

ผศ.ดร.เจษฎา ตัณฑานุช

พืชคณิตของพหุนาม

- การแยกตัวประกอบ ทฤษฎีเศษเหลือ การแยกเศษส่วนย่อย
- การหาผลเฉลยของสมการพหุนามกำลังมากกว่าสอง

ฟังก์ชันและกราฟ

- กราฟของสมการเชิงเส้น เส้นโค้ง
- ภาคตัดกรวย วงกลม วงรี พาราโบลา ไฮเปอร์โบลา
- การย้ายแกน กราฟและพืชคณิตของรูปทรงพื้นฐาน

พืชคณิตของพหุนาม

พหุนามเป็นการขยายความคิดจากฟังก์ชันเชิงเส้น โดยพหุนามและสมการพหุนาม มีความยุ่งยาก และซับซ้อนในการหาผลเฉลยมากกว่าปัญหาเชิงเส้น แต่สามารถนำไปประยุกต์ แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้หลากหลายมากขึ้นเช่นกัน

พหุนาม

เราเรียกพจน์ซึ่งอยู่ในรูป

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

โดยที่ $a_n \neq 0$

ว่าพหุนาม (polynomial) ระดับชั้น (degree) n

และเรียก $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$

ซึ่งเป็นค่าคงตัวว่า สัมประสิทธิ์ (coefficients) ของพหุนาม

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

เรียก a_n ว่าสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ x^n

เรียก a_{n-1} ว่าสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ x^{n-1}

•
•
•

เรียก a_1 ว่าสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ x

เรียก a_0 ว่าสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ 1

ตัวอย่าง (quadratic polynomial)

$x^2 + 2x + 1$ เป็นพหุนามระดับชั้น

$x^2 + 2x$ เป็นพหุนามระดับชั้น

$x^2 - 1$ เป็นพหุนามระดับชั้น

$2 + x + x^2$ เป็นพหุนามระดับชั้น

ตัวอย่าง (cubic polynomial)

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ เป็นพหุนามระดับชั้น

$10x + x^3$ เป็นพหุนามระดับชั้น

$x^3 - x^2$ เป็นพหุนามระดับชั้น

ตัวอย่าง (quartic polynomial)

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \quad \text{เป็นพหุนามระดับชั้น}$$

$$x^4 + 2x \quad \text{เป็นพหุนามระดับชั้น}$$

$$x^4 - 1 \quad \text{เป็นพหุนามระดับชั้น}$$

กำหนดให้ $P(x) = 4x^2 - 2x + 5$

จงหาค่า $P(1)$ $P(0.5)$ $P(-2)$ $P(y)$

การเท่ากันของพหุนาม

สองพหุนามใดๆ จะมีค่าเท่ากันก็ต่อเมื่อ มีสัมประสิทธิ์
หน้า x^k เท่ากันทุก $k=1, \dots, n$

ตัวอย่าง

$$2x^3 - 4x^2 + 7x - 10 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$A =$$

$$B =$$

$$C =$$

$$D =$$

ตัวอย่าง

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = x^2 - 4$$

$$A =$$

$$B =$$

$$C =$$

$$D =$$

คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของพหุนาม

1. การคูณด้วยค่าคงตัวใดๆ

$$\alpha (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) =$$
$$(\alpha a_n) x^n + (\alpha a_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_2) x^2 + (\alpha a_1) x + (\alpha a_0)$$

ตัวอย่าง

$$4(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) =$$

ตัวอย่าง

$$(-2)(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) =$$

$$(0)(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) =$$

2. การบวกกันของพหุนาม

ให้ทำการบวกและลบกันเฉพาะสัมประสิทธิ์ที่อยู่หน้า x^k
ตรงกันเท่านั้น

$$\begin{aligned} & (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) - (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= (a_n - b_n) x^n + \cdots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง

$$(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) + (x^4 + 2x^2 - 4x + 1) =$$

$$(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) - (x^3 + 2x^2 - 4x + 1) =$$

