พีชคณิตของพหุนาม

พหุนามเป็นการขยายความคิดจากฟังก์ชันเชิงเส้น โดยพหุนามและสมการพหุนาม มีความยุ่งยาก และซับซ้อนในการหาผลเฉลยมากกว่าปัญหาเชิงเส้น แต่สามารถนำไปประยุกต์ แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้หลากหลายมากขึ้นเช่นกัน

พหุนาม

เราเรียกพจน์ซึ่งอยู่ในรูป

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

โดยที่ $a_n \neq 0$

ว่า**พหุนาม (polynomial) ระดับขั้น (degree) *n***

และเรียก $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$

ซึ่งเป็นค่าคงตัวว่า **สัมประสิทธิ์ (coefficients)** ของพหุนาม

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

เรียก a_n ว่าสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ x^n

เรียก a_{n-1} ว่าสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ x^{n-1}

$\vdots$

เรียก a_1 ว่าสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ x

เรียก a_0 ว่าสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ 1

ตัวอย่าง (quardratic polynomial)

$x^2 + 2x + 1$ เป็นพหุนามระดับขั้น

$x^2 + 2x$ เป็นพหุนามระดับขั้น

$x^2 - 1$ เป็นพหุนามระดับขั้น

$2 + x + x^2$ เป็นพหุนามระดับขั้น

ตัวอย่าง (cubic polynomial)

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ เป็นพหุนามระดับขั้น

$10x + x^3$ เป็นพหุนามระดับขั้น

$x^3 - x^2$ เป็นพหุนามระดับขั้น

ตัวอย่าง (quartic polynomial)

$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ เป็นพหุนามระดับขั้น

$x^4 + 2x$ เป็นพหุนามระดับขั้น

$x^4 - 1$ เป็นพหุนามระดับขั้น

กำหนดให้ $P(x) = 4x^2 - 2x + 5$

จงหาค่า $P(1)$ $P(0.5)$ $P(-2)$ $P(y)$

การเท่ากันของพหุนาม

สองพหุนามใดๆ จะมีค่าเท่ากันก็ต่อเมื่อ มีสัมประสิทธิ์หน้า x^k เท่ากันทุก $k=1,\ldots,n$

ตัวอย่าง

$$2x^3 - 4x^2 + 7x - 10 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$A =$

$B =$

$C =$

$D =$

ตัวอย่าง

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = x^2 - 4$$

$A =$

$B =$

$C =$

$D =$

คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของพหุนาม

1. การคูณด้วยค่าคงตัวใดๆ

$$\alpha\left(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0\right) =$$

$$\left(\alpha a_n\right)x^n + \left(\alpha a_{n-1}\right)x^{n-1} + \cdots + \left(\alpha a_2\right)x^2 + \left(\alpha a_1\right)x + \left(\alpha a_0\right)$$

ตัวอย่าง

$$4\left(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10\right) =$$

ตัวอย่าง

$$(-2)\left(2x^3-4x^2+7x-10\right)=$$

$$(0)\left(2x^3-4x^2+7x-10\right)=$$

2. การบวกและกันของพหุนาม

ให้ทำการบวกและลบกันเฉพาะสัมประสิทธิ์ที่อยู่หน้า x^k ตรงกันเท่านั้น

$$\left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\right) + \left(b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0\right)$$
$$= \left(a_n + b_n\right) x^n + \cdots + \left(a_1 + b_1\right) x + \left(a_0 + b_0\right)$$

$$\left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\right) - \left(b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0\right)$$
$$= \left(a_n - b_n\right) x^n + \cdots + \left(a_1 - b_1\right) x + \left(a_0 - b_0\right)$$

