

# ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์ เป็นเซตของคู่อันดับ

$$R = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

โดยที่สมาชิกในเซตดังกล่าวมีรูปแบบบางอย่าง

# ตัวอย่าง

ความสัมพันธ์เส้นตรง ที่ผ่านจุด  $(0,0)$  และมีความชันเท่ากับ 1

$$\{(x, y) : y = x\}$$

ความสัมพันธ์พาราโบลาหงายที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด  $(0,0)$

$$\{(x, y) : y = x^2\}$$

## ตัวอย่าง

ความสัมพัทธ์วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(0,0)$  และมีรัศมีเท่ากับ 1

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

ความสัมพัทธ์วงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(0,0)$  และตัดแกน  $x$  ที่จุด  $(a,0)$  และ  $(-a,0)$  และ ตัดแกน  $y$  ที่จุด  $(0,b)$  และ  $(0,-b)$

$$\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

# ตัวอย่าง

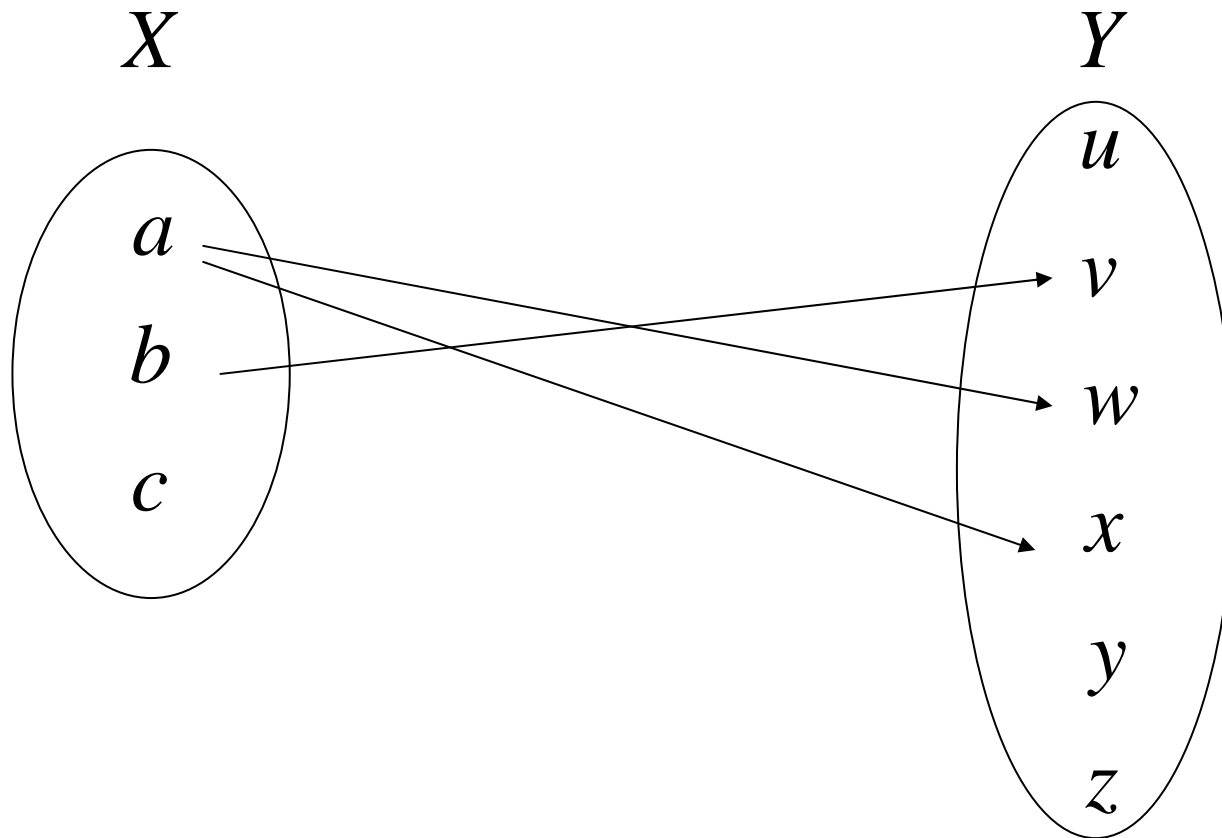
ความสัมพันธ์ระหว่างเวลาที่ใช้โทรศัพท์มือถือ เครือข่าย  
Vodafone  $x$  วินาที และ ค่าใช้จ่าย  $y$

ความสัมพันธ์ระหว่างการเอาใจใส่ต่อเนื้อหาในห้องเรียน  
และคะแนนการสอบ

# ตัวอย่าง

$$X = \{a, b, c\}$$

$$Y = \{u, v, w, x, y, z\}$$

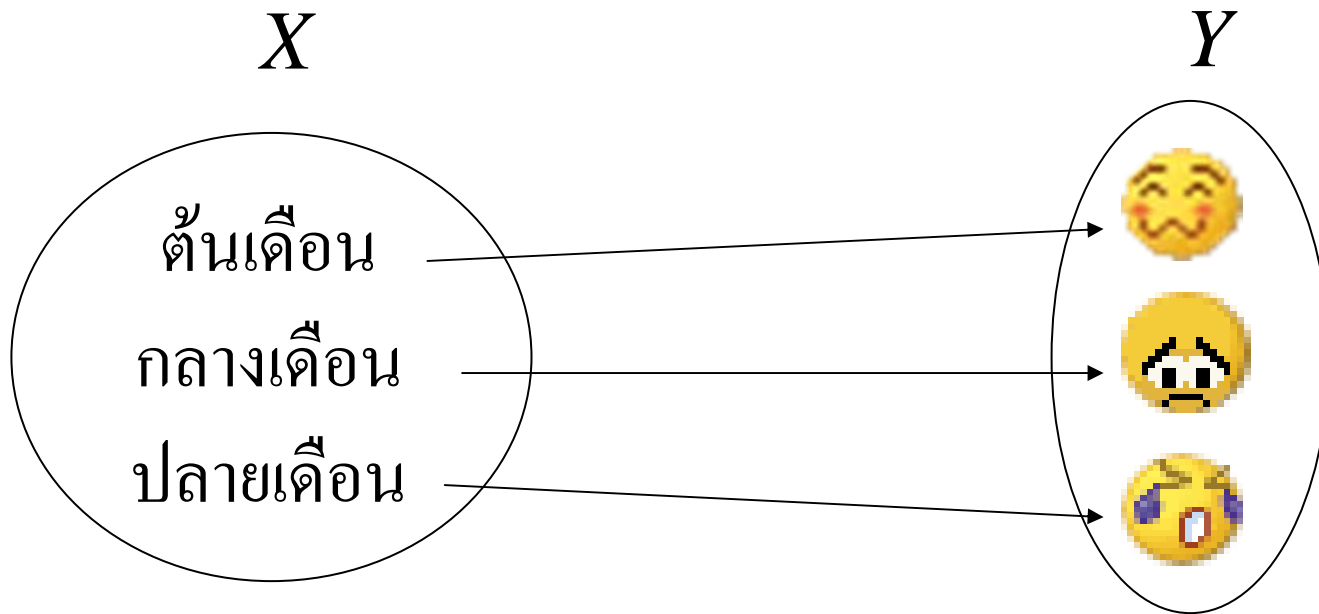


$$R = \{(a, w), (a, x), (b, v)\}$$

# ตัวอย่าง

$X = \{\text{ต้นเดือน, กลางเดือน, ปลายเดือน}\}$

$Y = \{ \text{😊, 😬, 😭} \}$



$R =$

พบว่าในหลายๆ ครั้ง การเขียนความสัมพันธ์ในรูปแบบ  
ของเซต เป็นเรื่องยุ่งยาก สำหรับความสัมพันธ์ใด ที่  
สามารถถูกบรรยายได้ในรูปสมการ หรืออสมการ  
เรายังจะเขียนความสัมพันธ์อย่างย่อ ในรูปแบบของ  
สมการหรืออสมการแทน เช่น

ความสัมพัทธ์เชิงเส้น

$$y = mx + c$$

ความสัมพัทธ์พาราโบลา

$$y - k = m(x - h)^2$$

ความสัมพัทธ์วงกลม

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

ความสัมพัทธ์วงรี

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

ความสัมพัทธ์ไฮเพอร์โบลา

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

ความสัมพัทธ์พหุนาม

$$y = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

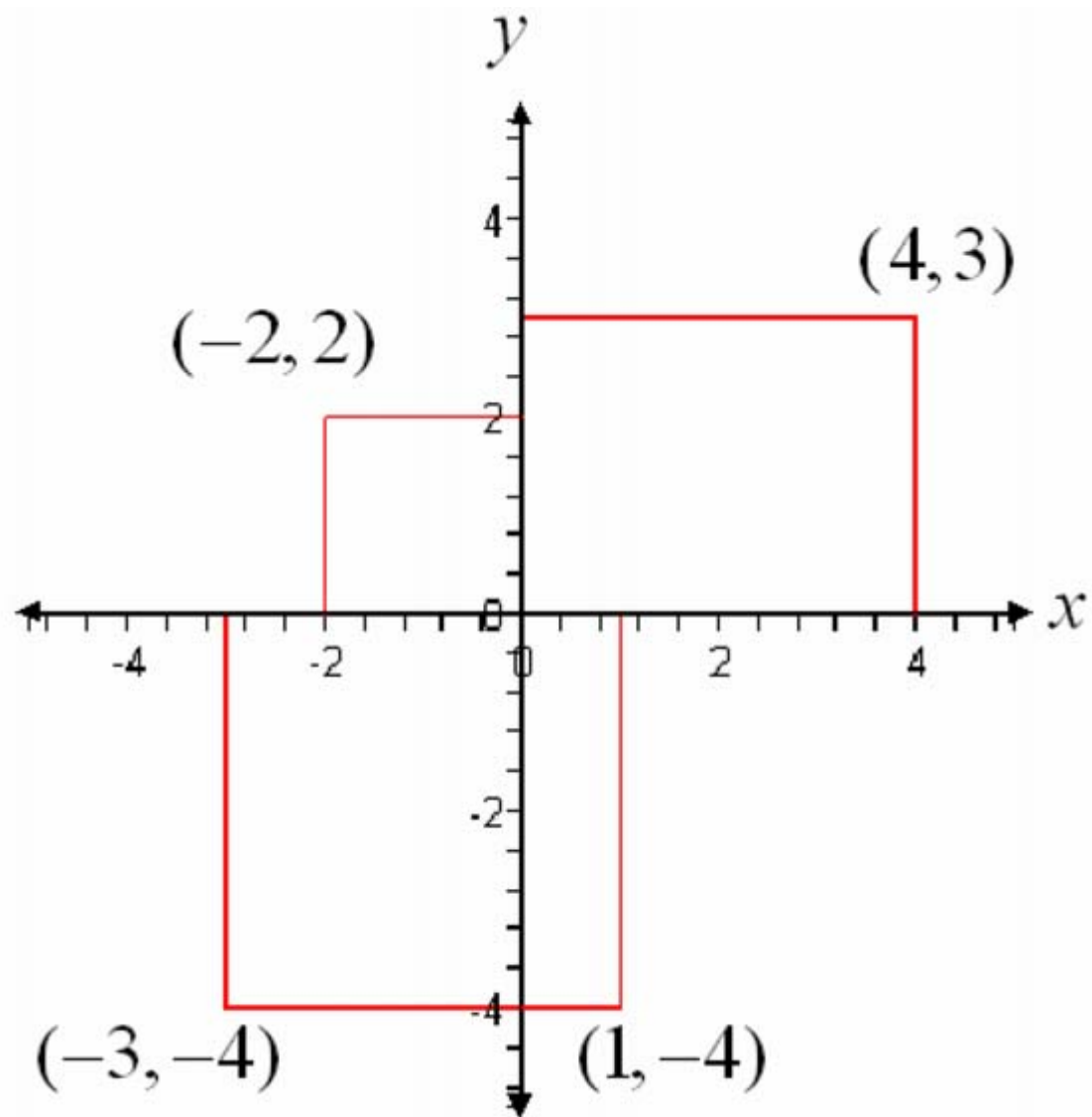


# กราฟของความสัมพันธ์

เราสามารถนำความสัมพันธ์มาเขียนเป็นกราฟได้  
โดยเบื้องต้น เราจะพิจารณากราฟในพิกัดฉาก หรือ  
มีอีกชื่อว่าพิกัดคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinates)