แบบฝึกหัด

$$(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) + (4x^2 - 2x + 5) =$$

$$(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) - (4x^2 - 5) =$$

จงหาค่า

$$2(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) - 3(4x^2 - 5) =$$

การคูณกันของพหุนาม

การคูณกันของพหุนามให้ทำการคูณกระจายเหมือน

การคูณตัวเลขทั่วไป

$$(x + 1)(1 + x) =$$

$$(2x + 1)(2 + x) =$$

$$(2 + x)(2x + 1) =$$

กำหนดให้ $P(x)$ และ $R(x)$ เป็นพหุนาม

สังเกตได้ว่าการคูณกันของพหุนาม มีคุณสมบัติสลับที่

$$P(x)R(x) = R(x)P(x)$$

$$(x-1)(1+x+x^2) =$$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) =$$

แบบฝึกหัด

จงหาค่า $P(x)R(x)$ เมื่อ

$$P(x) = 4x - 5$$

$$R(x) = 3x^3 - x^2 + 4x - 6$$

การยกกำลังของพหุนาม

$$[P(x)]^n = \underbrace{P(x) \cdot P(x) \cdots P(x)}_{n\text{-times}}$$

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1) =$$

$$(x+1)^3 =$$

$$(x + 1)^8 =$$

สามเหลี่ยมปาสคาล (Pascal Triangle)

1

$$(x + y)^0 =$$

$$(x + y)^1 =$$

$$(x + y)^2 =$$

$$(x + y)^3 =$$

$$(x + 2)^4 =$$

$$(x - 2)^4 =$$

ถ้า $x^2 + 5x + 6 = (x + A)(x + B)$

จงหาค่า A และ B

การหารพหุนาม

การหารพหุนาม ทำได้โดยการหารยาว ซึ่งในการหารนี้เราจะได้ ผลหาร (quotient) และ เศษเหลือ (remainder)

จงหาผลหารและเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการ

หารพหุนาม $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 5x - 6$ ด้วย

$$x^2 + x - 2$$

จงหาผลหารและเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการ

หารพหุนาม $P(x) = x^3 - 1$ ด้วย $x - 1$

พหุนาม = ตัวหาร x ผลหาร + เศษเหลือ

ถ้าเศษเหลือมีค่าเป็น 0

พหุนาม = ตัวหาร x ผลหาร

↑ ↑
ตัวประกอบ (factor)

$$x^3 - x^2 + x + 1 = (x - 1)(x^2 + 1) + 2$$

เศษเหลือ (remainder) คือ 2

$$x^3 - x^2 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + 1) - 1$$

เศษเหลือ (remainder) คือ -1

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$$

ตัวประกอบ (factor)

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

↑ ↗
ตัวประกอบของ $x^2 + 5x + 6$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$$

↗
ตัวประกอบของ $x^2 + 2x + 1$

ทฤษฎีบท เศษเหลือจากการหารพหุนาม

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ด้วย $x - a$ คือ $P(a)$

ตัวอย่าง

จงหาเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม

$$P(x) = x^3 - 1 \quad \text{ด้วย} \quad x - 1$$

ตัวอย่าง

จงหาเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม

$$P(x) = x^3 - 1 \quad \text{ด้วย} \quad x + 1$$

ตัวอย่าง

จงหาเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 9 \quad \text{ด้วย } x + 2$$

