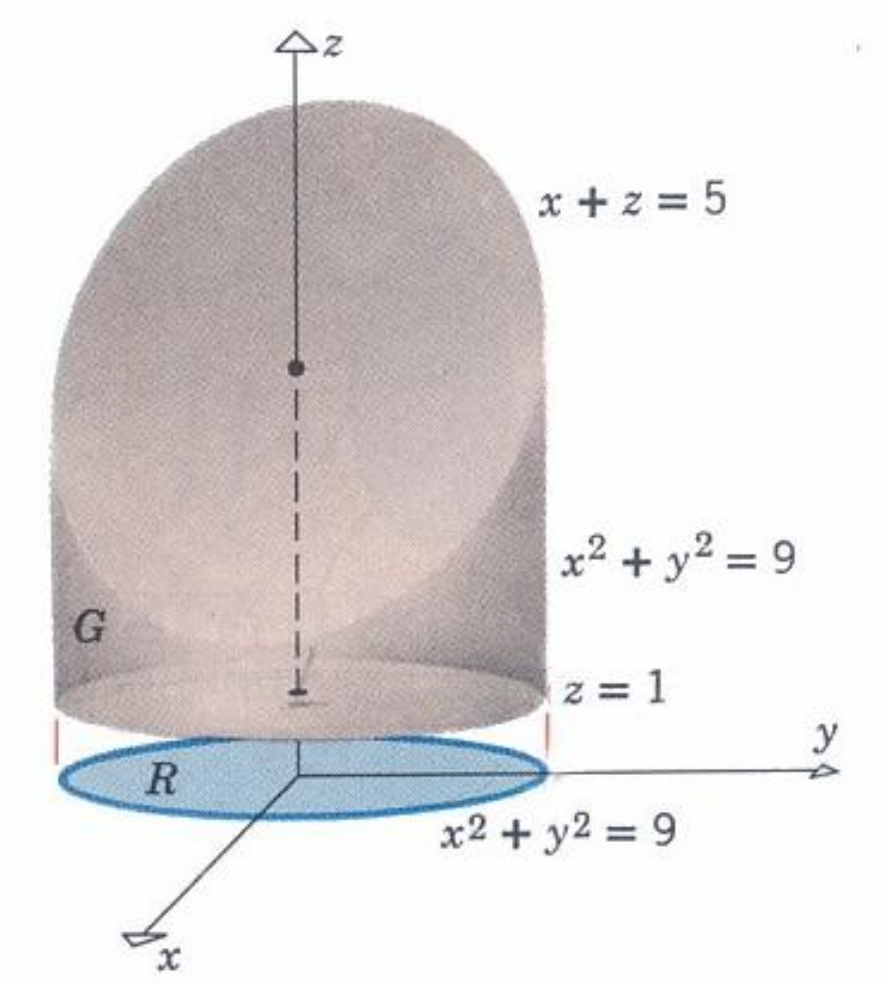
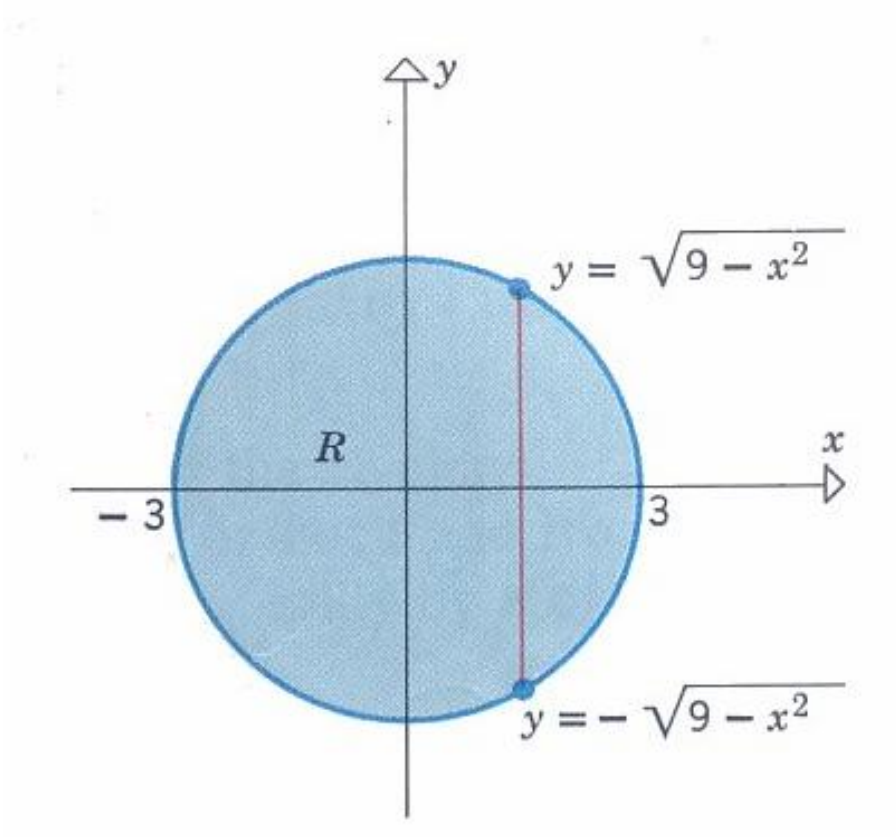
จงหาค่าอินทิกรัล $\iiint_G y\,dV$

เมื่อ G เป็นทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมด้วย ทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 9$ ระนาบ $z = 1$ และระนาบ $x + z = 5$


z
x + z = 5
x² + y² = 9
G
z = 1
y
R
x² + y² = 9
x


y
y = √(9 − x²)
R
x
− 3
3
y = − √(9 − x²)