# แนวความคิดของระบบพิกัดฉาก

เมื่อก้าวถึงพิกัด  $(x,y)$  ถ้า  $x$  เป็นค่าบวกจะหมายถึงจุดซึ่งห่างจากจุดกำเนิด  $(0,0)$  ไปทางขวา เป็นระยะทาง  $|x|$  หน่วย แต่ถ้า  $x$  เป็นค่าลบ พิกัดดังกล่าวจะหมายถึง จุดซึ่งห่างจากจุดกำเนิดไปทางซ้ายเป็นระยะทาง  $|x|$  หน่วย และถ้า  $y$  มีค่าเป็นบวก จุดนั้นจะอยู่เหนือจากเส้นตรงแนวนอนซึ่งผ่านจุด  $(0,0)$  เป็นระยะ  $|y|$  หน่วย และ ถ้า  $y$  มีค่าเป็นลบ จุดที่กล่าวถึงจะอยู่ต่ำกว่าเส้นดังกล่าว เป็นระยะ  $|y|$  หน่วย



ระบบพิกัดฉาก

# กราฟความชันพจน์ที่น่าสนใจ

## 1. ความชันพจน์เชิงเส้น

$$y = mx + c$$

$m$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

เรียก  $m$  ว่า ความชัน (slope) ของเส้นตรงที่เกิดจาก  
ความชันพจน์เชิงเส้น

และเรียก  $c$  ว่าจุดตัดแกน  $y$  ของเส้นตรงที่เกิดจาก  
ความชันพจน์เชิงเส้น

# การร่างกราฟ

$$y = x$$

# การร่างกราฟ

$$y = 2x$$

# การร่างกราฟ

$$y = \frac{1}{2}x$$

# การร่างกราฟ

$$y = -x$$



# การร่างกราฟ

$$y = -2x$$

# การร่างกราฟ

$$y = x + 1$$

ตัดแกน  $y$  ถ้า  $x=?$   
ตัดแกน  $x$  ถ้า  $y=?$

# การร่างกราฟ

$$y = x + 2$$

ตัดแกน  $y$  ถ้า  $x=?$   
ตัดแกน  $x$  ถ้า  $y=?$

# การร่างกราฟ

$$y = x - 1$$

ตัดแกน  $y$  ถ้า  $x=?$   
ตัดแกน  $x$  ถ้า  $y=?$

# การร่างกราฟ

$$y = 2x - 1$$

ตัดแกน  $y$  ถ้า  $x=?$   
ตัดแกน  $x$  ถ้า  $y=?$

ตัวอย่าง ถ้า  $y = mx + c$  เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้น  
โดยพบว่าจุด (1,1) และ จุด (2,4) เป็นจุดบนความสัมพันธ์  
ดังกล่าวด้วย จงหาความชันของเส้นตรงที่เกิดจากความ  
สัมพันธ์เชิงเส้นดังกล่าว และจุดตัดแกน  $x$  และแกน  $y$

สังเกตว่าบนเส้นตรงเดียวกัน ความชันจะมีค่าเท่ากันเสมอ  
ดังนั้น ถ้าทราบจุด 2 จุดใดๆ บนเส้นตรง เราสามารถหา  
ความชันได้โดย

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(1,1)$

และจุด  $(3,0)$  พร้อมร่างกราฟของความชันดังกล่าว



จงร่างกราฟของความสัมพันธ์เชิงเส้น  $y=-2$  พร้อมบอก  
ความชันของเส้นตรงดังกล่าว

จงร่างกราฟของความสัมพันธ์เชิงเส้น  $x=1$  พร้อมบอก  
ความชันของเส้นตรงดังกล่าว

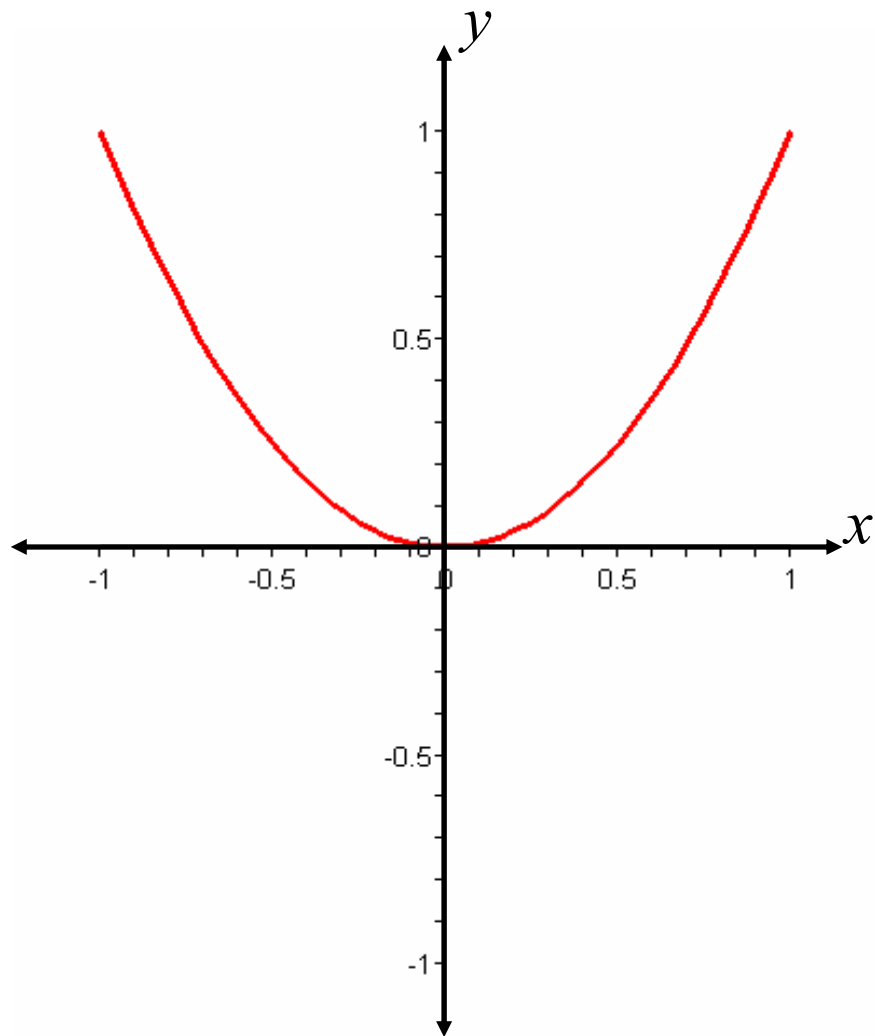
## 2. ความสัมพันธ์พาราโบลา (parabola)

