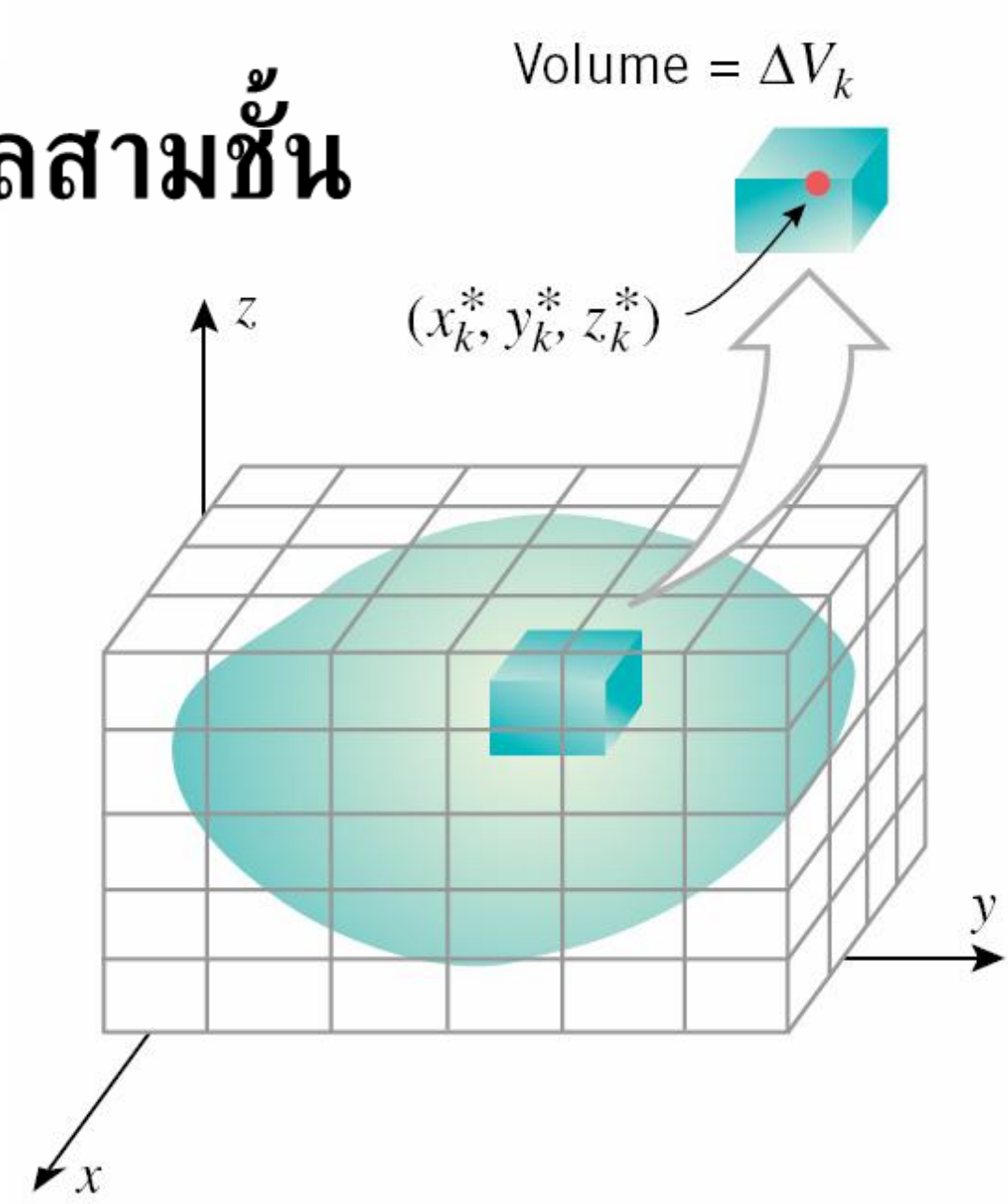