การหาค่าอินทิกรัลสามชั้นในพิกัดทรงกระบอก

บทนิยาม 3.2 (พิกัดทรงกระบอก). พิกัดทรงกระบอกคือ ระบบพิกัดซึ่งระบุตำแหน่งต่างๆ ในรูปไตรอันดับ (r, θ, z) ซึ่งไตรอันดับนี้สามารถระบุตำแหน่งในสามมิติ โดย (r, θ) เป็นการบอกพิกัดในระนาบ xy ในระบบพิกัดเชิงขั้ว และถ้า $z \geq 0$ หมายถึงตำแหน่ง (r, θ, z) นี้อยู่สูงกว่าระนาบ xy เป็นระยะทาง z หน่วย และ ถ้า $z < 0$ หมายถึง ตำแหน่ง (r, θ, z) อยู่ต่ำกว่าระนาบ xy เป็นระยะ $-z$ หน่วย

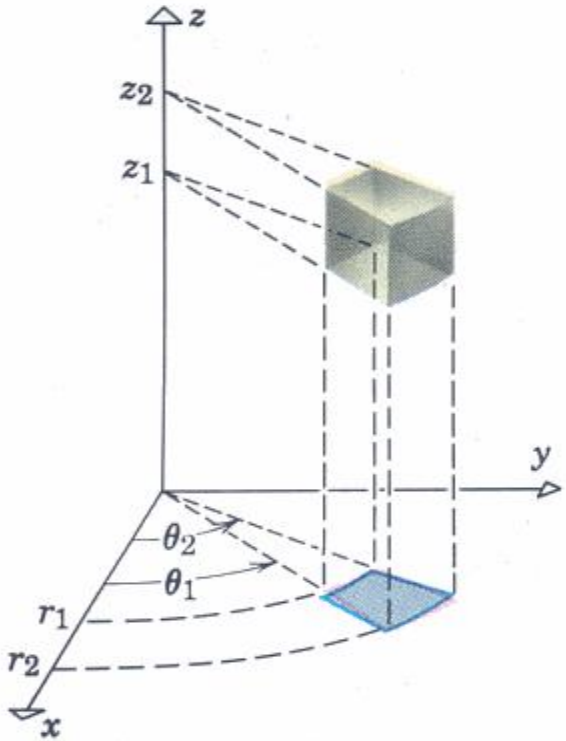
ทฤษฎีบท 3.3 (ทฤษฎีบทการหาค่าอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก). *ให้ G เป็นทรงตัน ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นที่ผิวปิดบน $z = g_2(r,\theta)$ และพื้นที่ผิวปิดล่าง $z = g_1(r,\theta)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก, R เป็นภาพฉายของทรงตัน G บนระนาบ xy*

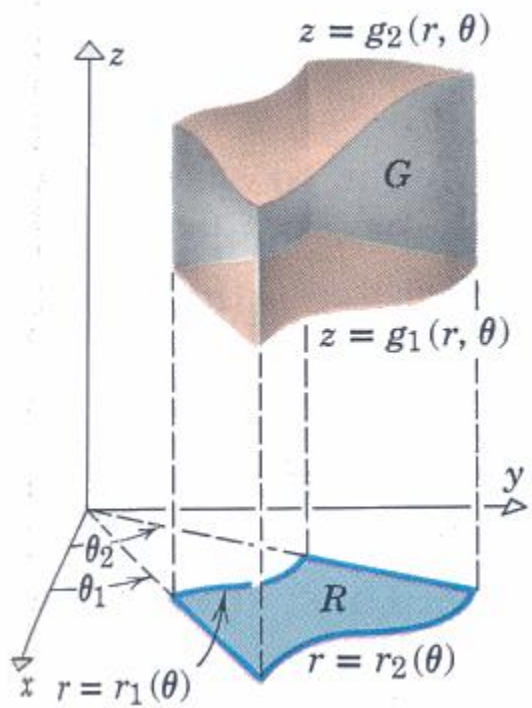
ถ้า $f(r,\theta,z)$ ต่อเนื่องบน G แล้ว

$$\int\int_G\int f(r,\theta,z)\,dV = \int\int_R \left[\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,dz\right] dA$$

เมื่อการหาค่าอินทิกรัลสองชั้นบนพื้นที่ปิด R เป็นการหาค่าอินทิกรัลในพิกัดเชิงขั้ว ซึ่งเราอาจจะเขียนได้เป็น

$$\iiint_G f(r,\theta,z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)r\,dz\,dr\,d\theta$$





ขั้นตอนการหาค่าอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\iiint_G f(r,\theta,z)\,dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)r\,dz\,dr\,d\theta$$

1. หาสมการของพื้นที่ผิวล่าง $z = g_1(r,\theta)$ และพื้นที่ผิวบน $z = g_2(r,\theta)$ ของทรงตัน G ฟังก์ชัน $g_1(r,\theta)$ และ $g_2(r,\theta)$ จะเป็นค่าลิมิตล่างและบนของการหาค่าอินทิกรัล