$$y - k = m(x - h)^2$$

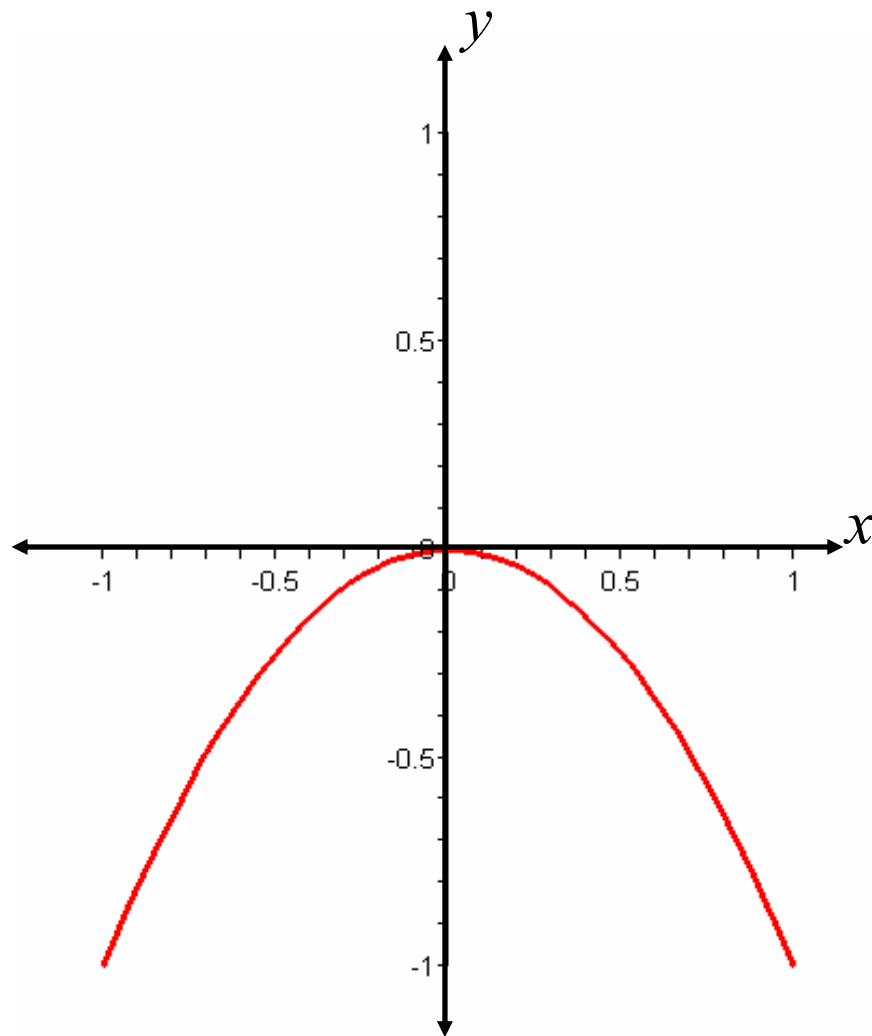
หรือ

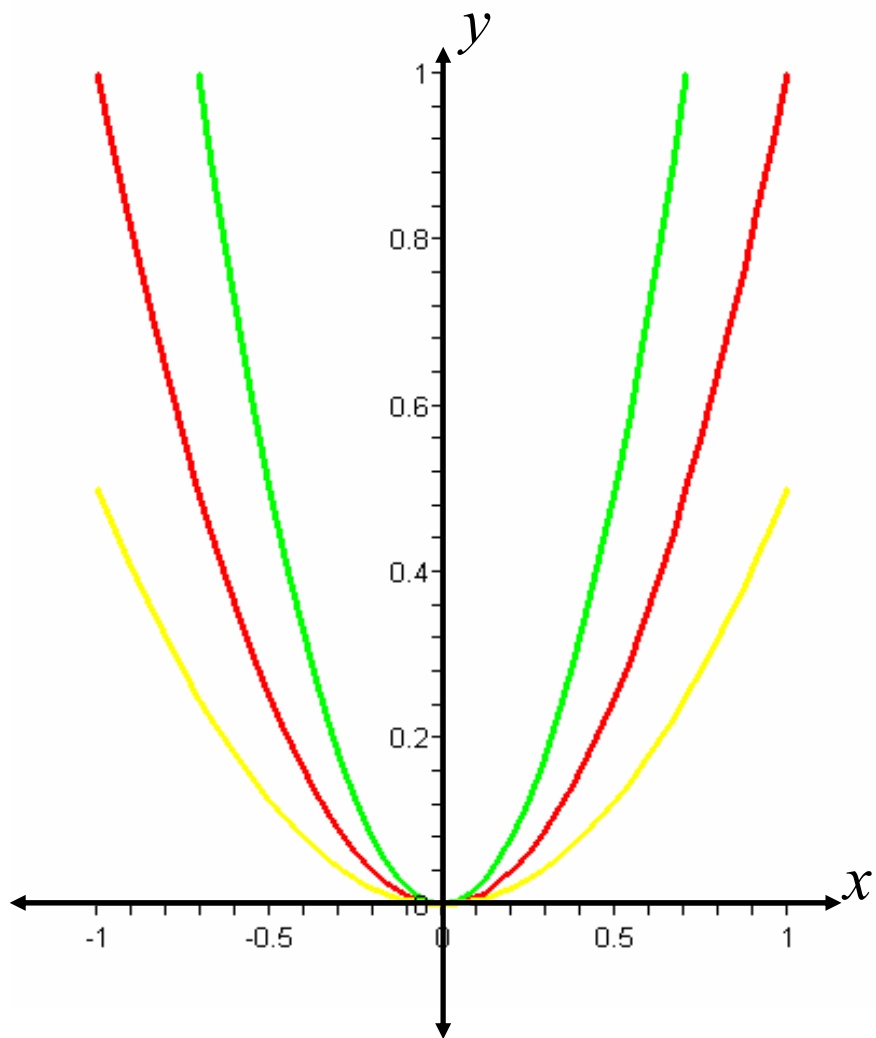
$$x - h = m(y - k)^2$$

$$y = +mx^2$$



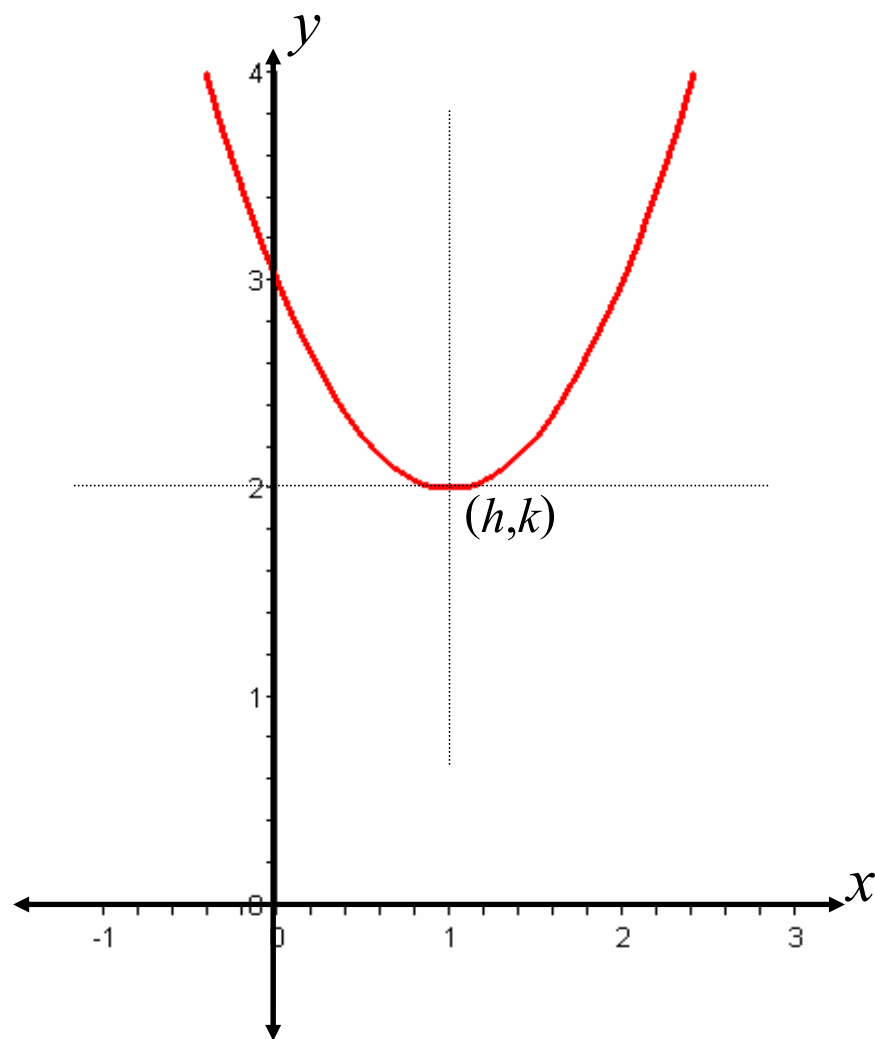
$$y = -mx^2$$



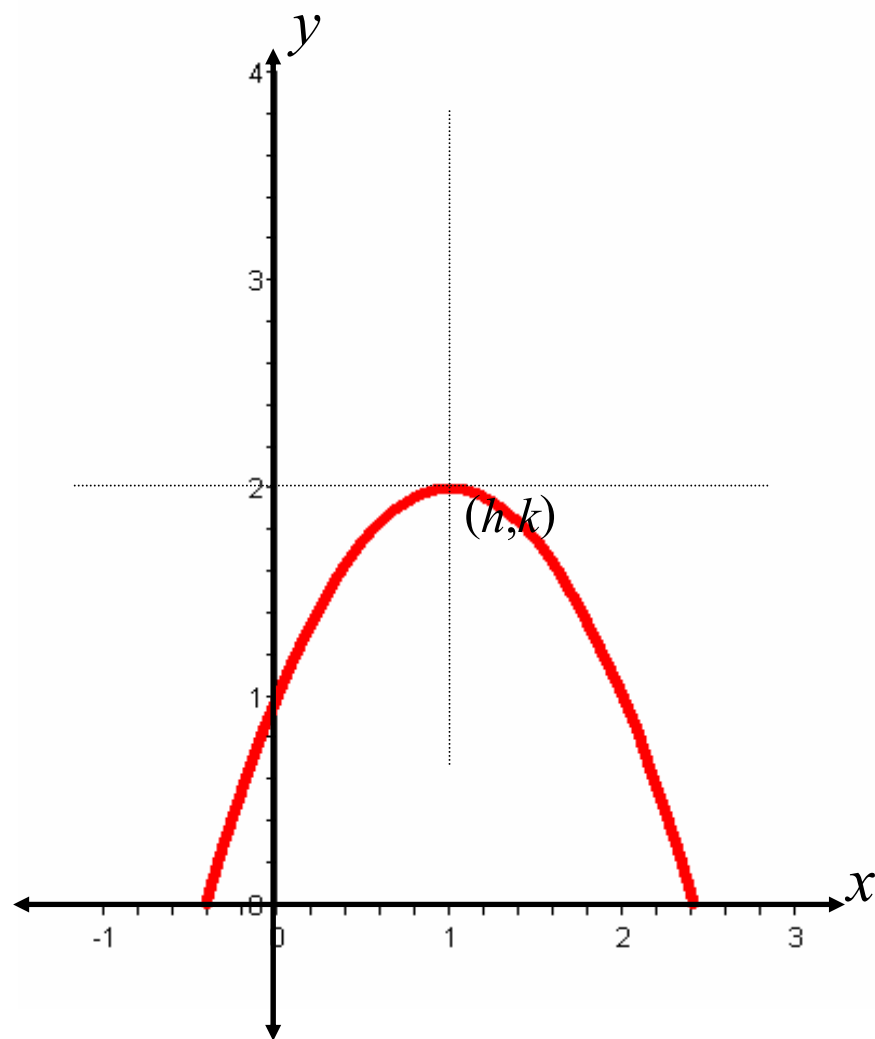


$$y = x^2$$
$$y = 2x^2$$
$$y = \frac{1}{2}x^2$$

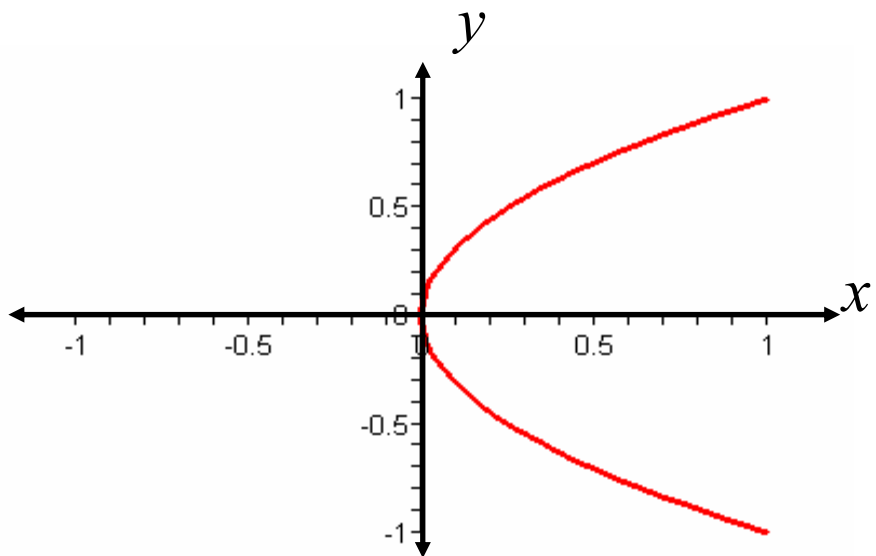
$$y - k = +m(x - h)^2$$



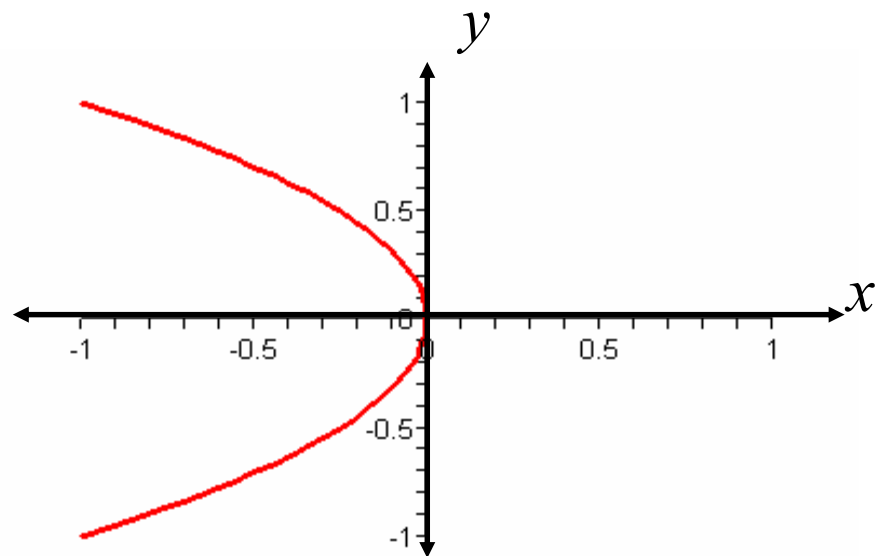
$$y - k = -m(x - h)^2$$



$$x = +my^2$$



$$x = -my^2$$

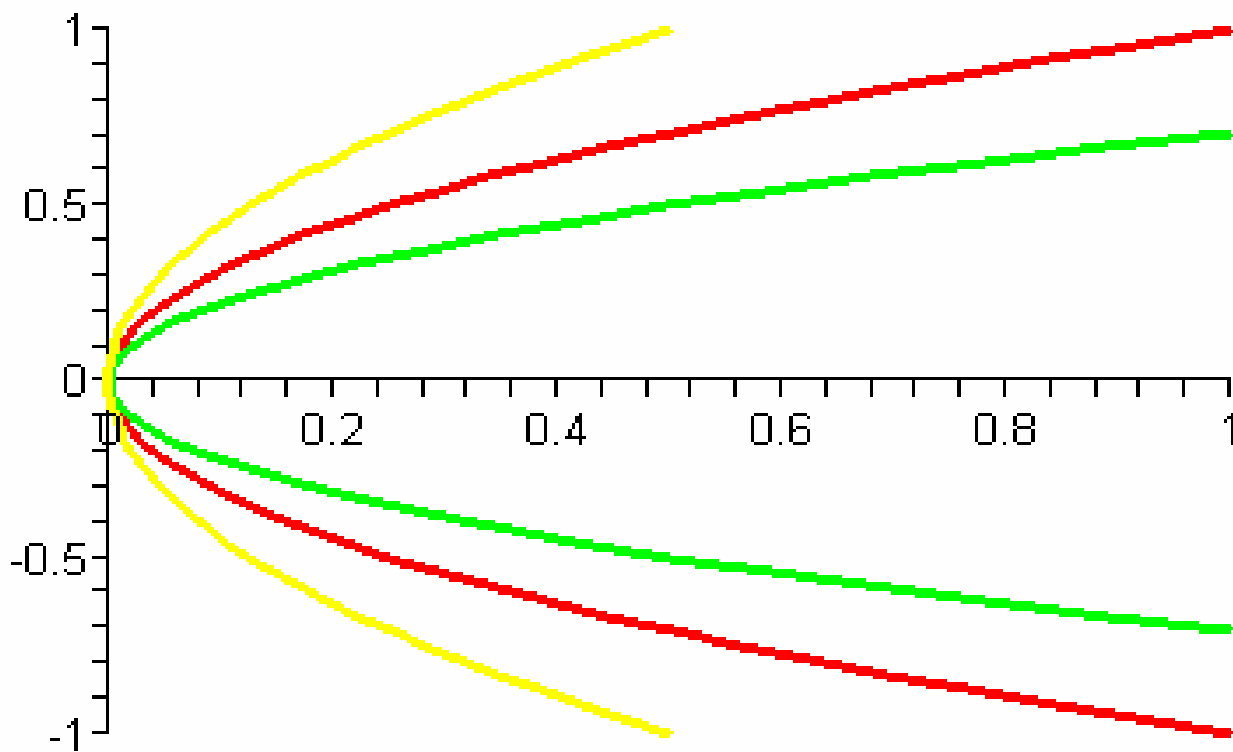