ตัวอย่าง

$$\left(2x^3-4x^2+7x-10\right)+\left(x^4+2x^2-4x+1\right)=$$

$$\left(2x^3-4x^2+7x-10\right)-\left(x^3+2x^2-4x+1\right)=$$

แบบฝึกหัด

$$\left(2x^3-4x^2+7x-10\right)+\left(4x^2-2x+5\right)=$$

$$\left(2x^3-4x^2+7x-10\right)-\left(4x^2-5\right)=$$

จงหาค่า

$$2\left(2x^3-4x^2+7x-10\right)-3\left(4x^2-5\right)=$$

การคูณกันของพหุนาม

การคูณกันของพหุนามให้ทำการคูณกระจายเหมือนการคูณตัวเลขทั่วไป

$$(x+1)(1+x) =$$

$$(2x+1)(2+x) =$$

$$(2+x)(2x+1) =$$

กำหนดให้ $P(x)$ และ $R(x)$ เป็นพหุนาม

สังเกตได้ว่าการคูณกันของพหุนาม มีคุณสมบัติ**สลับที่**

$$P(x)R(x) = R(x)P(x)$$

$$(x-1)(1+x+x^2)=$$

$$(x+1)(x^2-x+1)=$$

แบบฝึกหัด

จงหาค่า $P(x)R(x)$ เมื่อ

$P(x) = 4x - 5$ $\qquad\qquad$ $R(x) = 3x^3 - x^2 + 4x - 6$

แบบฝึกหัด

ถ้า $x^2+5x+6=(x+A)(x+B)$

จงหาค่า A และ B

สามเหลี่ยมปาสคาล

(Pascal Triangle)

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

$$(x+y)^1 =$$

$$(x+y)^2 =$$

$$(x+y)^3 =$$

$$(x+y)^4 =$$

$$(x+y)^5 =$$

$$(x+2)^2 =$$

$$(x-2)^2 =$$

$$(x+2)^3 =$$

$$(x-2)^3 =$$

$$(x-y)^1 =$$

$$(x-y)^2 =$$

$$(x-y)^3 =$$

$$(x-y)^4 =$$

$$(x-y)^5 =$$

การหารพหุนาม

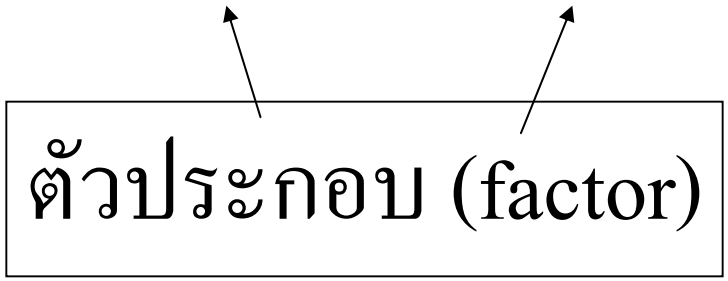
การหารพหุนาม ทำได้โดยการหารยาว ซึ่งในการหารนี้เราจะได้ **ผลหาร (quotient)** และ **เศษเหลือ (remainder)**

จงหาผลหารและเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม $P(x) = x^3 - 1$ ด้วย $x - 1$

พหุนาม = ตัวหาร x ผลหาร + เศษเหลือ

ถ้าเศษเหลือมีค่าเป็น 0

พหุนาม = ตัวหาร x ผลหาร



$$x^3 - x^2 + x + 1 = (x-1)(x^2+1) + 2$$

เศษเหลือ (remainder) คือ 2

$$x^3 - x^2 + x - 2 = (x-1)(x^2+1) - 1$$

เศษเหลือ (remainder) คือ -1

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1)$$

ตัวประกอบ (factor)