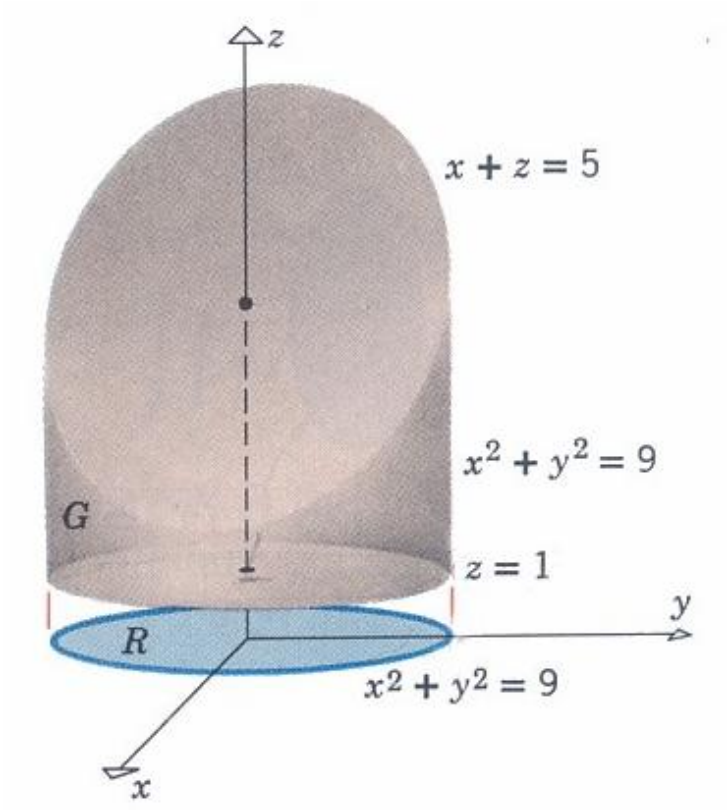
2. หาค่าอินทิกรัลย่อย

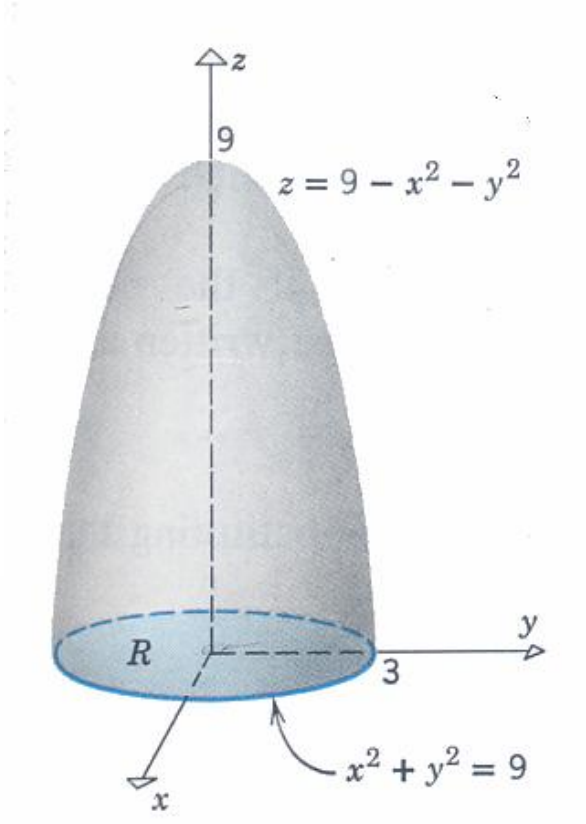
$$\tilde{f}(r,\theta) = \int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} r \; f(r,\theta,z) \; dz$$

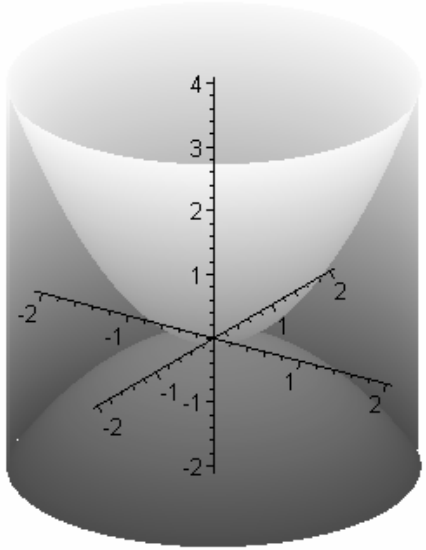
ค่าอินทิกรัลที่ได้ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร r และ θ

3. พิจารณาภาพฉาย R ซึ่งเกิดจากการฉายภาพทรงตัน G ลงบนระนาบ xy และทำการหาค่า**อินทิกรัลสองชั้น** ของฟังก์ชัน $\tilde{f}(r,\theta)$ บนพื้นที่ R ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$\int\int_G\int f(r,\theta,z)\,dV = \int\int_R \tilde{f}(r,\theta)\,dA$$


z
x + z = 5
x² + y² = 9
G
z = 1
y
R
x² + y² = 9
x


z
9
z = 9 − x² − y²
y
R
3
x² + y² = 9
x


4
3
2
1
-2
-1
2
1
-1
-1
1
2
-2
-2

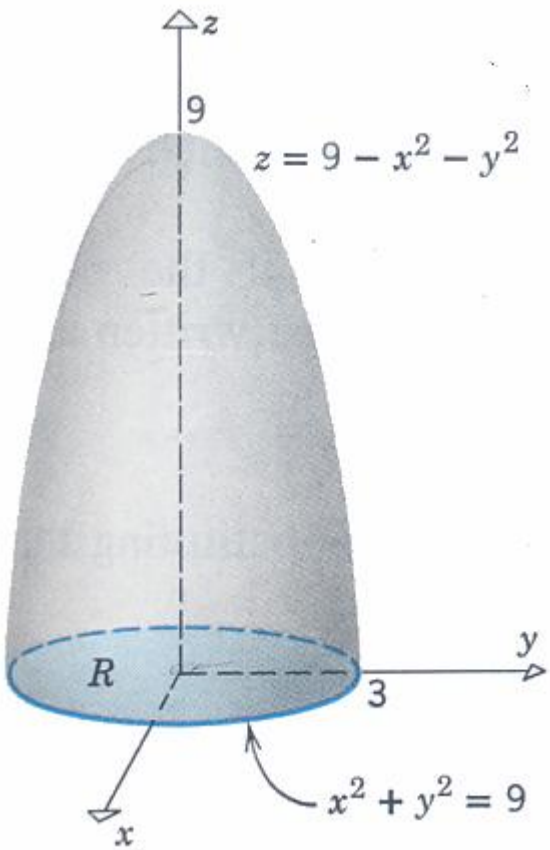
จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นของ

