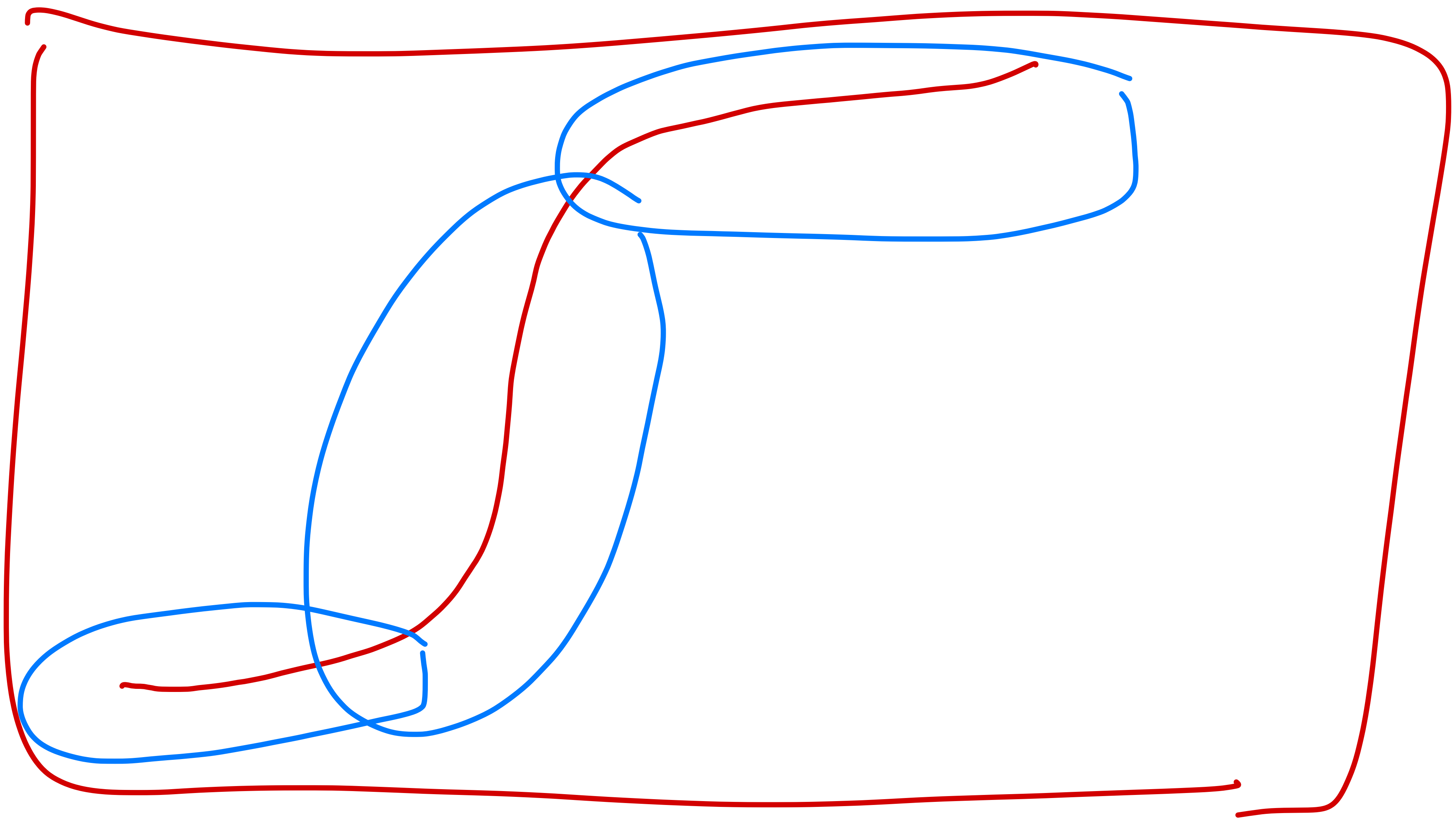
สมการแบร์นูลลี

บทนิยาม (สมการแบร์นูลลี). เราเรียกสมการที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^n,$$

เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วงเปิด (a, b) และ n เป็นจำนวนจริงใดๆ, ว่า**สมการแบร์นูลลี** (Bernoulli equation)



ขั้นตอนวิธีการแก้สมการแบร์นูลลี

1. หารสมการ $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)\cancel{y^n}$,

ด้วย y^n ทำให้ได้ y^n $\cancel{y^n}$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

2. ให้ $\boxed{v = y^{1-n}}$ ซึ่งมีอนุพันธ์เทียบกับ x คือ

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$\Rightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}$

3. แทนค่า v และ $\frac{dv}{dx}$ ลงในสมการ

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

ได้

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} + p(x)v = q(x)$$

4. เนื่องจาก $\dfrac{1}{1-n}$ เป็นค่าคงตัว ดังนั้นเรา

สามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปสมการ

เชิงเส้นได้ คือ

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)p(x)\,v = (1-n)q(x)$$

5. หาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นได้คือ

$$v(x) = e^{-(1-n)\int p(x)\,dx}\left[\int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)\,dx}dx + c\right]$$

6. ดังนั้นผลเฉลยของสมการ คือ

$$y^{1-n} = e^{-(1-n)\int p(x)\,dx}\left[\int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)\,dx}dx + c\right]$$

หรือ สมการมีผลเฉลยชัดแจ้งคือ

$$y = \left\{e^{-(1-n)\int p(x)\,dx}\left[\int (1-n)q(x)e^{(1-n)\int p(x)\,dx}dx + c\right]\right\}^{\frac{1}{1-n}}$$

$$\frac{\frac{dy}{dx} + p(x)\,y}{y^n} = \frac{q(x)\,y^n}{y^n}$$

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + p(x)\frac{y}{y^n} = q(x)\frac{\cancel{y^n}}{\cancel{y^n}}$$

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)\,y^{1-n} = q(x)$$

$$6\,u^2 \qquad v = y^{1-n}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}\,y^{1-n} = (1-n)\,y^{1-n-1}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} y^{1-n} = (1-n) y^{1-n-1} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} = y^{-n} \frac{dy}{dx}$$

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x) y^{1-n} = q(x)$$

$$\frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} + p(x) v = q(x)$$ [linear eq.]

$$v = y^{1-n}$$

จงแก้สมการ $\dfrac{dy}{dx} - 5y = -\dfrac{5}{2}xy^3$

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} - 5\frac{y}{y^3} = -\frac{5}{2}x\frac{\cancel{y^3}}{y^3}$$

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - 5\boxed{y^{-2}} = -\frac{5}{2}x$$

ให้ $v = y^{-2}$

$$\frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$$

$$\boxed{y^{-3}\frac{dy}{dx}} - 5\boxed{y^{-2}} = -\frac{5}{2}x$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - 5v = -\frac{5}{2}x$$

$$(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{dv}{dx} + (-2)(-5)v = (-2)\left(-\frac{5}{2}x\right)$$

$$\frac{dv}{dx} + 10v = 5x$$

$$v = e^{-\int p\,dx}\left[\int q \cdot e^{\int p\,dx}\,dx + c\right]$$

$$p = 10 \quad , \quad q = 5x$$

$$V = e^{-\int p\,dx}\left[\int q \cdot e^{\int p\,dx}\,dx + c\right]$$

$$p = 10 \quad , \quad q = 5x$$

$$\int p\,dx = \int 10\,dx = 10x$$

$$V = e^{-10x}\left[\int 5x\,e^{10x}\,dx + c\right]$$

$$= e^{-10x}\left[5\int x\,e^{10x}\,dx + c\right]$$

Integration by Parts

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$v = e^{-10x}\left[5\int x e^{10x}\,dx + c\right]$$

$$\int x e^{10x}\,dx$$

$$u = x \qquad dv = e^{10x}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{e^{10x}}{10}$$

$$\int x e^{10x}\,dx = uv - \int v\,du$$

$$= x\frac{e^{10x}}{10} - \int \frac{e^{10x}}{10}\,.dx$$

$$= \frac{x e^{10x}}{10} - \frac{e^{10x}}{100} + c$$

$$y^{-2} = e^{10x}\left[5\left(\frac{x e^{10x}}{10} - \frac{e^{10x}}{100}\right) + C\right]$$

$$= e^{10x}\left[\frac{x e^{10x}}{2} - \frac{e^{10x}}{20} + C\right]$$

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x} y^3$$

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} - \frac{y}{y^3} = e^{2x}$$