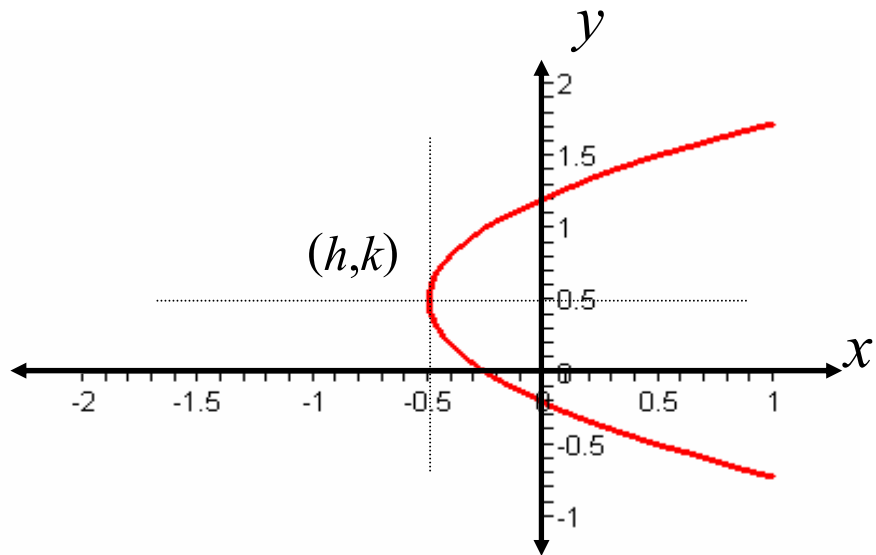
$$x = y^2$$

$$x = 2y^2$$

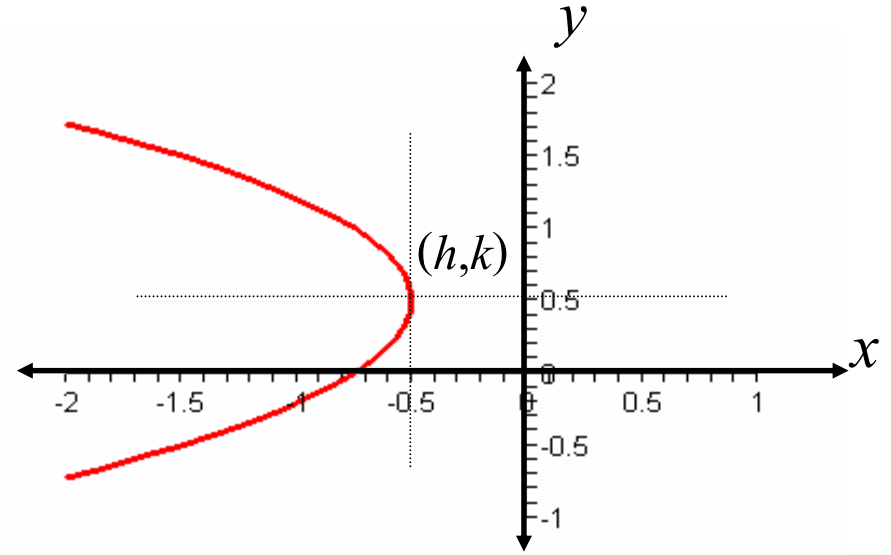
$$x = \frac{1}{2}y^2$$



$$x - h = +m(y - k)^2$$



$$x - h = -m(y - k)^2$$

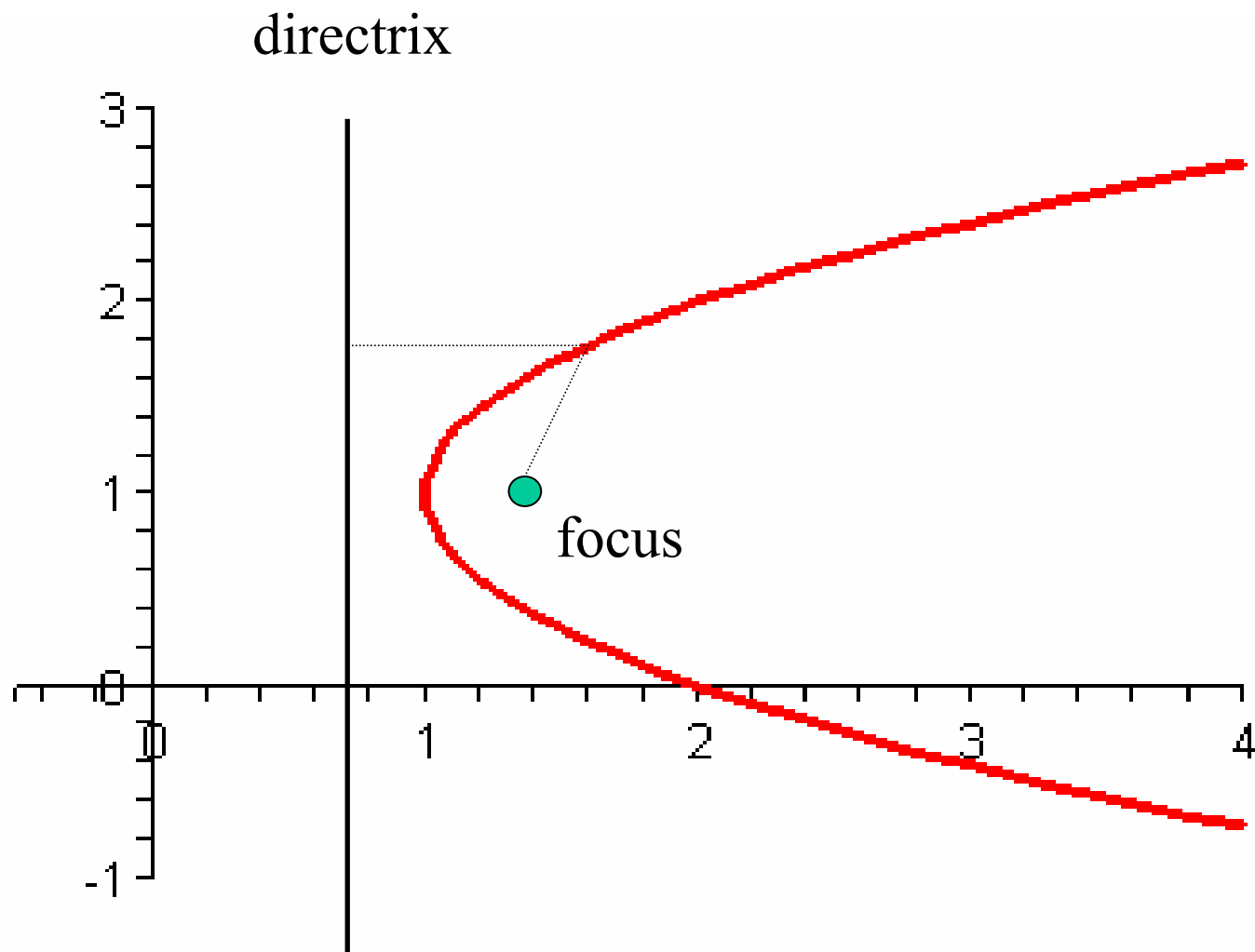


จงร่างกราฟของความสัมพันธ์พาราโบลา

$$y = 2 - (x - 1)^2$$

พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน  $x$  และ แกน  $y$

# ความหมายในเชิงเรขาคณิตของพาราโบลา



### 3. ความสัมพันธ์วงกลม (circle)

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$h$  และ  $k$  เป็นจำนวนจริงใดๆ