1. $$\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} zr\,dz\,dr\,d\theta$$

2. $$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta}\int_0^{r^2} r\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta$$

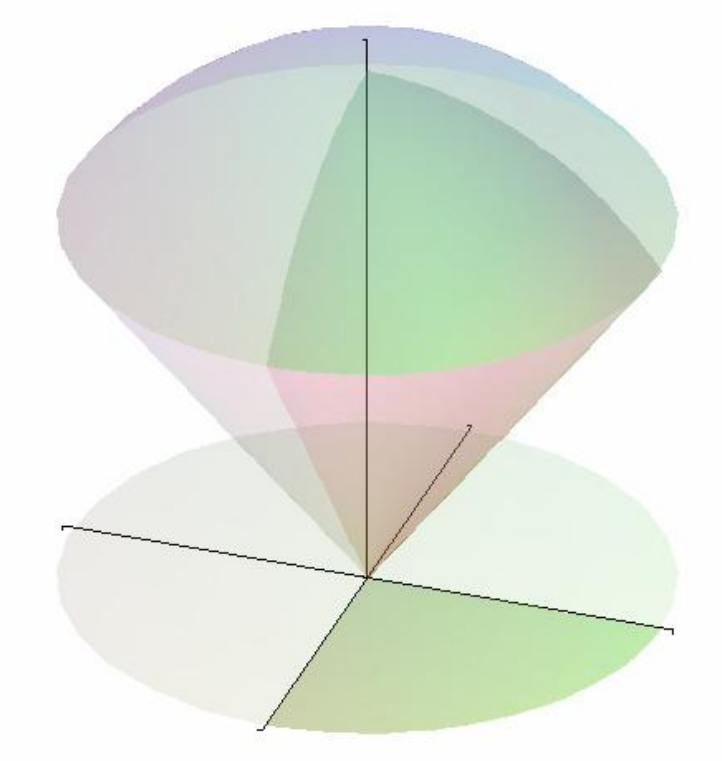
จงหาค่าอินทิกรัลของ

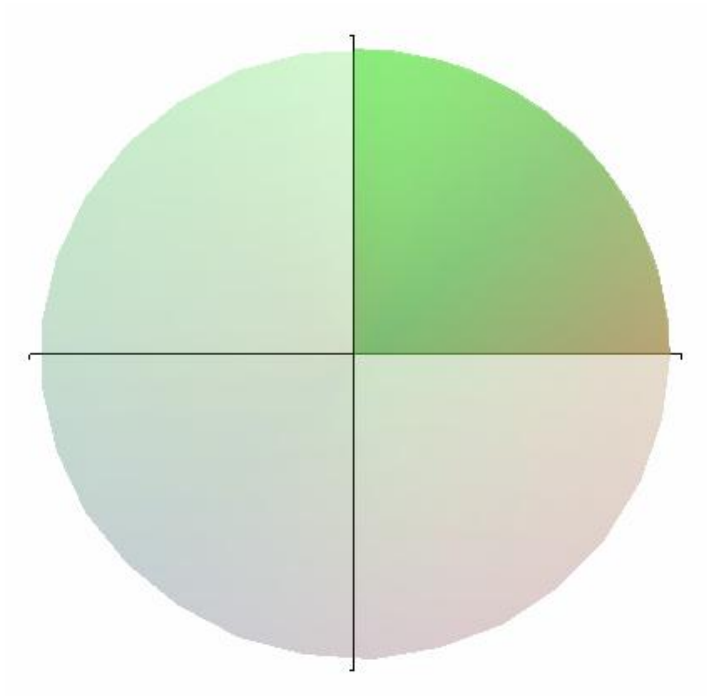
1. $$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2\ dz\ dy\ dx$$


z
9
$z = 9 - x^2 - y^2$
y
R
3
$x^2 + y^2 = 9$
x

จงหาค่าอินทิกรัลของ

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 \, dz \, dx \, dy$$





$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 \, dz \, dx \, dy$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 \, dz \, dx \, dy$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 \, dz \, dx \, dy$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 \, dz \, dx \, dy$$

$$\int_{-2}^{0}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dx\,dy$$

$$\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dx\,dy$$

$$\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dx\,dy$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dx\,dy$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dx\,dy$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dx\,dy$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx$$

$$\int_{-2}^{0}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx$$

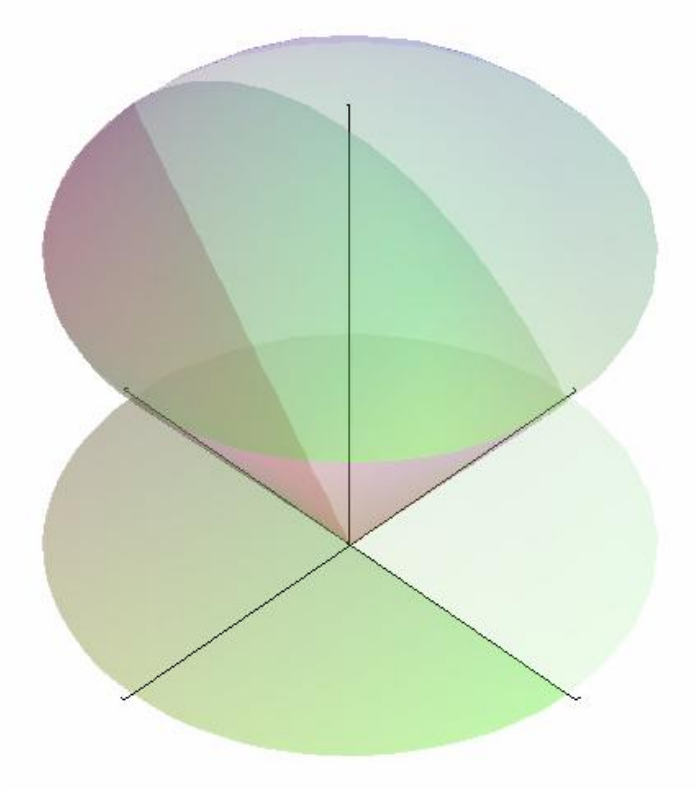
$$\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx$$