$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

ตัวประกอบของ $x^3 - 1$

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

ตัวประกอบของ $x^3 + 1$

$$x^2+5x+6=(x+3)(x+2)$$

ตัวประกอบของ x^2+5x+6

$$x^2+2x+1=(x+1)^2=(x+1)(x+1)$$

ตัวประกอบของ x^2+2x+1

ทฤษฎีบท เศษเหลือจากการหารพหุนาม

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ด้วย $x - a$ คือ $P(a)$

ตัวอย่าง

จงหาเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม

$P(x) = x^3 - 1$ ด้วย $x - 1$

ตัวอย่าง

จงหาเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม

$P(x) = x^3 - 1$ ด้วย $x + 1$

ตัวอย่าง

จงหาเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม

$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 9$ ด้วย $x + 2$

แบบฝึกหัด

จงหาค่า a เมื่อเศษเหลือจากการหารพหุนาม

$2x^3 + x^2 + a$ ด้วย $x + 2$ คือ -9

ตัวอย่าง

จงหาเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม

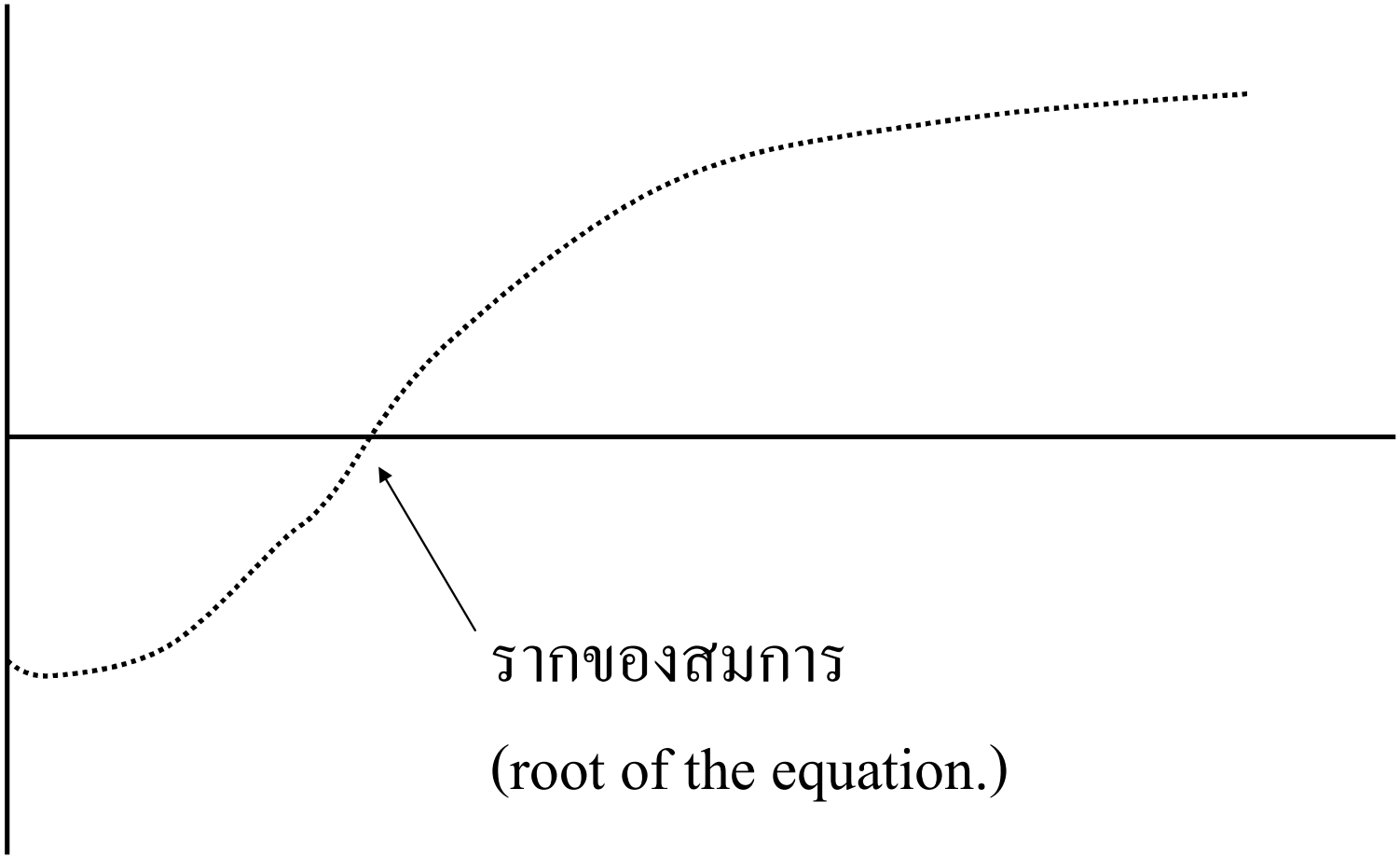
$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 9$ ด้วย $x^2 + 2$

