1. Simple equation (อย่างง่าย)

$$y' = f(x)$$

$$y = \int f(x)\,dx + c$$

2. Separable equation (แยกกันได้)

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

3. Homogeneous equation (เอกพันธุ์)

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ให้ $v = \frac{y}{x}$ $\quad y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$

4. Linear equation (เชิงเส้น)

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

$$y = e^{-\int p\,dx}\left[\int q \cdot e^{\int p\,dx}\,dx + C\right]$$

5. Bernoulli's equation (แบร์นูลลี่)

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{n}$$

หารด้วย y^{n} ทั้ง 2 ข้างของสมการ

$$y^{-n}y' + p(x)\,y^{1-n} = q(x)$$

ให้ $v = y^{1-n}$ $\qquad \dfrac{dv}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$

สมการแบบแม่นตรง

สมมติว่าเรามีวงศ์เส้นโค้ง[10] (family of curves)

$$\boxed{f(x, y)} = c,$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

ผลต่างเชิงอนุพันธ์รวม (total differential) ของฟังก์ชัน f คือ

$$\boxed{df} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}} dx + \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}} \boxed{dy}$$

และเนื่องจาก $f(x, y) = c$ ซึ่งมีค่าเป็นค่าคงตัว ดังนั้น $df = 0$ ซึ่งทำให้เราได้

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0} \qquad (2.29)$$

เราพบว่า สมการ (2.29) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งที่อยู่ในรูปดิฟเฟอเรนเชียล ทำให้เรากล่าวได้ว่า $\boxed{f(x,y) = c}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (2.29) นั่นเอง

จงแสดงว่า $x^2 + 3xy - 4y = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

เป็นผลเฉลยของสมการ $(2x + 3y)\,dx + (3x - 4)\,dy = 0$

$$d(x^2 + 3xy - 4y) = dc$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy - 4y)\,dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 3xy - 4y)\,dy = 0$$

$$(2x + 3y)\,dx + (3x - 4)\,dy = 0$$

บทนิยาม 2.6 (สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง). เรา

เรียกสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0} \tag{2.32}$$

ที่สามารถหาฟังก์ชัน $\boxed{f(x,y)}$ $= C$ ซึ่ง

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)} = M(x,y) \quad \text{และ} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = N(x,y)$$

ว่า *สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง* (exact differential equation)

ซึ่งสมการ (2.32) มีผลเฉลยคือ

$$\boxed{f(x, y) = c}$$

เพื่อความสะดวก ภายหลังจะเรียกสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงเพียงสั้นๆ ว่า *สมการแบบแม่นตรง* (exact equation)

ทฤษฎีบท

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (2.32)$$

1. *ถ้าสมการ (2.32) เป็นสมการแบบแม่นตรงแล้ว*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ทุกๆ (x,y) *ในโดเมน*

2. *ในทางกลับกัน ถ้า*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

ทุกๆ (x,y) *ในโดเมน แล้ว สมการ (2.32) เป็น*

สมการแบบแม่นตรง

$f_{xy} \neq f_{yx}$

เท่ากันก็ต่อเมื่อ f_{xy} และ f_{yx} ต่อเนื่อง

$$(2x + 3y)\,dx + (3x - 4)\,dy = 0$$

$$(3x^2 - 2y^2)\,dx + (6y^2 - 4xy)\,dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - 4x + 5}{2y - 4xy - 4}$$

$$(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$$

$$y\;dx + (2x - ye^y)\;dy = 0$$

$$y' = e^{2x} + y - 1$$

$$y\,dx + (2x - ye^{y})\,dy = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{y}{x}\right) dx + \left(y^2 + \ln x\right) dy = 0$$

$$y' = e^{2x} + y - 1$$

$$(e^{x} \sin y + \tan y)\,dx + (e^{x} \cos y + x \sec^2 y)\,dy = 0$$

$$(\theta^2 + 1) \cos r\,dr + 2\theta \sin r\,d\theta = 0$$

$$y' = \frac{2 + ye^{xy}}{2y - xe^{xy}}$$

$$\underbrace{(2x+3y)}_{M}\,dx+\underbrace{(3x-4)}_{N}\,dy=0$$

$$M = 2x+3y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x+3y) = 0+3\frac{\partial y}{\partial y} = 3$$

$$N = 3x-4$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(3x-4)}{\partial x} = 3-0 = 3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