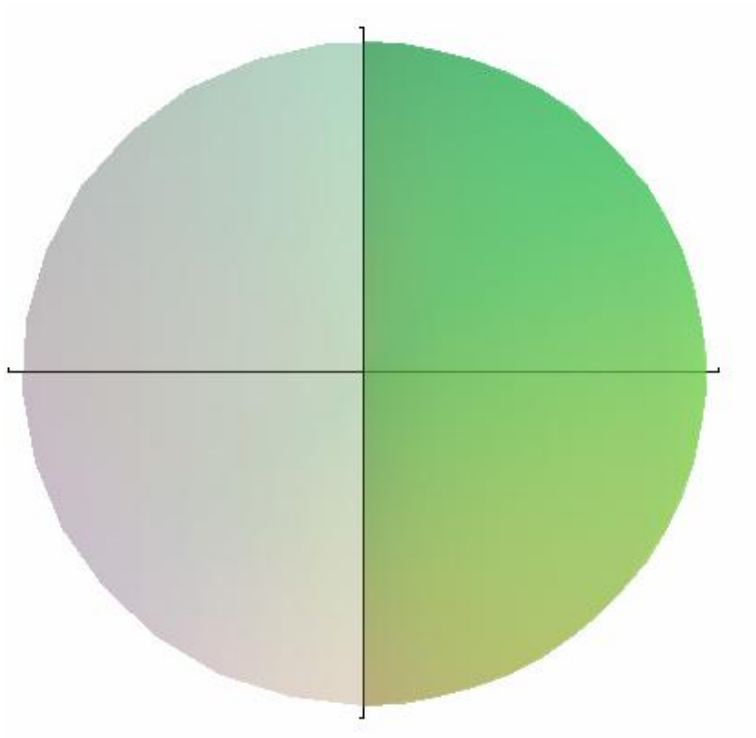
$$\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx$$

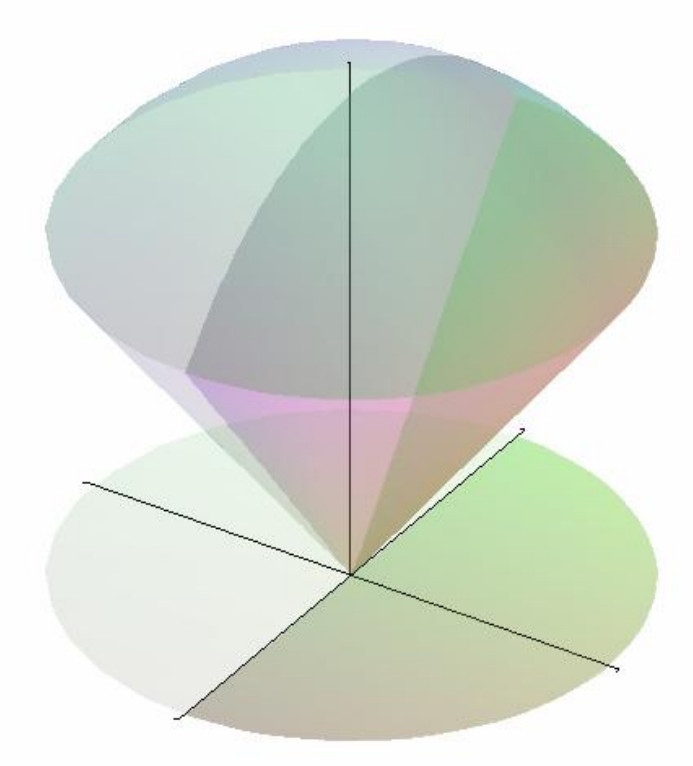
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx$$

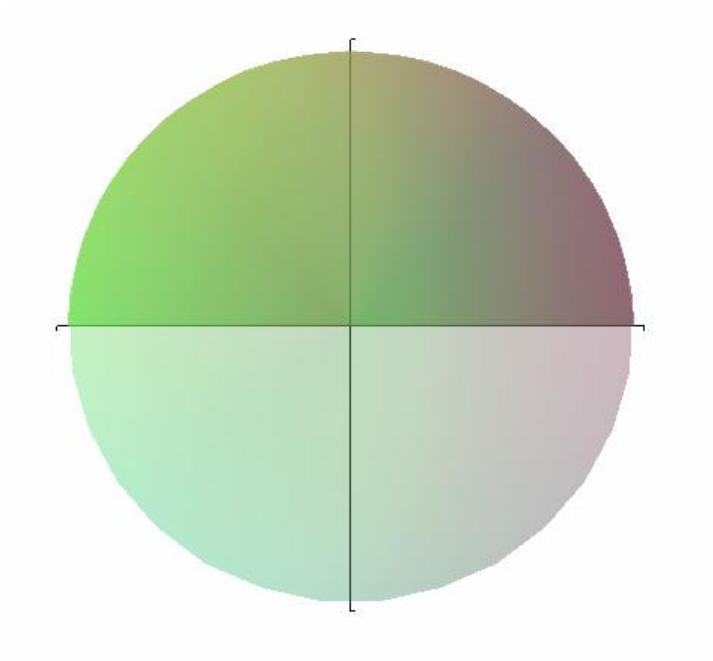
$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx$$