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - y^{-2} = e^{2x}$$

ให้ $v = y^{-2}$ $\quad \frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} - y^{-2} = e^{2x}$$

$$q \quad u^2 \quad v = y^{-2} \qquad \frac{dv}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} = y^{-3}\frac{dy}{dx}$$

$$-2\left(-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - v = e^{2x}\right)$$

$$\frac{dv}{dx} + 2v = -2e^{2x}$$

$$p = 2 \ , \ q = -2e^{2x}$$

$$\int p\,dx = \int 2\,dx = 2x$$

$$\frac{dv}{dx} + 2v = -2e^{2x}$$

$$p = 2 \quad , \quad q = -2e^{2x}$$

$$\int p\,dx = \int 2\,dx = 2x$$

$$v = e^{-\int p\,dx}\left[\int q\,e^{\int p\,dx}\,dx + C\right]$$

$$= e^{-2x}\left[\int (-2e^{2x}) \cdot e^{2x}\,dx + c\right]$$

$$= e^{-2x}\left[-2\int e^{4x}\,dx + c\right]$$

$$y^{-2} = e^{-2x}\left[-\frac{\cancel{2}\,e^{4x}}{\cancel{4}} + c\right]$$

$$y^{-2} = -\frac{e^{2x}}{2} + C e^{-2x}$$

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

$$x\frac{dy}{dx} + y = -2x^6y^4$$

$$\frac{x}{y^4}\frac{dy}{dx} + y^{-3} = -2x^6$$

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-3} = -2x^5$$

ให้ $v = y^{-3}$ $\quad \frac{dv}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-3} = -2x^5$$

$$\text{@ } u^2 \quad v = y^{-3} \qquad \frac{dv}{dx} = -3y^{-4}\frac{dy}{dx}$$

$$y^{-4}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}\frac{dv}{dx}$$

$$-3\left(-\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = -2x^5\right)$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x}v = 6x^5$$

$$p = \frac{-3}{x} \qquad q = 6x^5$$

$$\int p\,dx = \int \frac{-3}{x}dx = -3\ln x$$

$$\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x} v = 6x^5$$

$$p = \frac{-3}{x} \qquad q = 6x^5$$

$$\int p\,dx = \int \frac{-3}{x} dx = -3 \ln x$$

$$v = e^{-\int p\,dx} \left[\int q \cdot e^{\int p\,dx} dx + C \right]$$

$$y^{-3} = e^{-(-3 \ln x)} \left[\int 6 \cdot x^5 \cdot e^{-3 \ln x} dx + C \right]$$

$$= e^{3 \ln x} \left[6 \int x^5 \cdot x^{-3} dx + C \right]$$

$$= x^3 \left[6 \int x^2 dx + C \right]$$

$$y^{-3} = x^3 \left[6 \cdot \frac{x^3}{3} + C \right] = x^3 \left[2x^3 + C \right]$$

1. Simple equation

$$y' = f(x)$$

$$y = \int f(x)\,dx$$

2. Separable equation

$$\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

3. Homogeneous equation

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = f(v)$$

4. Linear equation

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$p =$ $\qquad$ $q =$

$\int p\,dx =$

$$y = e^{-\int p\,dx}\left[\int q \cdot e^{\int p\,dx}\,dx + C\right]$$

5. Bernoulli's equation

$$y' + p(x)y = q(x)\boxed{y^n}$$

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$$

$$\boxed{v = y^{1-n}}$$