สมการพหุนาม

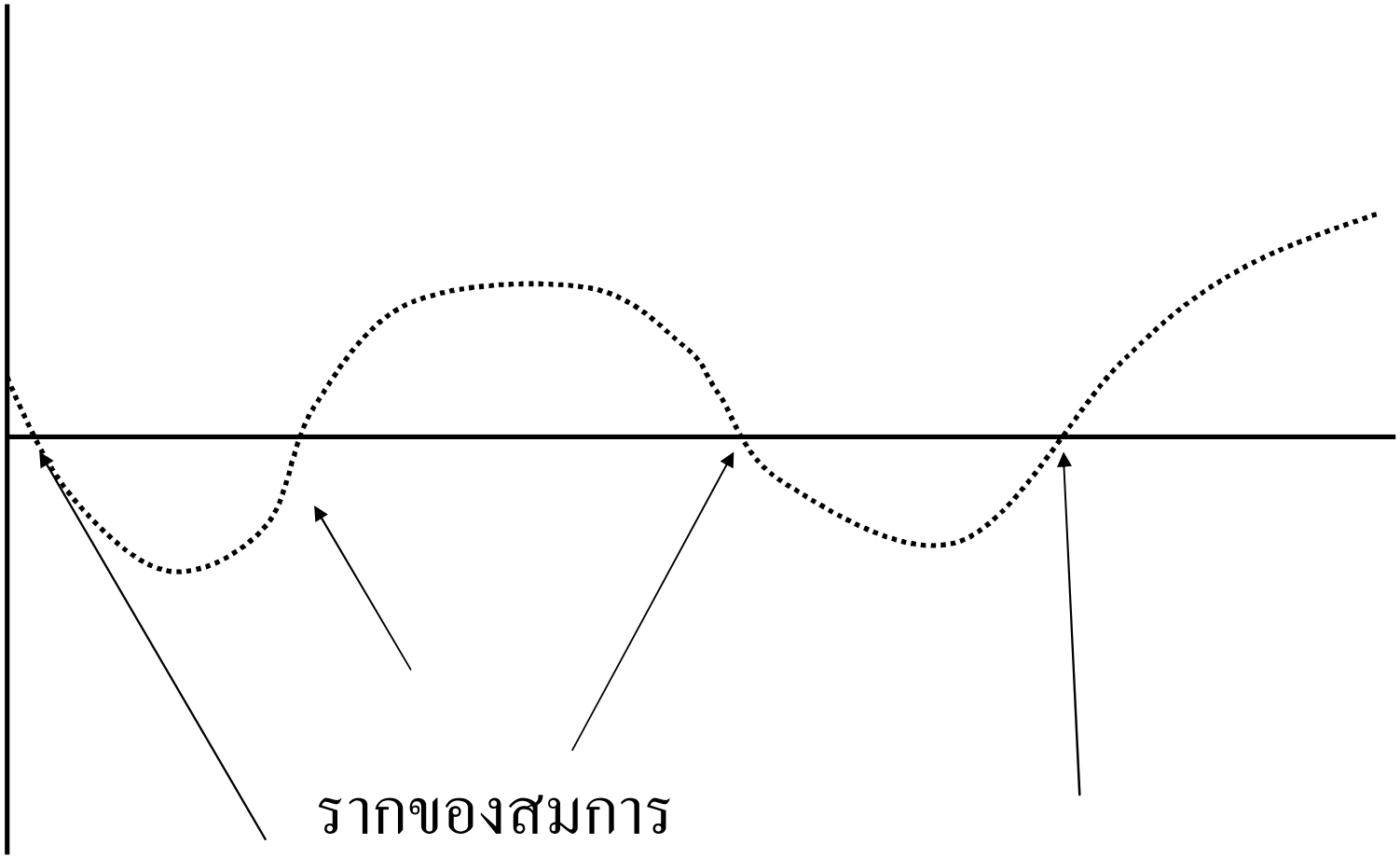
สมการพหุนามคือสมการที่อยู่ในรูป

$P(x) = 0$ หรือ $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$



$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$



รากของสมการ

(roots of the equation.)

รากของสมการพหุนาม

รากของสมการพหุนาม (roots of the equation) คือ ค่า x_0 ที่ทำให้สมการพหุนามมีค่าเท่ากับ 0

$P(x_0) = 0$ หรือ

$$a_n {x_0}^n + a_{n-1} {x_0}^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0$$

ตัวอย่าง

$x^3 - 1 = 0$ มีรากของสมการคือ $x=$

$x^2 + 5x + 6 = 0$ มีรากของสมการคือ

$(x+1)^{10}=0$ มีรากของสมการคือ

$x^2+1=0$ มีรากของสมการคือ

ถ้าพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

สามารถแยกตัวประกอบ (factor) ได้เป็น

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - a) R(x)$$

a จะเป็นรากของสมการพหุนาม

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

ตัวอย่าง

$x^3 - 1 = (\qquad\qquad)(\qquad\qquad\qquad\qquad)$

รากของสมการพหุนาม $x^3 - 1 = 0$ คือ

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

รากของสมการพหุนาม $x^2 + 5x + 6 = 0$ คือ

วิธีการหารากของสมการพหุนามระดับขั้นสอง

Method for finding roots of quadratic equations

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. $b^2 - 4ac > 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