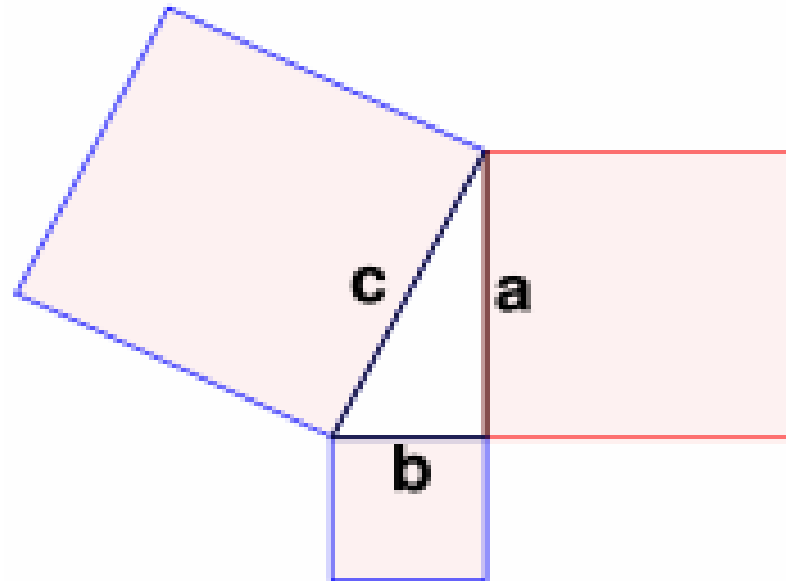
$r$  เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

วงกลมคือเซตของจุดใดๆ ที่มีระยะห่างจากจุดที่  
กำหนดเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ

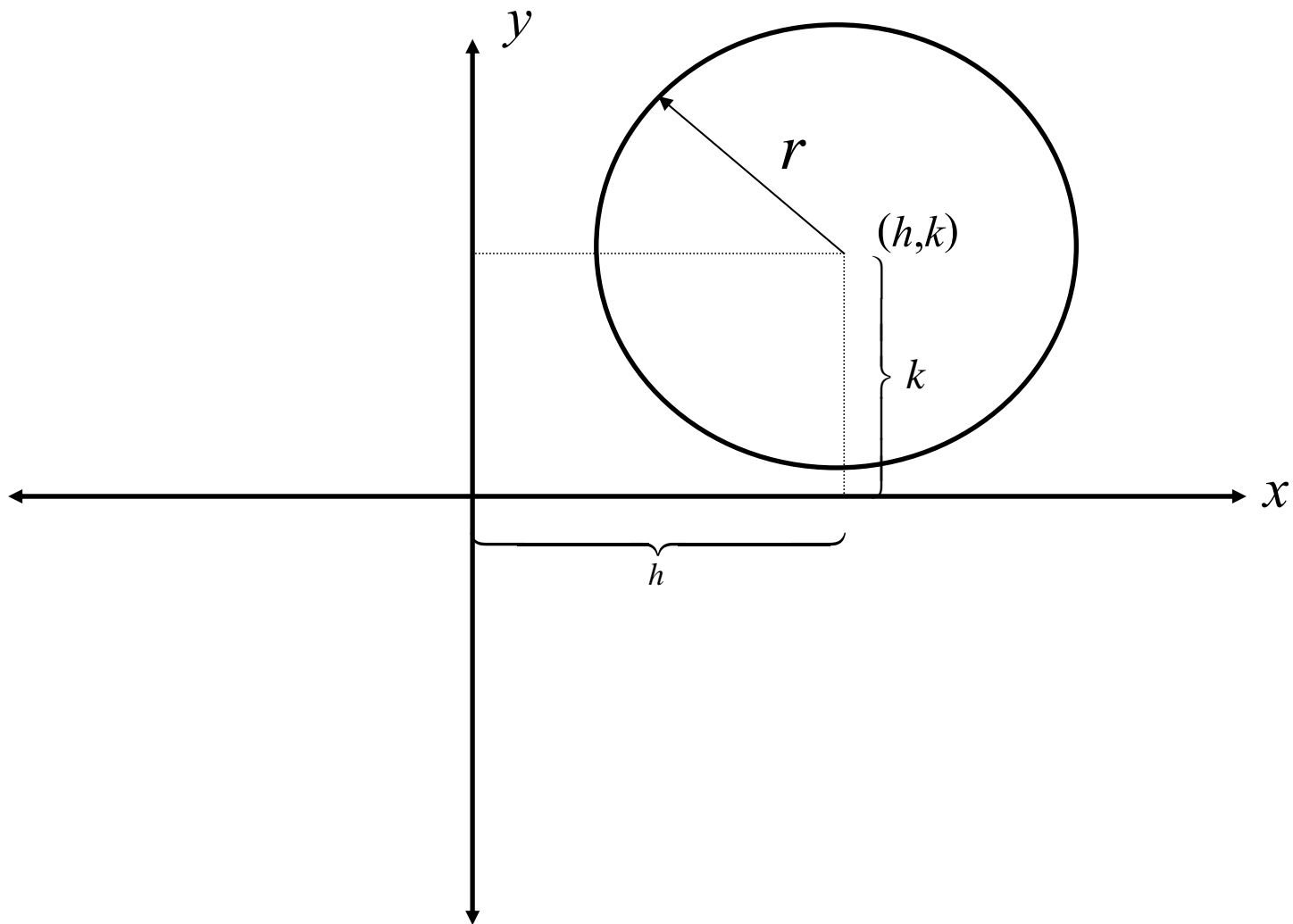
สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และมีรัศมี  $r$  หน่วย

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ที่มาของสมการ



$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$



$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$



$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$$

$$(x + 3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - 9 = 0$$

วงกลม  $(x-1)^2 + y^2 = 1$

ตัดแกน  $x$  และ แกน  $y$  ที่จุดใด

#### 4. ความสัมพันธ์วงรี (ellipse)

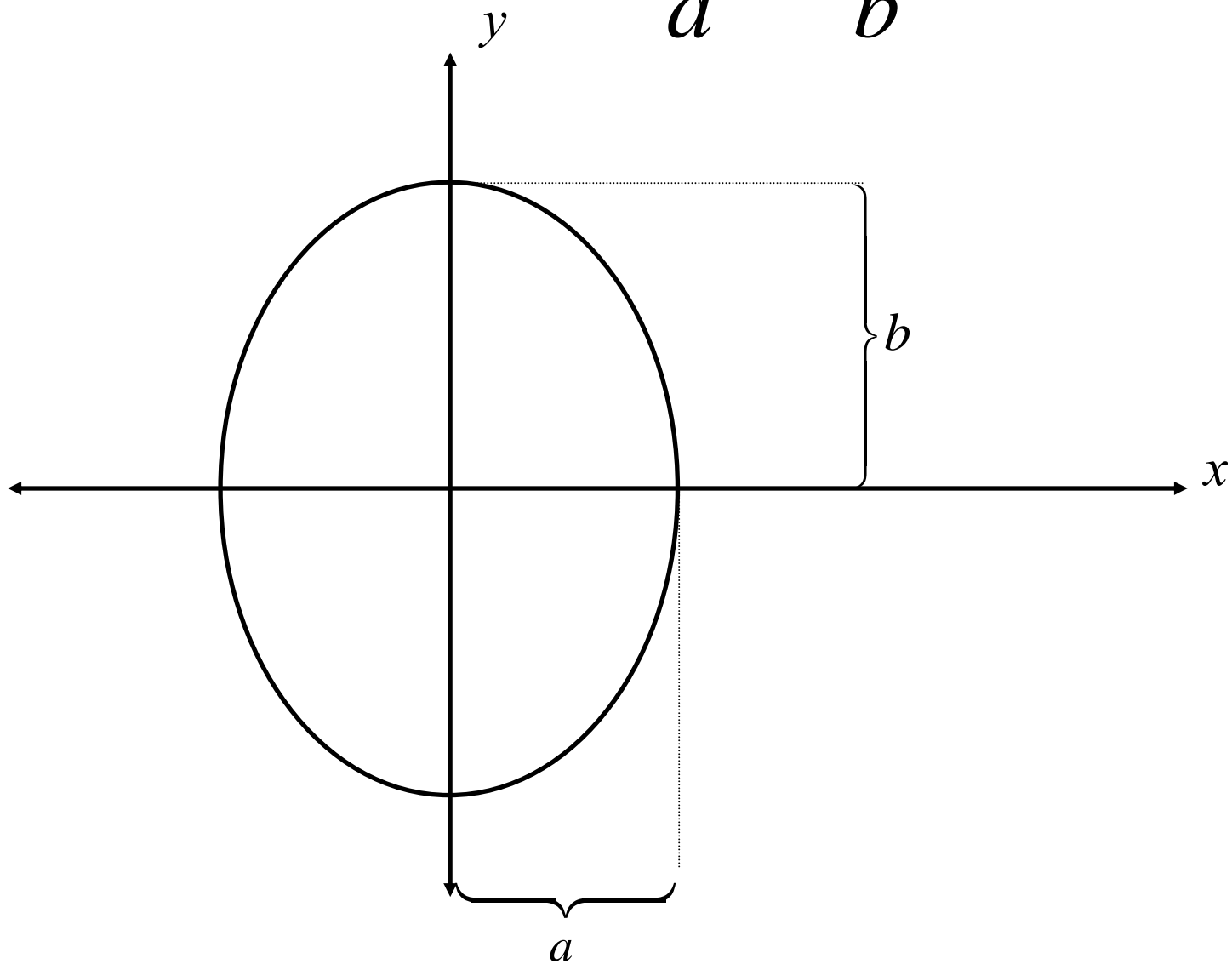
$$a(x-h)^2 + b(y-k)^2 = r^2$$

(ถ้า  $a=b$  ก็ความสัมพันธ์วงรีก็จะกลายเป็นความสัมพันธ์วงกลม)

โดยทั่วไปมักเขียนความสัมพันธ์วงรีในรูป

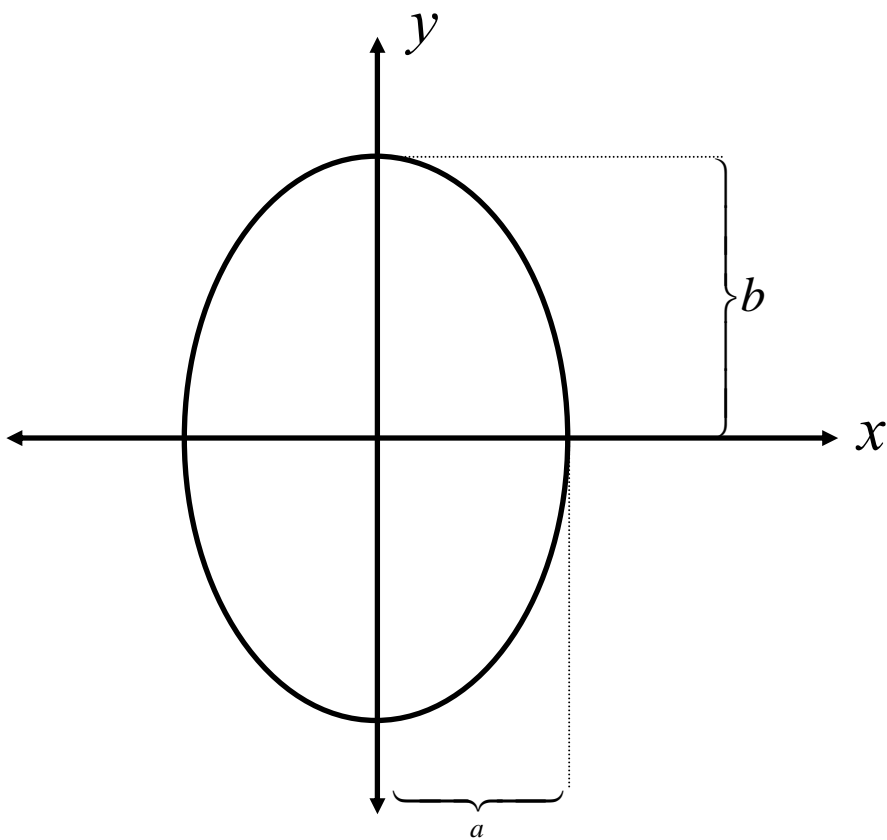
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