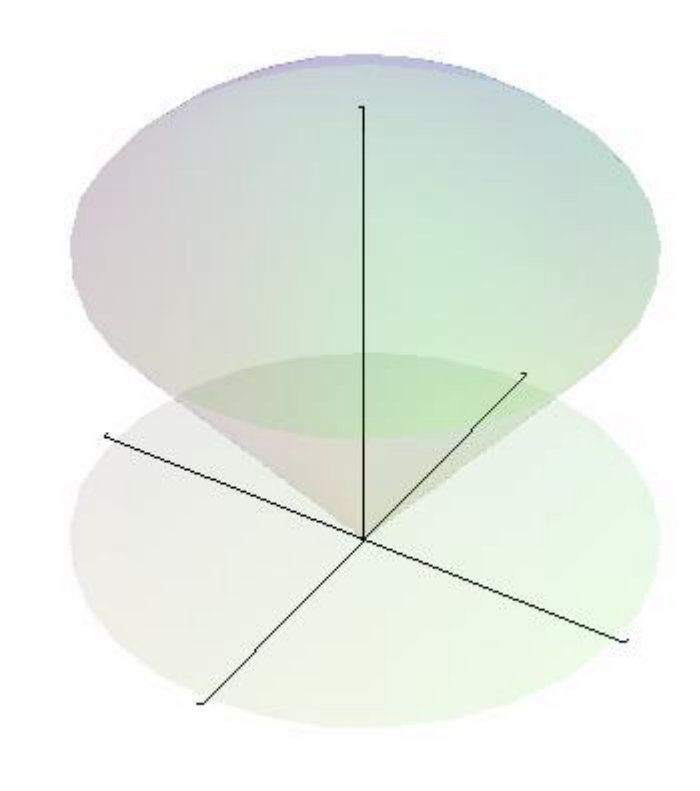


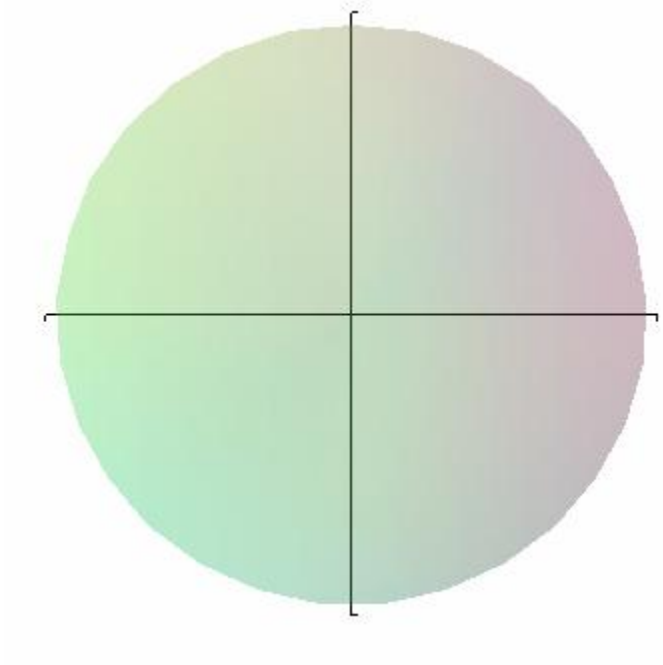
$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 \, dz \, dx \, dy$$





$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2 \, dz \, dx \, dy$$





$$\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx$$

แบบฝึกหัด

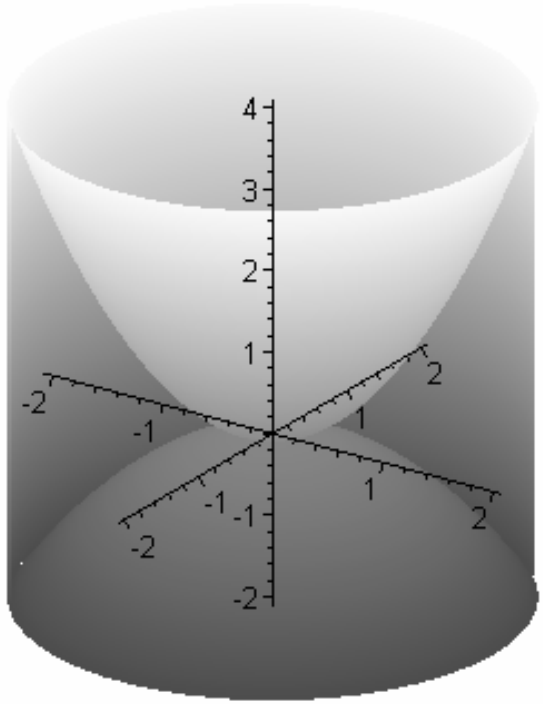
จงหาค่าอินทิกรัล

$$\int_0^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^0 \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{32-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dz\,dy\,dx$$