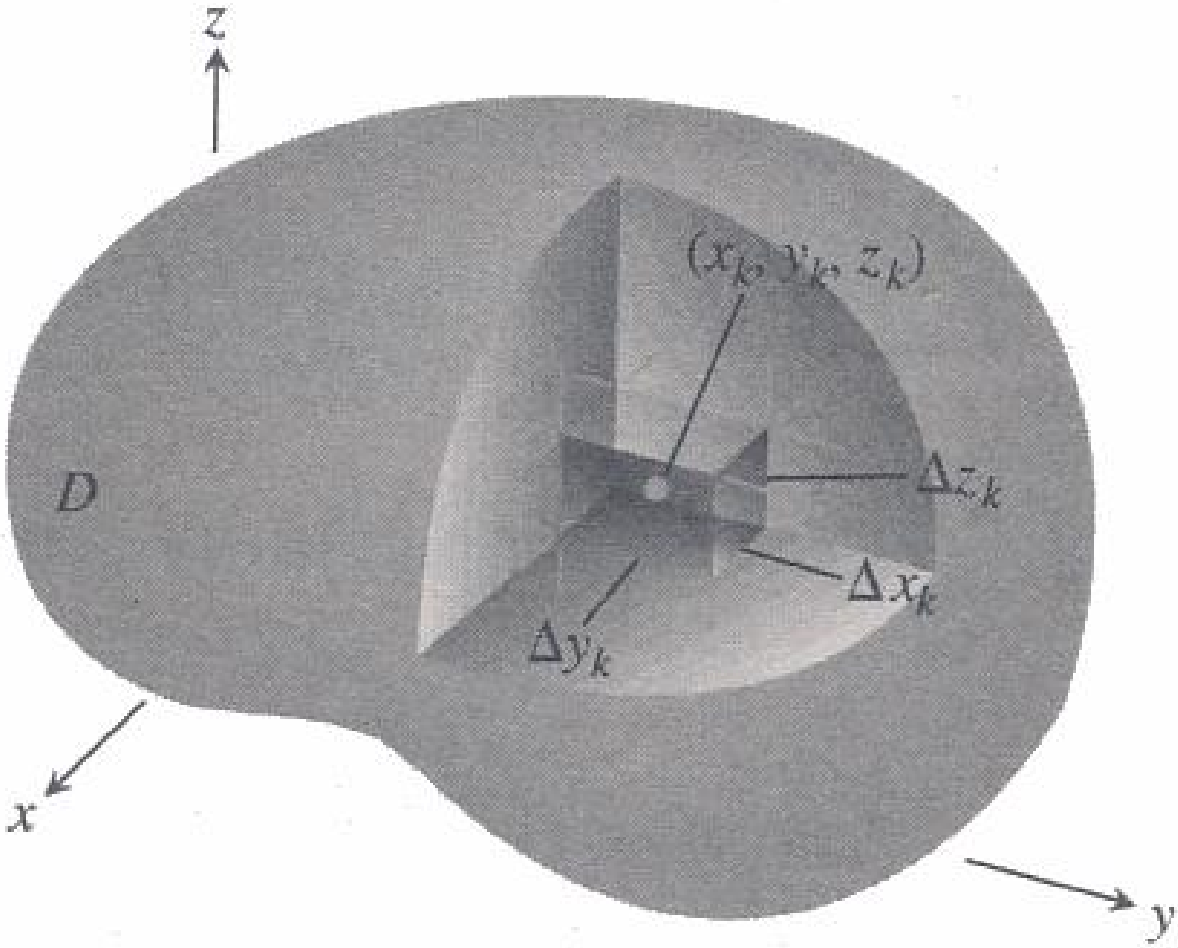
อินทิกรัลสามชั้น