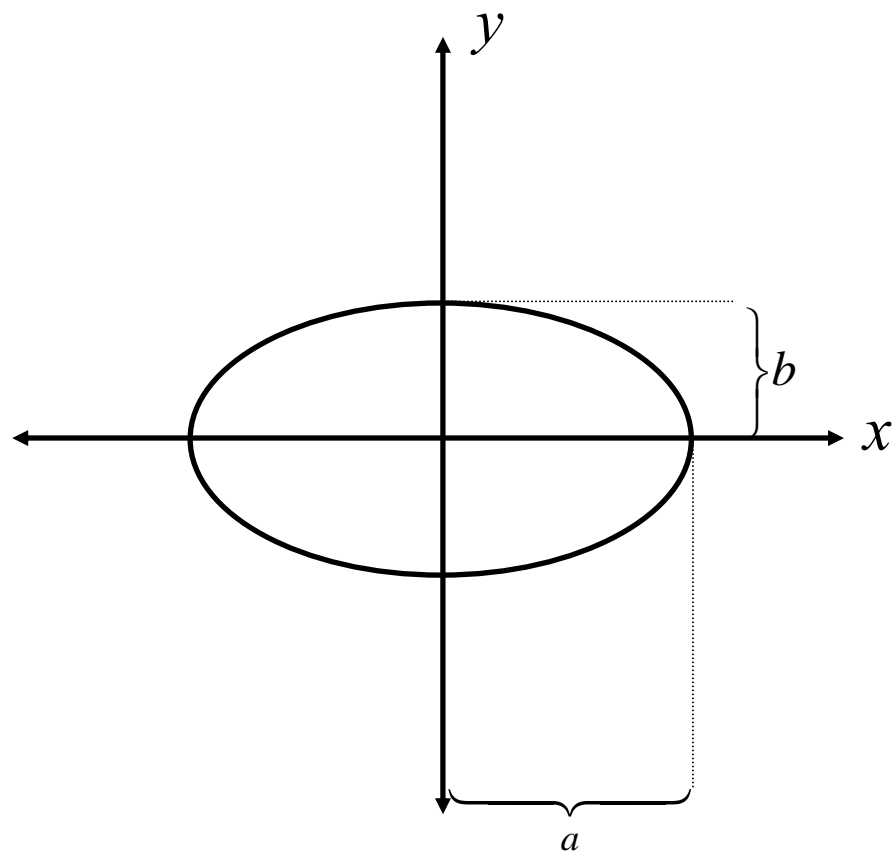


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

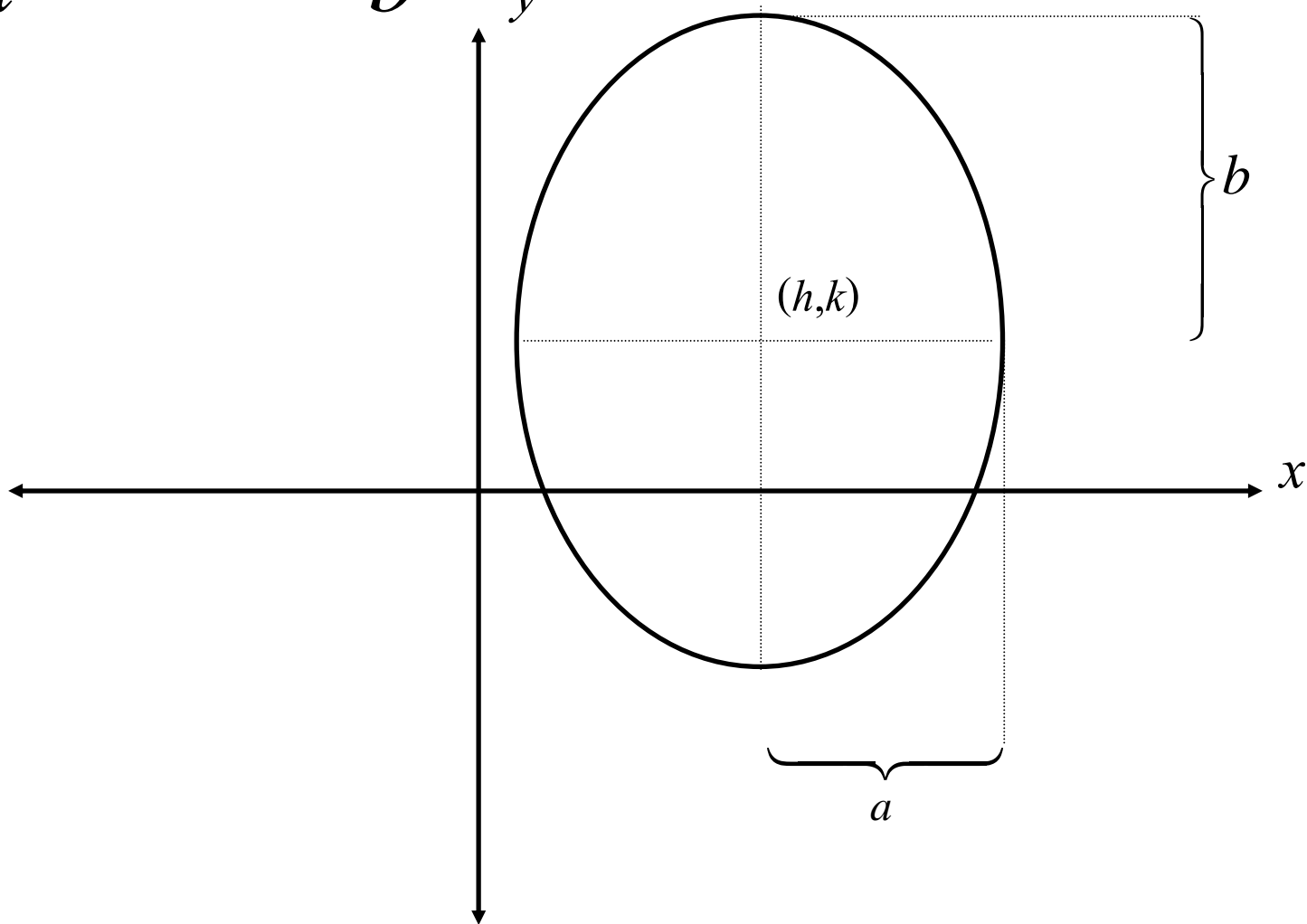
$a < b$



$b < a$



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



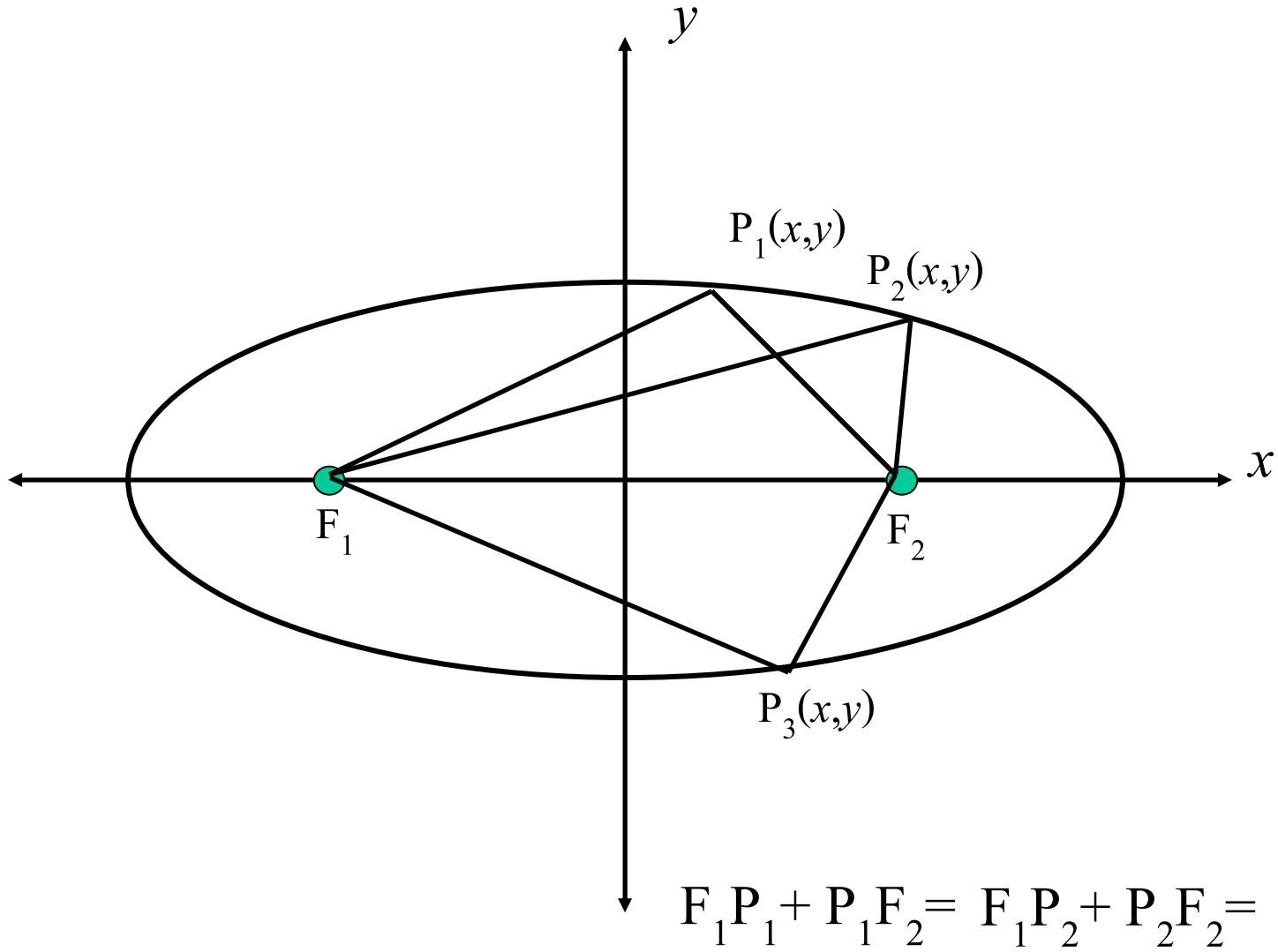
จงร่างกราฟของความสัมพัทธ์วงรี

$$9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 36$$

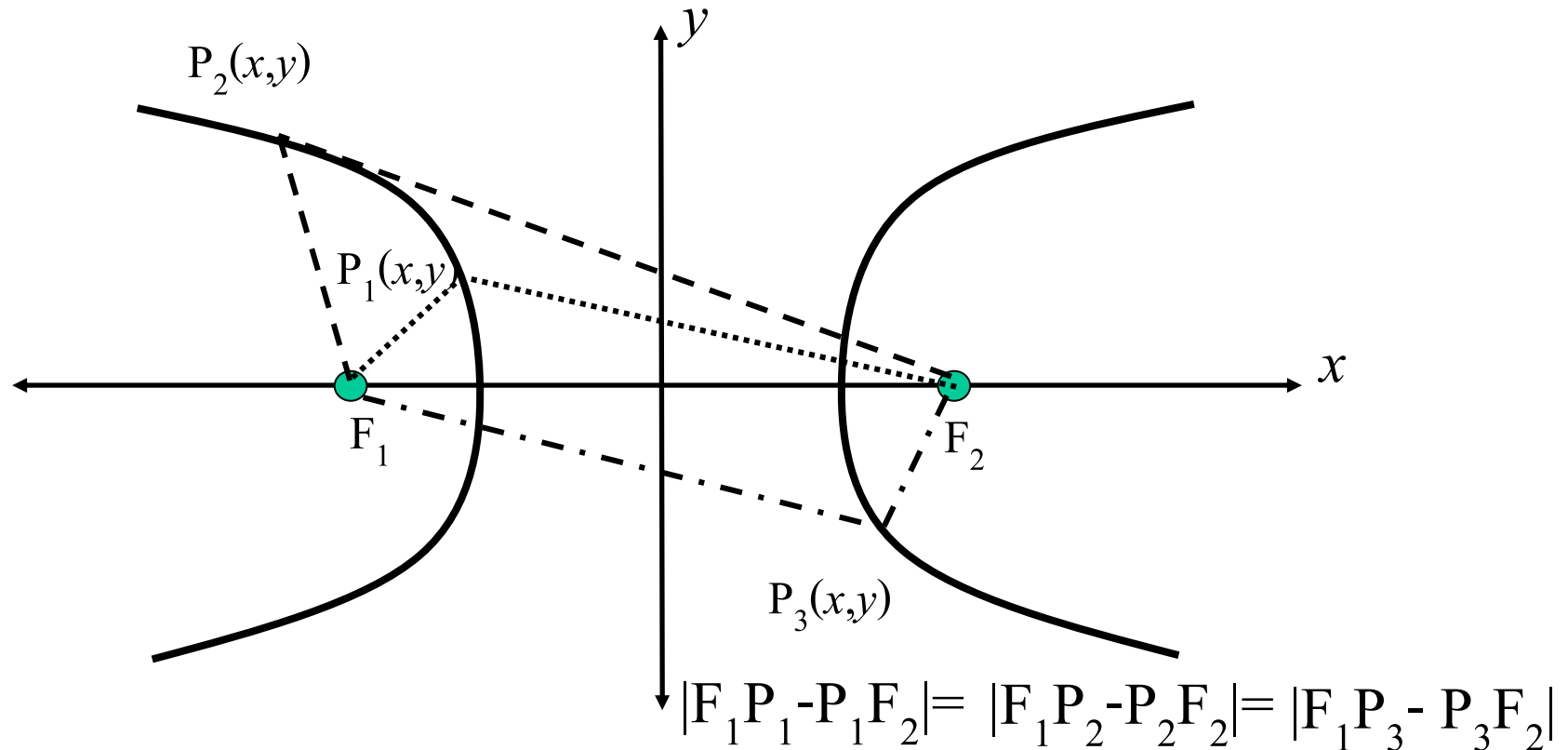
พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน  $x$  และ แกน  $y$