∴ สมการนี้เป็นสมการแบบแม่นตรง

$$(3x^2-2y^2)dx + (6y^2-4xy)dy = 0$$

$M = 3x^2-2y^2$ $\qquad$ $N = 6y^2-4xy$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2-2y^2) \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(6y^2-4xy)$$

$$= 0-2(2y) \qquad = 0-4y\frac{\partial x}{\partial x}$$

$$= -4y \qquad = -4y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

สมการดังกล่าวเป็นสมการแบบแม่นตรง

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - 4x + 5}{2y - 4xy - 4}$$

$$(2y - 4xy - 4)\,dy = (2y^2 - 4x + 5)\,dx$$

$$\underbrace{(2y^2 - 4x + 5)}_{M}dx - \underbrace{(2y - 4xy - 4)}_{N}dy = 0$$

$$(2y^2 - 4x + 5)\,dx + (-2y + 4xy + 4)\,dy = 0$$

$$M = 2y^2 - 4x + 5 \qquad N = -2y + 4xy + 4$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2y^2 - 4x + 5) \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\cancel{-2y} + 4xy \cancel{+4})$$

$$= 4y \qquad = 4y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$(2y-4xy-4)dy = (2y^2-4x+5)dx$$

$$-(2y^2-4x+5)dx + (2y-4xy-4)dy = 0$$

$$M = -(2y^2-4x+5)$$

$$= -2y^2+4x-5$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-2y^2+\cancel{4x}-\cancel{5})$$

$$= -4y$$

$$N = 2y-4xy-4$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\cancel{2y}-4xy-\cancel{4})$$

$$= -4y\frac{\partial x}{\partial x} = -4y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

สมการดังกล่าวเป็นสมการแบบแม่นตรง

$$\left(x^2 + \frac{y}{x}\right)dx + \left(y^2 + \ln x\right)dy = 0$$

$$M = x^2 + \frac{y}{x} \qquad\qquad N = y^2 + \ln x$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{\partial \cancel{x^2}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= 0 + \frac{1}{x}\cancel{\frac{\partial y}{\partial x}}^{\,1}$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 + \ln x\right)$$

$$= \frac{\partial y^2}{\partial x} + \frac{\partial \ln x}{\partial x}$$

$$= 0 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

เป็นสมการแบบแม่นตรง

$$y' = e^{2x} + y - 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{2x} + y - 1$$

$$dy = (e^{2x} + y - 1)\,dx$$

$$(e^{2x} + y - 1)\,dx - dy = 0$$

$$M = e^{2x} + y - 1 \qquad N = -1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{2x} + y - 1) \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial(-1)}{\partial x}$$

$$= \cancel{\frac{\partial e^{2x}}{\partial y}} + \frac{\partial y}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial 1}{\partial y}} \qquad = 0$$

$$= 1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$ ไม่เป็นสมการแบบ
แม่นตรง

$$y' = \frac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$$

$$(2y-xe^{xy})\,dy = (2+ye^{xy})\,dx$$

$$(2+ye^{xy})\,dx - (2y-xe^{xy})\,dy = 0$$

$$(2+ye^{xy})\,dx + (-2y+xe^{xy})\,dy = 0$$

$$(2+ye^{xy})\,dx + (xe^{xy}-2y)\,dy = 0$$

$$M = 2+ye^{xy} \qquad N = xe^{xy}-2y$$

$$(2+ye^{xy})dx+(xe^{xy}-2y)dy=0$$

$$M = 2+ye^{xy}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2+ye^{xy}\right)$$

$$= \cancel{\frac{\partial 2}{\partial y}} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\boxed{y}\,\boxed{e^{xy}}\right)$$

$$= 0 + y\boxed{\frac{\partial e^{xy}}{\partial y}} + e^{xy}\frac{\partial y}{\partial y}$$

$$= y\cdot xe^{xy} + e^{xy}$$

$$= xye^{xy}+e^{xy}$$

$$N = xe^{xy}-2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy}-2y\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy}\right) - \cancelto{0}{\frac{\partial(2y)}{\partial x}}$$

$$\boxed{xy}$$

$$= x\frac{\partial e^{xy}}{\partial x} + e^{xy}\frac{\partial x}{\partial x}$$

$$= xye^{xy}+e^{xy}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$ เป็นสมการ
แบบแม่นตรง