ตัวอย่าง 3.8. จงหาค่าอินทิกรัลของ

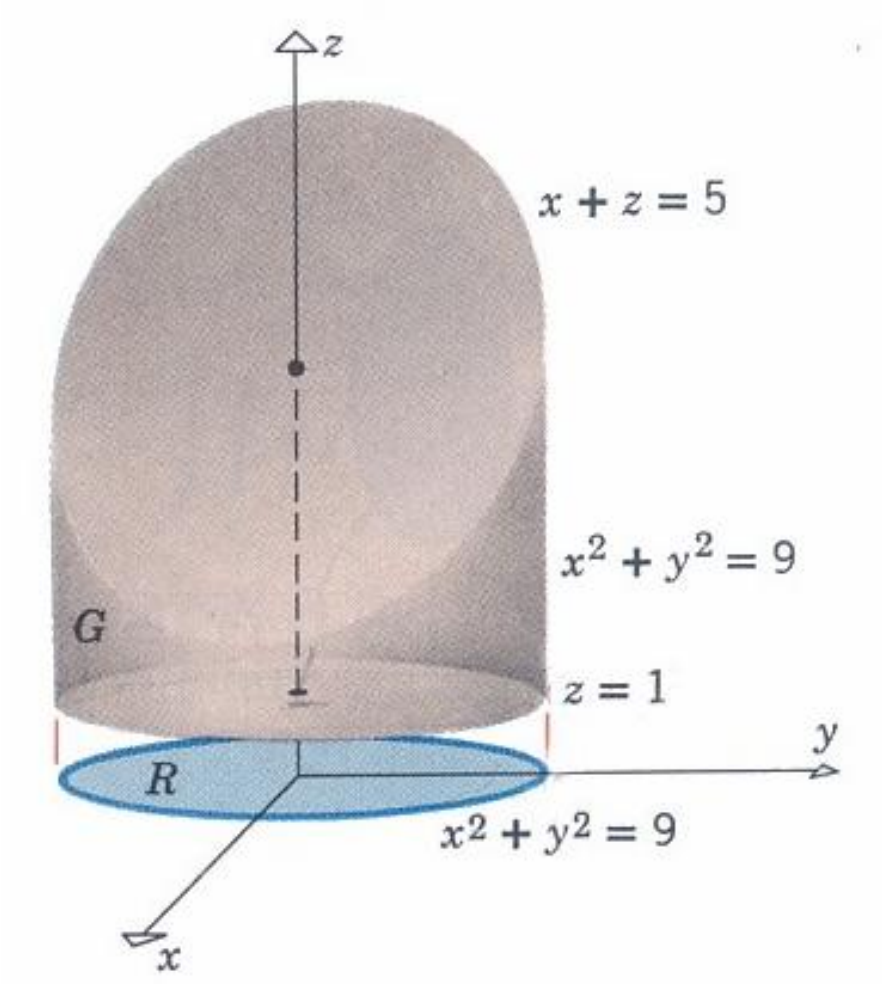
$$\int\int_G\int z\ dV$$

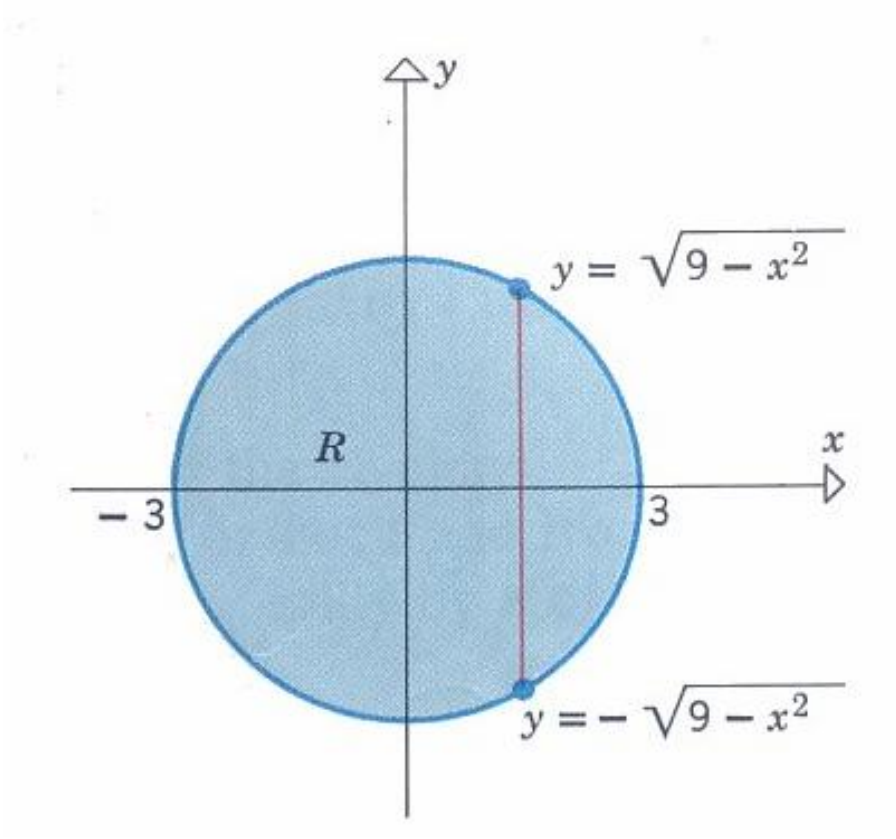
เมื่อ G เป็นทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$ โดยมีพื้นที่ผิวบนเป็น $z = x^2 + y^2$ และมีพื้นที่ผิวล่างเป็น $z = \dfrac{-(x^2 + y^2)}{2}$