แบบฝึกหัด

จงหาค่า a เมื่อเศษเหลือจากการหารพหุนาม

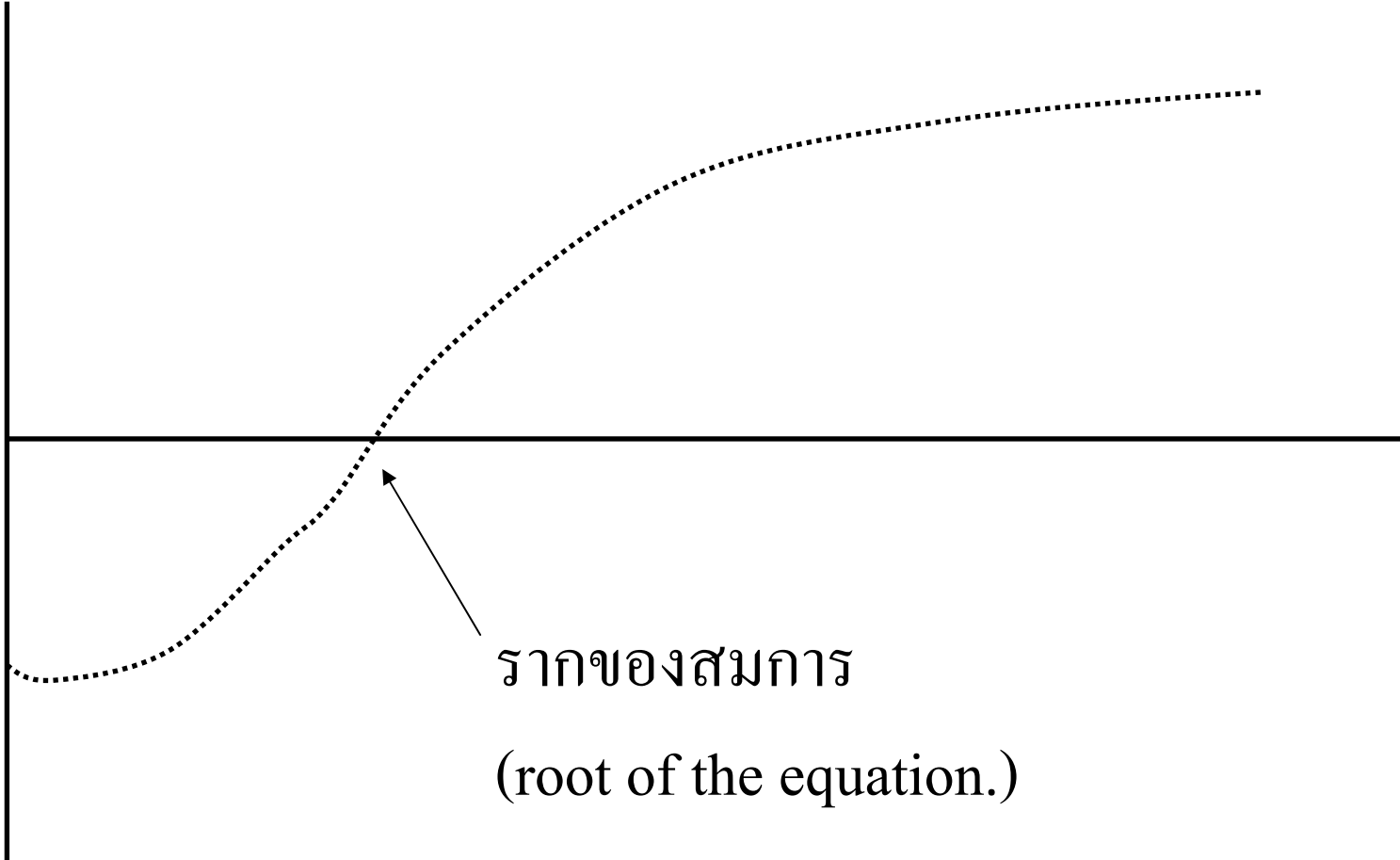
$$2x^3 + x^2 + a \text{ ด้วย } x + 2 \text{ คือ } -9$$