มีสองรากที่แตกต่างกันคือ

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. $b^2 - 4ac = 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

มีเพียงรากเดียว คือ

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3. $b^2 - 4ac < 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

หาผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงไม่ได้

จงหารากของสมการ $x^2 - 5x + 6 = 0$

จงหารากของสมการ $x^2 - 5x + 7 = 0$

ถ้าพหุนามสามารถแยกตัวประกอบ (factor)ได้ เราก็จะได้รากของสมการ และในทางกลับกัน ถ้าได้รากของสมการพหุนาม เราก็จะสามารถแยกตัวประกอบได้

$x^2 - 5x + 6 = 0$ มีรากคือ

ดังนั้นพหุนาม $x^2 - 5x + 6$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$x^2 + 5x + 6 = 0$ มีรากคือ

ดังนั้นพหุนาม $x^2 + 5x + 6$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ มีรากคือ 1

ดังนั้นพหุนาม $x^3 - x^2 + x - 1$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$x^3+x^2+x+1=0$ มีรากคือ -1

ดังนั้นพหุนาม x^3+x^2+x+1

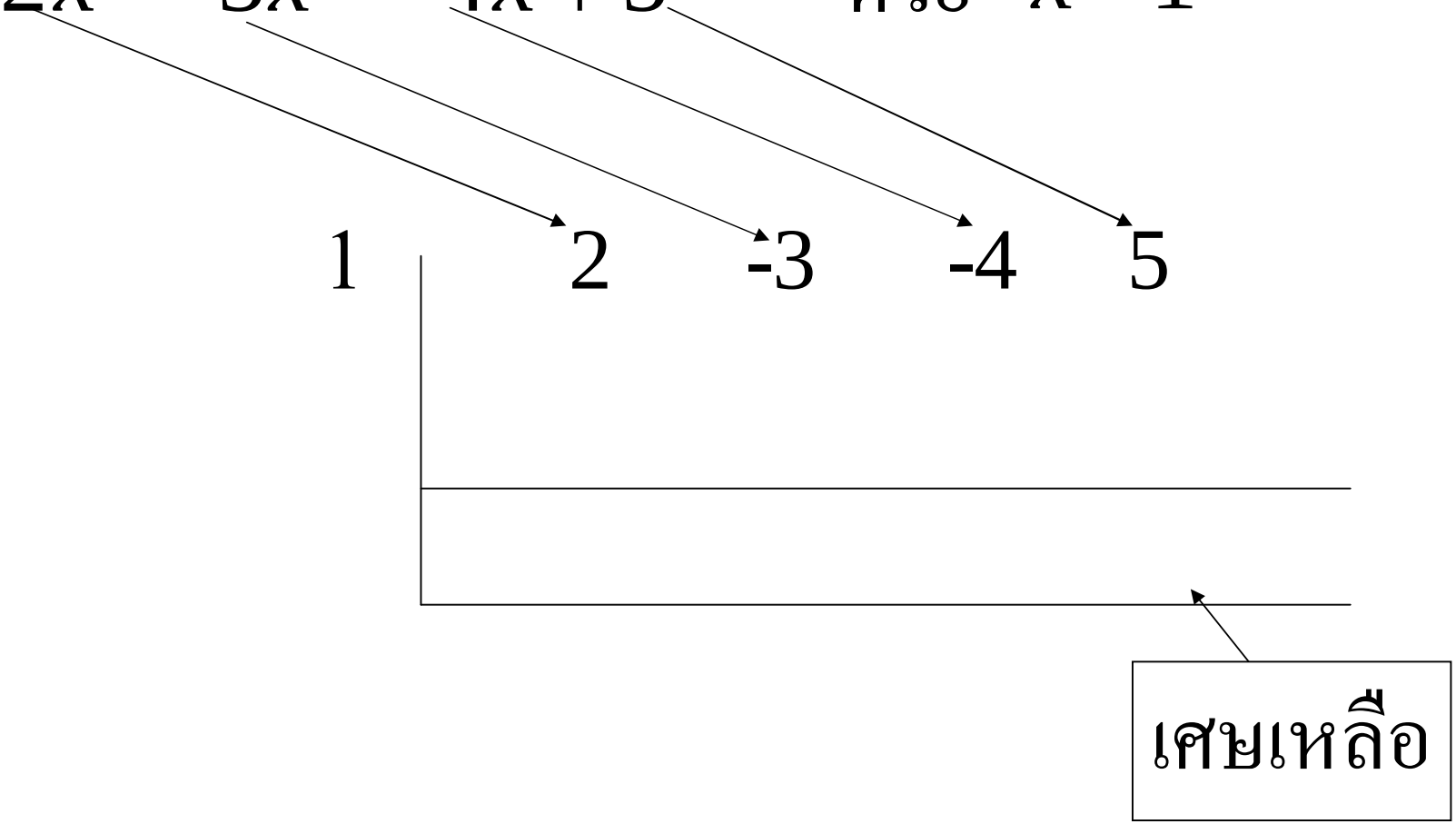
สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