4
3
2
1
-1
-2
-2
-1
1
2
-2
-1
1
2

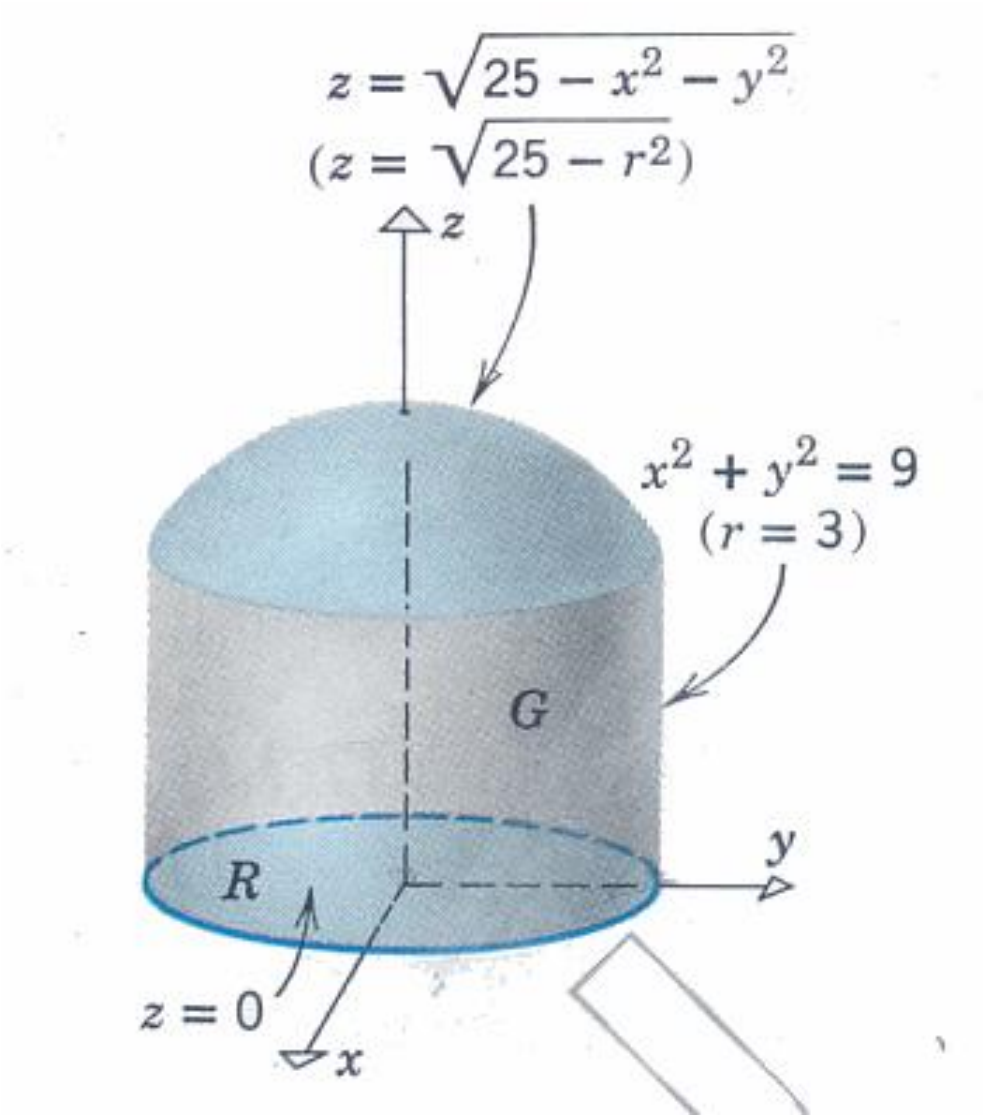
จงหาค่าอินทิกรัล $\iiint_G y\,dV$

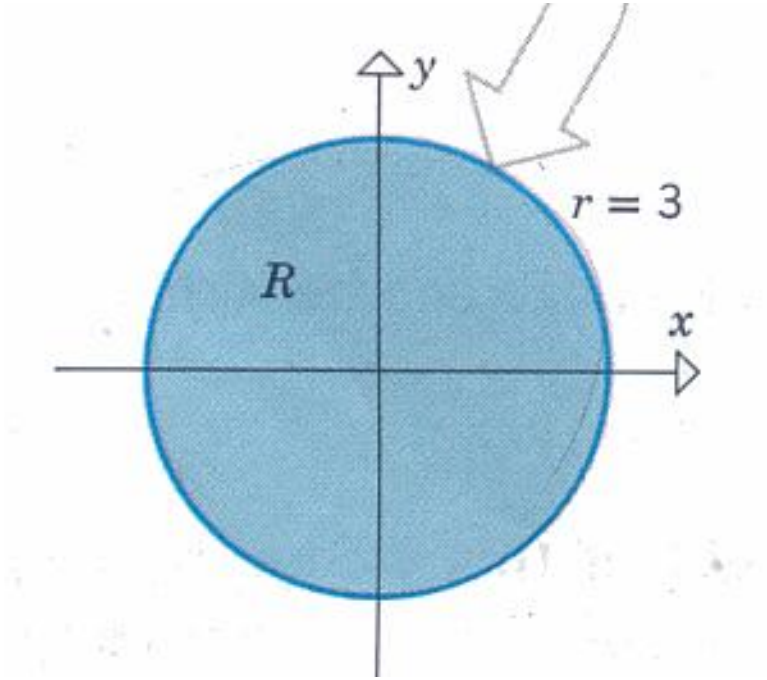
เมื่อ G เป็นทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมด้วย ทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 9$ ระนาบ $z = 1$ และระนาบ $x + z = 5$


z
x + z = 5
x² + y² = 9
G
z = 1
y
R
x² + y² = 9
x


y
y = √(9 − x²)
R
x
− 3
3
y = − √(9 − x²)

ตัวอย่าง 3.6. จงใช้การหาค่าอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอก หาปริมาตรของทรงตัน G ซึ่งปิดล้อมด้วย ผิวปิดบน $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ ผิวปิดล่างคือระนาบ xy และผิวข้างเป็นทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 9$


$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$
$(z = \sqrt{25 - r^2})$
z
$x^2 + y^2 = 9$
$(r = 3)$
G
R
y
$z = 0$
x


y
$r = 3$
R
x

พิจารณาทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยสมการ

$z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$ และสมการ $z = 2$

ปริมาตรของทรงตันดังกล่าวคือ

$$\Omega = \int_{-3}^{0}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dzdydx$$

อินทิกรัลในระบบ**พิกัดทรงกระบอก**

ที่เทียบเท่ากับค่าอินทิกรัลดังกล่าวคือ