สมการพหุนาม

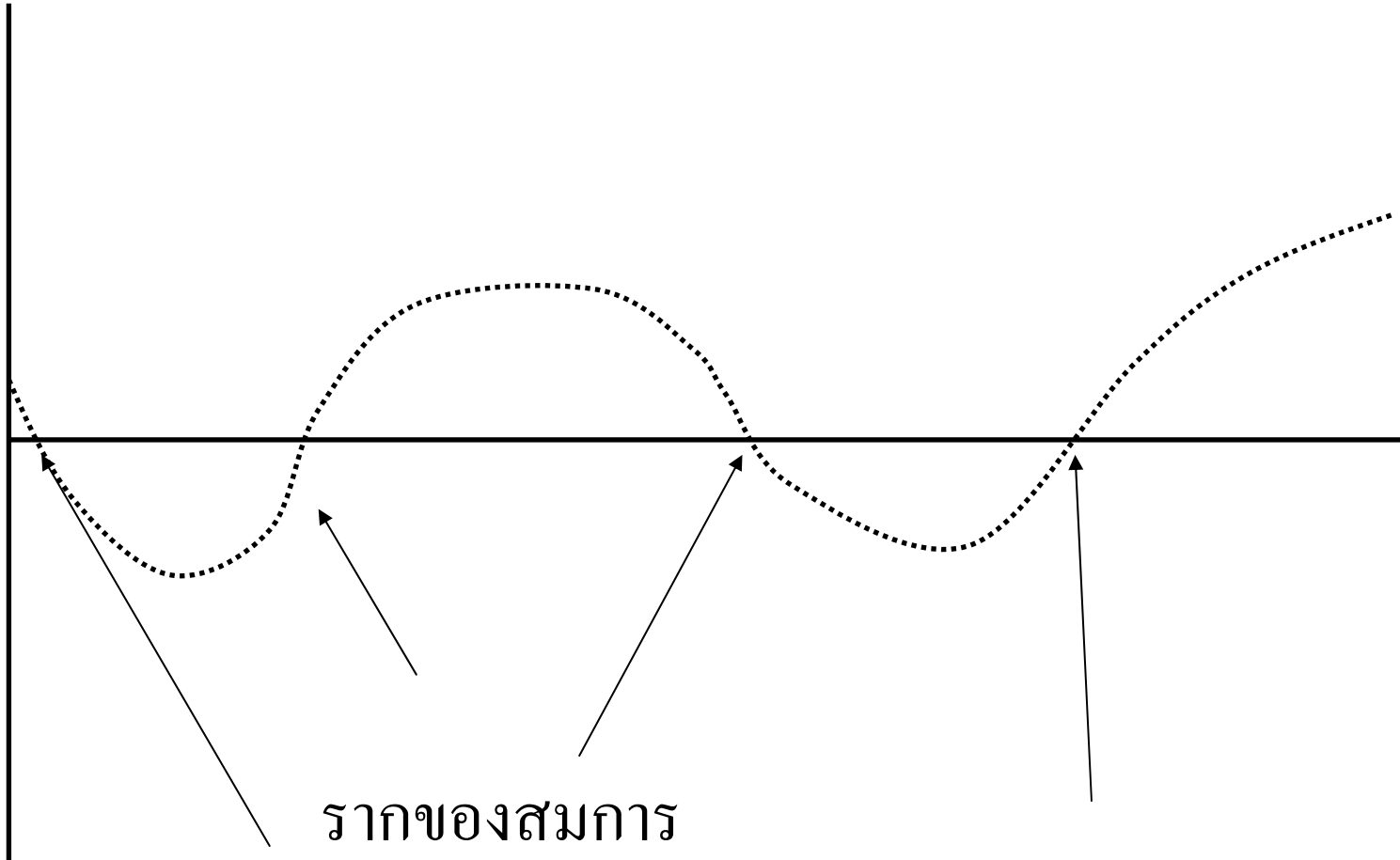
สมการพหุนามคือสมการที่อยู่ในรูป

$$P(x) = 0 \quad \text{หรือ} \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$



$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$



รากของสมการ

(roots of the equation.)

รากของสมการพหุนาม

รากของสมการพหุนาม (roots of the equation)

คือ ค่า x_0 ที่ทำให้สมการพหุนามมีค่าเท่ากับ 0

$$P(x_0) = 0 \quad \text{หรือ}$$

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0$$

ตัวอย่าง

$x^3 - 1 = 0$ มีรากของสมการคือ $x =$

$x^2 + 5x + 6 = 0$ มีรากของสมการคือ

$(x + 1)^{10} = 0$ มีรากของสมการคือ

$x^2 + 1 = 0$ มีรากของสมการคือ

ถ้าพหุนาม $a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$

สามารถแยกตัวประกอบ (factor) ได้เป็น

$$a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = (x - a)R(x)$$

a จะเป็นรากของสมการพหุนาม

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0$$

ตัวอย่าง

$$x^3 - 1 = (\quad) (\quad)$$

รากของสมการพหุนาม $x^3 - 1 = 0$ คือ

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

รากของสมการพหุนาม $x^2 + 5x + 6 = 0$ คือ

วิธีการหารากของสมการพหุนามระดับชั้นสอง

Method for finding roots of quadratic equations

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$1. \quad b^2 - 4ac > 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

มีสองรากที่แตกต่างกันคือ

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2. \quad b^2 - 4ac = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

มีเพียงรากเดียว คือ

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$3. \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

หาผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงไม่ได้

จงหารากของสมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$

จงหารากของสมการ $x^2 - 5x + 7 = 0$

จงหารากของสมการ $4x^2 + 4x + 1 = 0$

ถ้าพหุนามสามารถแยกตัวประกอบ (factor) ได้
เราก็จะได้รากของสมการ และในทางกลับกัน ถ้า
ได้รากของสมการพหุนาม เราก็จะสามารถแยก
ตัวประกอบได้

$x^2 - 5x + 6 = 0$ มีรากคือ

ดังนั้นพหุนาม $x^2 - 5x + 6$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$x^2 + 5x + 6 = 0$ มีรากคือ

ดังนั้นพหุนาม $x^2 + 5x + 6$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{มีรากคือ } 1$$

ดังนั้นพหุนาม $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{มีรากคือ } -1$$