หารสังเคราะห์ (synthetic division)

หารสังเคราะห์เป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยในการแยกตัวประกอบของพหุนามโดยใช้เพียงแค่สัมประสิทธิ์หน้า x^n เท่านั้นมาทำการคำนวณ

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$2x^3 - 3x^2 - 4x + 5$ ด้วย $x - 1$



ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$x^3 - x^2 + x - 1$ ด้วย $x - 1$

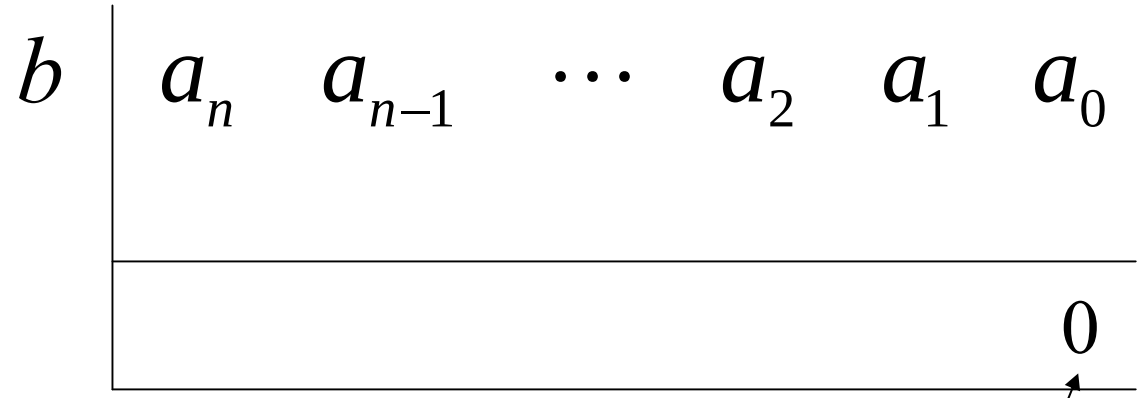
ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$x^3 - x^2 + x - 1$ ด้วย $x + 1$

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$x^3 - 1$ ด้วย $x - 1$

การประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$



B เป็นค่าที่ได้จาก เศษเหลือต้องเป็น 0

ตัวประกอบของ a_0 หารด้วยตัวประกอบของ a_n

จงประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบพหุนาม $x^3 - 2x^2 - x + 2$

จงประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบพหุนาม $2x^3-5x^2-x+6$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลหาร และ เศษเหลือที่ ได้จากการหารพหุนามต่อไปนี้

1.1	$2x^3 - x^2 - 1$	หารด้วย	$x - 1$
1.2	$2x^3 - x^2 - 1$	หารด้วย	$x + 1$
1.3	$x^5 + x - 4$	หารด้วย	$x - 1$
1.4	$x^5 + x - 4$	หารด้วย	$x + 1$
1.5	$x^5 - 32$	หารด้วย	$x + 3$

2. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

2.1 $x^3 - 2x^2 - x + 2$

2.2 $18x^3 - 9x^2 - 5x + 2$

2.3 $x^3 + x^2 - x - 1$

2.4 $x^4 - 25x^2 + 144$

2.5 $x^5 - 32$