หลายตัว

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + y &= 0 && (1.1)\\
\frac{dy}{dx} + y &= e^{-x^2} && (1.2)\\
\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{dy}{dx} &= \sin(xy) && (1.3)\\
\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= \frac{y}{x} + \frac{x}{y} && (1.4)\\
y''' + xy' + x^2y &= x^3 && (1.5)
\end{aligned}
$$

สำหรับสมการ (1.1)-(1.5) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าเทียบกับตัวแปรอิสระหนึ่งตัวแปร เราเรียกสมการดังกล่าวนี้ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ* (ordinary differential equation, ODE)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} &= u && (1.6) \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} &= 0 && (1.7) \\
u_t &= c^2 u_{ss} && (1.8)
\end{aligned}
$$

สมการ (1.6)-(1.8) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันไม่ทราบค่าเทียบกับตัวแปรอิสระมากกว่าหนึ่งตัวแปร เราเรียกสมการดังกล่าวนี้ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย* (partial differential equation, PDE)

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x^2} \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{dy}{dx} = \sin(xy) \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \tag{1.4}$$

$$y''' + xy' + x^2y = x^3 \tag{1.5}$$

ODE

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = u \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = 0 \tag{1.7}$$

$$u_t = c^2 u_{ss} \tag{1.8}$$

PDE

บทนิยาม 1.2 **(อันดับของสมการ).** *อันดับ* (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึง *อันดับสูงสุด* ของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการเชิงอนุพันธ์นั้น

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + y &= 0 && (1.1)\\
\frac{dy}{dx} + y &= e^{-x^2} && (1.2)\\
\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\frac{dy}{dx} &= \sin(xy) && (1.3)
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \quad (1.4)$$

$$y''' + xy' + x^2y = x^3 \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t} = u \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3^2} = 0 \quad (1.7)$$

$$u_t = c^2 u_{ss} \quad (1.8)$$

ผลเฉลย

บทนิยาม 1.4 (ผลเฉลย). พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n

$$F\left[x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{d^n x}\right] = 0, \tag{1.9}$$

- ให้ f เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ซึ่งนิยามสำหรับทุกๆ x ซึ่งอยู่อยู่ในช่วง I และ สามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ได้ถึงอันดับที่ n สำหรับทุกๆ $x \in I$ ถ้าฟังก์ชัน f เป็นไปตามเงื่อนไขสองข้อ ต่อไปนี้

1. ฟังก์ชัน

$$F\left[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right]$$

ถูกนิยาม สำหรับทุกๆ $x \in I$, และ

2. เมื่อแทนค่า y ด้วยฟังก์ชัน $f(x)$ และแทนค่าอนุพันธ์ของ y ด้วย

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ที่มีอันดับสมนัยกันตามลำดับ ลงในสมการ

(1.9) แล้วทำให้ F มีค่าเป็นศูนย์ทุกๆ ค่า x ที่อยู่ใน I นั่นคือ

$$F\left[x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)\right] = 0$$

สำหรับทุกๆ $x \in I$

$y = f(x)$

เราจะเรียกฟังก์ชัน f ว่า *ผลเฉลยชัดแจ้ง* (explicit solution)

ตัวอย่าง

$y = f(x) = e^x$ **เป็นผลเฉลยชัดแจ้ง (explicit solution)**

ของสมการ $\dfrac{dy}{dx} - y = 0$

$y = e^x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{de^x}{dx} = e^x$

$e^x - e^x = 0$

- พิจารณาความสัมพันธ์

$$g(x, y) = 0$$

ถ้าเราสามารถจัดรูปหรือทำให้ความสัมพันธ์ดังกล่าวสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ได้ เราจะเรียกความสัมพันธ์นี้ว่า *ผลเฉลยโดยปริยาย* (implicit solution)

- เพื่อความสะดวก เราจะรวมเรียก *ผลเฉลยชัดแจ้ง* และ *ผลเฉลยโดยปริยาย* ว่า *ผลเฉลย* (solution)

ตัวอย่าง

ความสัมพันธ์ $\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 0$

เป็นผลเฉลยโดยปริยาย (implicit solution) ของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}(y^{-1}) - \frac{d}{dx}(x^{-1}) = 0$$

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} - (-1)x^{-2}\frac{dx}{dx} = 0$$

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} + x^{-2} = 0$$

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} = -x^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{-}x^{-2}}{\cancel{-}y^{-2}} = \frac{1}{x^{2}\cdot\frac{1}{y^{2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^{2}}{x^{2}}$$ implicit solution

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{x}$$

$$y = x$$ explicit solution

จงแสดงว่าฟังก์ชัน $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$

เป็นผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

จงแสดงว่าความสัมพันธ์ $y^2 - x^3 + 8 = 0$

เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

ODE สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

PDE สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

Order อันดับ

Solution ผลเฉลย

Explicit solⁿ ผลเฉลยชัดแจ้ง

$y = f(x)$

implicit solⁿ ผลเฉลยโดยปริยาย

รูปแบบมาตรฐานของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

รูป*อนุพันธ์* (derivative form)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2.1}$$

หรือ รูป*ดิฟเฟอเรนเชียล* (differential form)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.2}$$

โดยสมการรูปดิฟเฟอเรนเชียล (2.2) จะสมมูลกับสมการรูปอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

สมการเชิงอนุพันธ์อย่างง่าย

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง ที่ง่ายต่อการหาผลเฉลยที่สุด จะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2.3}$$

การแก้สมการนี้ จะเป็นแค่การหาค่า*อินทิกรัล* (integral) เท่านั้นเองซึ่งผลเฉลยของสมการรูปแบบนี้ คือ[2]

$$y = \int f(x)dx \boxed{+ c,}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