ดังนั้นพหุนาม $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

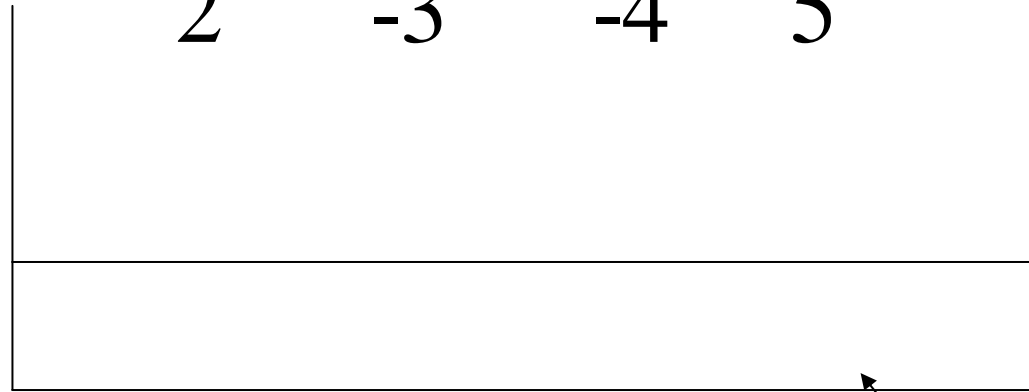
หารสังเคราะห์ (synthetic division)

หารสังเคราะห์เป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยในการแยกตัวประกอบของพหุนาม โดยใช้เพียงแค่สัมประสิทธิ์หน้า x^n เท่านั้นมาทำการคำนวณ

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = 0 \text{ ด้วย } x - 1$$

1 2 -3 -4 5



เศษเหลือ

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{ด้วย } x - 1$$

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

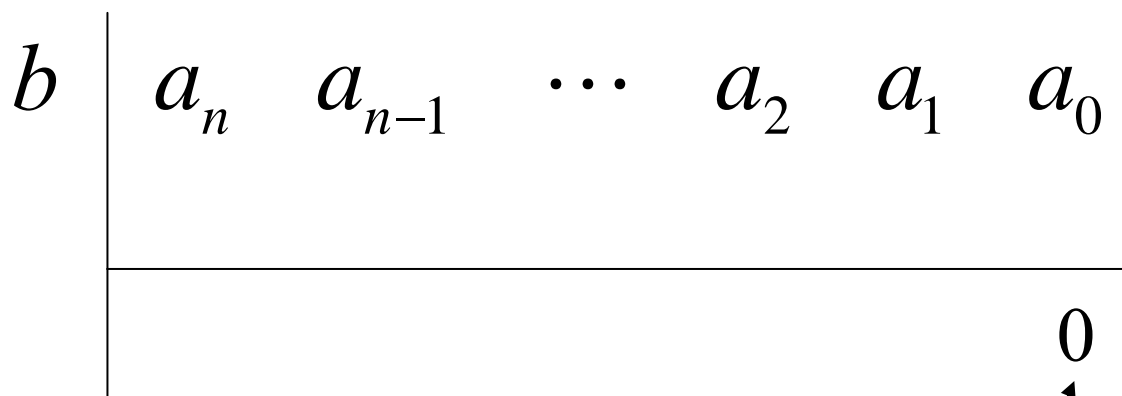
$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{ด้วย } x + 1$$

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$$x^3 - 1 = 0 \quad \text{ด้วย } x - 1$$

การประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบ

พหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$



B เป็นค่าที่ได้จาก

เศษเหลือต้องเป็น 0

ตัวประกอบของ a_0 หารด้วยตัวประกอบของ a_n

จงประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบ

พหุนาม $x^3 - 2x^2 - x + 2$

จงประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบ

พหุนาม $2x^3 - 5x^2 - x + 6$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลหาร และ เศษเหลือที่ได้จากการหารพหุนามต่อไปนี้

1.1 $2x^3 - x^2 - 1$ หารด้วย $x - 1$

1.2 $2x^3 - x^2 - 1$ หารด้วย $x + 1$

1.3 $x^5 + x - 4$ หารด้วย $x - 1$

1.4 $x^5 + x - 4$ หารด้วย $x + 1$

1.5 $x^5 - 32$ หารด้วย $x + 3$

2. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

2.1 $x^3 - 2x^2 - x + 2$

2.2 $18x^3 - 9x^2 - 5x + 2$

2.3 $x^3 + x^2 - x - 1$

2.4 $x^4 - 25x^2 + 144$

2.5 $x^5 - 32$