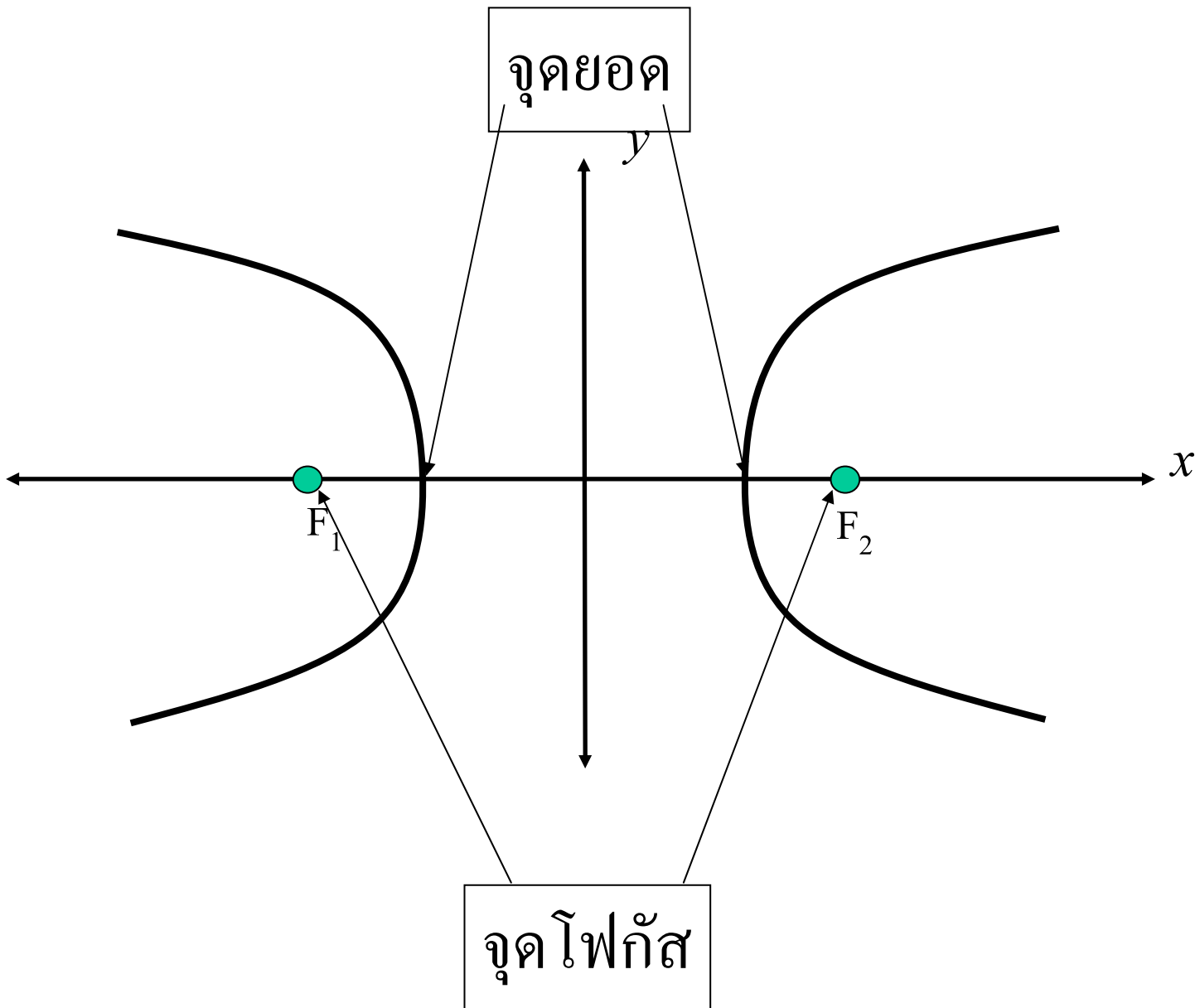


# ความหมายในเชิงเรขาคณิตของวงรี

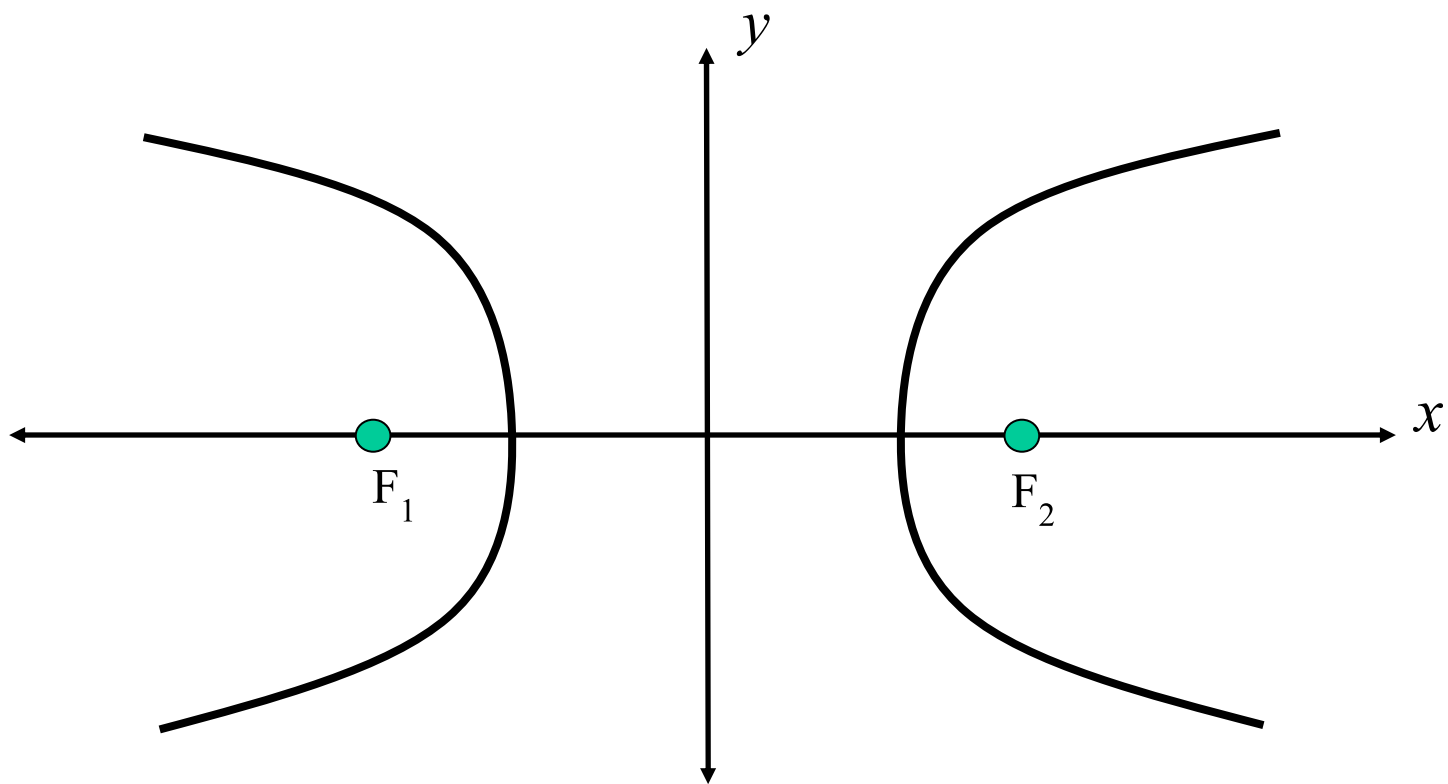


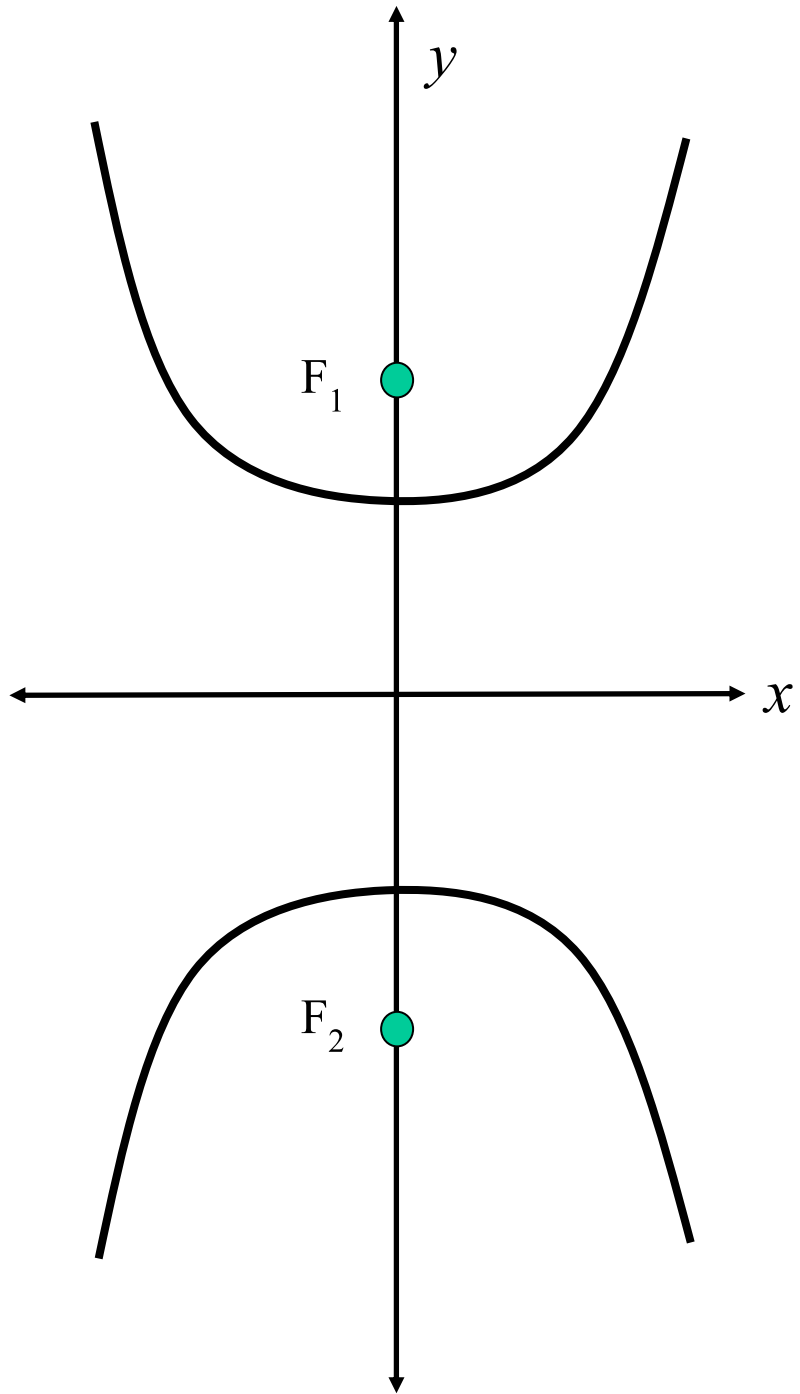
ไฮเปอร์โบลา คือเซตของจุดใดๆ ที่มีผลต่างของระยะห่างจากจุดตั้งกล่าวไปยังจุดที่กำหนดสองจุด เท่ากันเสมอ



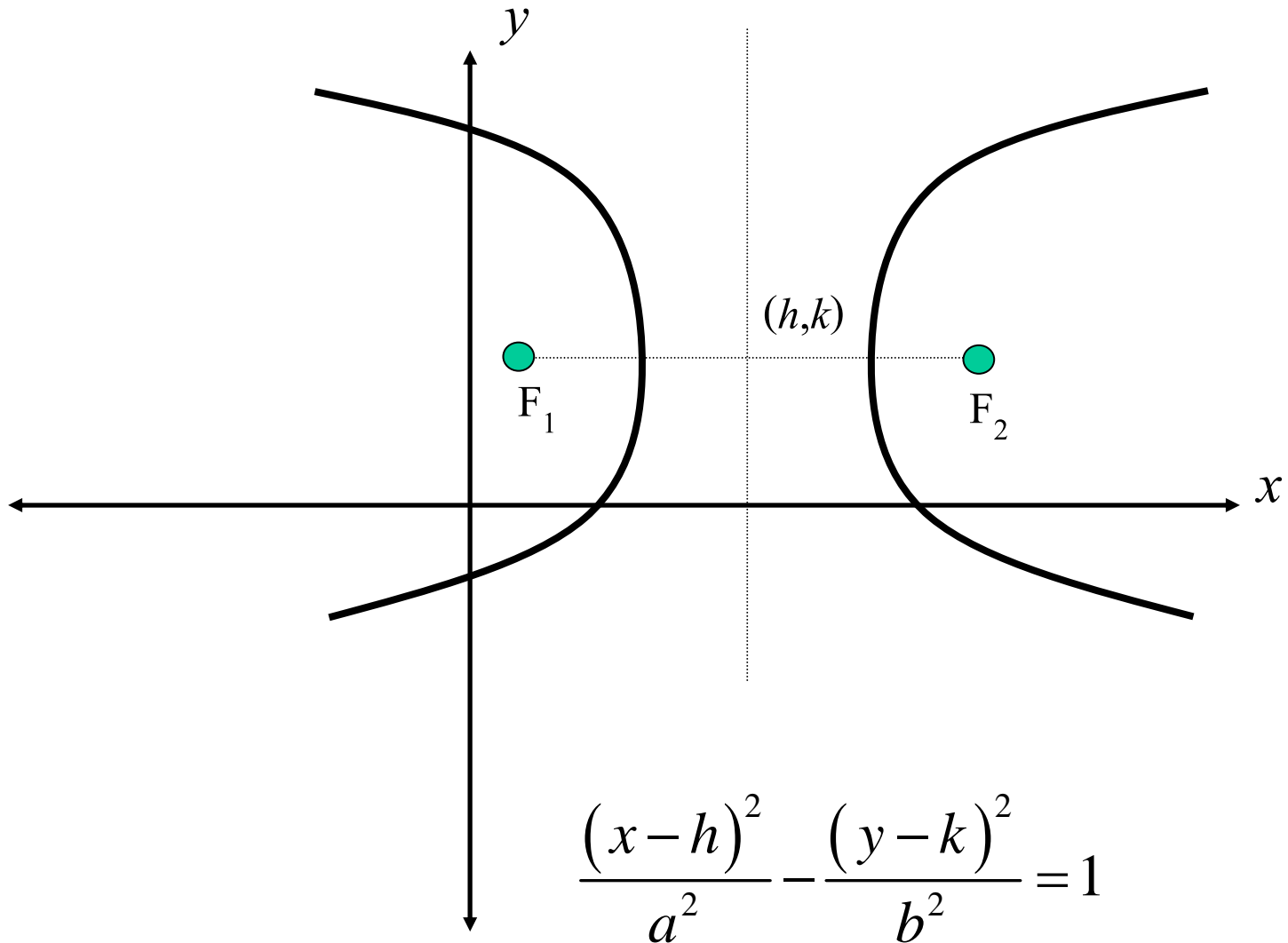


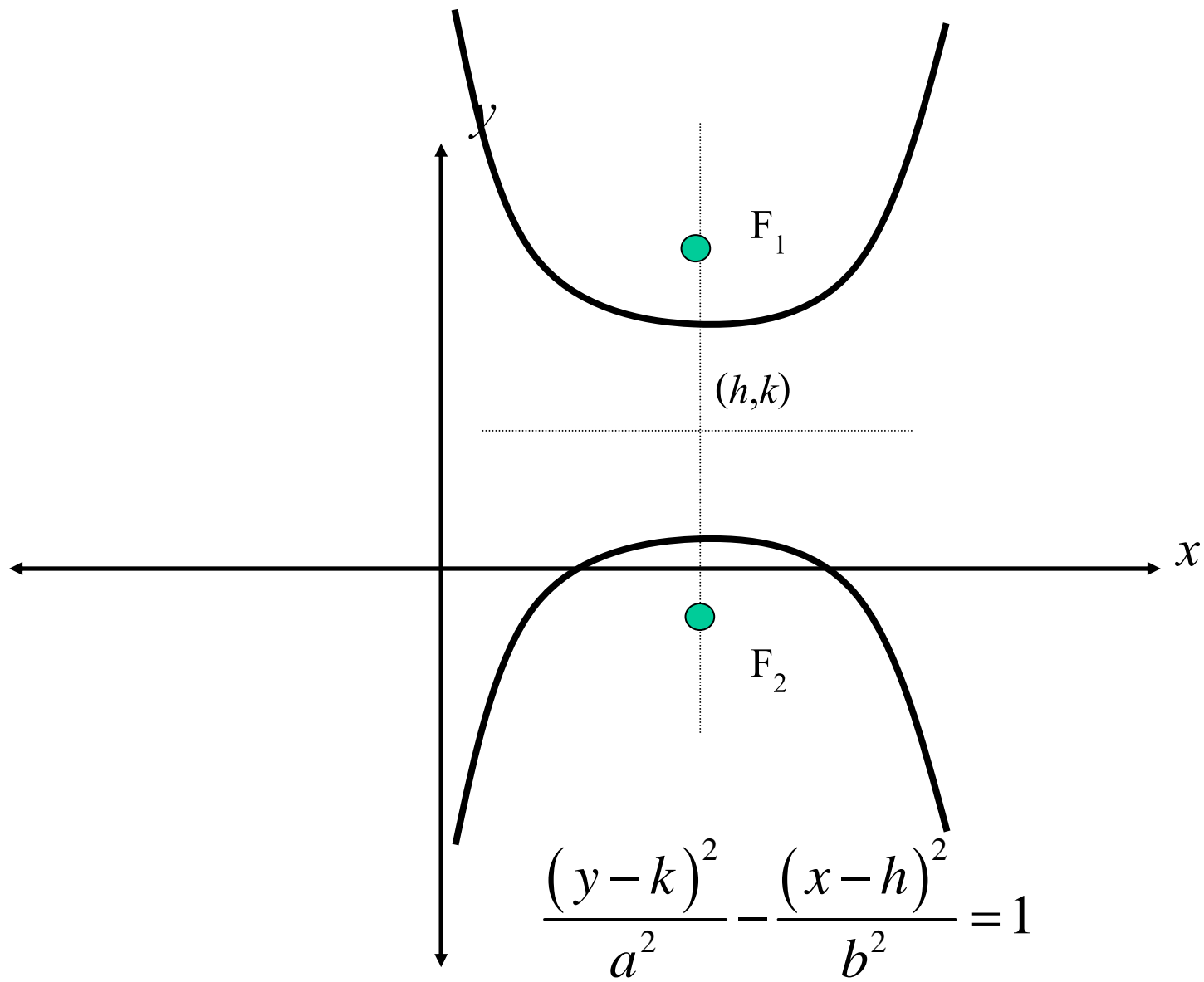
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$





$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$





# พีชคณิตของฟังก์ชันและการย้ายแกน

พิจารณากราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$y = x$$

$$y = 2x$$

$$y = 4x$$



# พิจารณากราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$y = x$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

$$y = 0.1x$$

# พิจารณากราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$y = x$$

$$y = -x$$

$$y = -0.1x$$

$$y = -10x$$

# พิจารณากราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$y = x$$

$$y - 1 = x - 2$$

$$y - 1 = 2(x - 2)$$

# พิจารณากราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$y = x^2$$

$$y = 2x^2$$

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

# พิจารณากราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$y = x^2$$

$$y = -2x^2$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2$$

# พิจารณากราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$y = x^2$$

$$y - 2 = (x + 3)^2$$

$$y - 2 = 2(x + 3)^2$$

พิจารณากราฟของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

$$y = x^2$$

$$y - 2 = -(x + 3)^2$$

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x + 3)^2$$