---

[2]ดูเรื่องการหาค่าอินทิกรัลได้ในหนังสือแคลคูลัสทั่วไป

ตัวอย่างผลเฉลยของสมการอนุพันธ์อย่างง่าย

- ผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} = 1$ คือ $y = \int 1\,dx = x + C$
- ผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} = x$ คือ $y = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
- ผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} = \cos x$ คือ $y = \int \cos x\,dx = \sin x + C$
- ผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} = e^x$ คือ $y = \int e^x\,dx = e^x + C$
- ผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} = e^{x^2}$ คือ $y = \int e^{x^2}\,dx + C$

สมการแยกกันได้

บทนิยาม 2.1 (สมการแยกกันได้). *สมการแยกกันได้* (separable equation) คือสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, \tag{2.4}$$

เมื่อ g เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ h เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y

หมายเหตุ ในบางครั้ง เราอาจจะเขียนสมการแยกกันได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = g(x)p(y),$$

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการแยกกันได้

1. จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล โดยที่ทางซ้ายมือของสมการ มีเฉพาะพจน์ที่เกี่ยวข้องกับ ตัวแปร y และทางขวามือของสมการ มีเฉพาะพจน์ที่เกี่ยวข้องกับ ตัวแปร x

$$h(y)dy = g(x)dx$$

2. ทำการอินทิเกรตทั้งสองข้างของสมการ

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx$$

3. ผลเฉลยที่ได้อยู่ในรูปผลเฉลยโดยปริยาย คือ

$$H(y) = G(x) + c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

ตัวอย่าง 2.5. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int \frac{1}{x^2}dx$$

$$\int y^{-2}dy = \int x^{-2}dx$$

$$\frac{y^{-1}}{-1} = \frac{x^{-1}}{-1} + C$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} - C$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + C^* \quad \text{(implicit sol}^{\underline{n}}\text{)}$$

$$y = \frac{1}{\frac{1}{x} + C^*}$$

$$= \frac{1}{\frac{1 + C^* x}{x}}$$

$$y = \frac{x}{1 + C^* x} \quad \text{(explicit sol}^{\underline{n}}\text{)}$$

จงหาผลเฉลยของสมการ $y' = \sqrt[3]{64xy}$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{64}\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$$

$$\frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = 4\sqrt[3]{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int 4x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$\int y^{-\frac{1}{3}}\,dx = 4\int x^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$\frac{y^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = 4\,\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$\frac{y^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} = 4\,\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \cancel{4}\,\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{\cancel{4}}{3}} + C$$

$$\frac{3}{2}\,y^{\frac{2}{3}} = 3\,x^{\frac{4}{3}} + C \quad \text{(implicit sol}^{\underline{n}}\text{)}$$

$$y^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\cancel{3}}\left(\cancel{3}\,x^{\frac{4}{3}} + C\right)$$

$$y^{\frac{2}{3}} = 2\,x^{\frac{4}{3}} + C^{*} \quad , \quad C^{*} = \frac{2}{3}\,C$$

$$y = \underline{\left(2x^{\frac{4}{3}} + C^{*}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(Explicit sol}^{\underline{n}}\text{)}$$

จงหาผลเฉลยของสมการ $xyy' = y - 1$

$$xy\frac{dy}{dx} = y-1$$

$$\frac{y}{y-1}\,dy = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{y}{y-1}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{y}{y-1}\,dy = \int \frac{y-1+1}{y-1}\,dy = \int\left(\frac{y-1}{y-1} + \frac{1}{y-1}\right)dy$$

$$= \int\left[1 + \frac{1}{y-1}\right]dy = \int 1\,dy + \int \frac{1}{y-1}\,dy$$

$$= y + \ln|y-1| + C_1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C_2$$

$$y + \ln|y-1| = \ln|x| + C \quad \text{(implicit)}$$

จงหาผลเฉลยของสมการ $y \ln y dx - x dy = 0$

$$y \ln y \, dx = x \, dy$$

$$x \, dy = y \ln y \, dx$$

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{y \ln y} dy = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{y \ln y} \, dy \quad @\, u^2 \quad u = \ln y$$

$$du = \frac{1}{y} \, dy$$

$$dy = y \, du$$

$$\int \frac{1}{y \ln y} \, dy = \int \frac{1}{\cancel{y} \cdot u} \cdot \cancel{y} \, du$$

$$= \int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| + c_2$$

$$= \ln|\ln y| + c_2$$

$$\ln|\ln y| = \ln x + c \quad (\text{implicit sol}^{\underline{n}})$$

$$\ln|\ln y| = \ln x + C \quad (\text{implicit sol}^{\underline{n}})$$

$$|\ln y| = e^{\ln x + C} = e^{C} \cdot e^{\ln x}$$

$$= kx \quad , \quad k = e^{C} > 0$$

$$\ln y = \bar{k}\, x$$

$\bar{k}$ อาจจะเป็นบวกหรือลบ

$$y = e^{\bar{k}x} \quad (\text{Explicit sol}^{\underline{n}})$$

จงหาผลเฉลยชัดแจ้ง (explicit solution) ของสมการ

$$\csc x \, y' = y$$

$$\csc x \frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{\csc x} dx = \sin x \, dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \sin x \, dx$$

$$\ln|y| = -\cos x + C$$

$$|y| = e^{-\cos x + C}$$

$$y = \pm e^{-\cos x + C} = \pm e^{C} \cdot e^{-\cos x}$$

$$= K e^{-\cos x}$$, K เป็นค่าคงตัวใดๆ