z
(x_k, y_k, z_k)
D
Δz_k
Δx_k
Δy_k
x
y

เราใช้สัญลักษณ์

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV$$

หรือ $$\iiint_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

แทนการหาค่าอินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$

บนปริมาตร G โดยที่ $dV = dx\,dy\,dz$

คุณสมบัติของการหาค่าอินทิกรัลสามชั้น

- ค่าอินทิกรัลของค่าคงที่ k คูณกับฟังก์ชัน มีค่าเท่ากับค่าคงที่ k คูณกับค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน

$$\int\int_G\int kf(x,y,z)\,dV = k\int\int_G\int f(x,y,z)\,dV$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใดๆ

- ค่าอินทิกรัลของผลบวก (และผลต่าง) ของฟังก์ชัน เท่ากับ ผลบวก (และผลต่าง) ของค่าอินทิกรัลของแต่ละฟังก์ชัน

$$\iiint_G [f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]\ dV$$

$$= \iiint_G f(x,y,z)\ dV \pm \iiint_G g(x,y,z)\ dV$$

เราอาจจะเขียนรวมคุณสมบัติทั้งสองได้เป็น

1. คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้น

$$\iiint_G [c_1 f(x,y,z) \pm c_2 g(x,y,z)]\ dV$$

$$= c_1 \iiint_G f(x,y,z)\ dV \pm c_2 \iiint_G g(x,y,z)\ dV$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

2. ค่าปริพันธ์ของฟังก์ชันที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์บนทรงตัน G จะมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์

$$\iiint_G f(x,y,z)\ dV \geq 0,$$

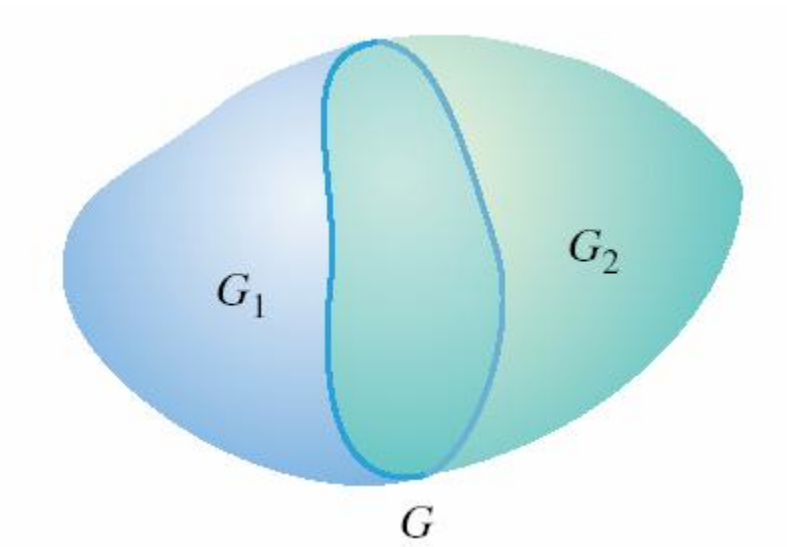
เมื่อ $f(x,y,z) \geq 0$ บน G

3. ถ้าฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับฟังก์ชัน $g(x, y, z)$ บนปริมาตร G แล้ว ค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ บนปริมาตร G จะมีค่ามากกว่าค่าอินทิกรัลของ $g(x, y, z)$ บนปริมาตร G

$$\int\int_G\int f(x, y, z)\ dV \geq \int\int_G\int g(x, y, z)\ dG$$

เมื่อ $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ บนปริมาตร G

4. ถ้าปริมาตร G ถูกแบ่งเป็นสองส่วน G_1 และ G_2, ค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ บนปริมาตร G จะมีค่าเท่ากับผลรวมของค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ บนปริมาตร G_1 กับค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน $f(x, y, z)$ บนปริมาตร G_2 เมื่อปริมาตร G เท่ากับผลรวมของปริมาตร G_1 และ G_2



$$\iiint\limits_{G} f(x,y,z)\,dV =$$

$$\iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)\,dV,$$

ทฤษฎีบท 3.1 (ทฤษฎีบทการหาค่าอินทิกรัลสามชั้นบนลูกบาศก์). *ถ้า* G *เป็นลูกบาศก์ ซึ่งนิยามโดย* $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ *และ* $k \leq z \leq l$ *โดยมีฟังก์ชันฟังก์ชัน* $f(x, y, z)$ *ต่อเนื่องบนปริมาตร* G *แล้ว*

$$
\begin{aligned}
\int\int_G\int f(x,y,z)\ dV &= \int_a^b\int_c^d\int_k^l f(x,y,z)\ dz\ dy\ dx \\
&= \int_c^d\int_a^b\int_k^l f(x,y,z)\ dz\ dx\ dy \\
&= \int_a^b\int_k^l\int_c^d f(x,y,z)\ dy\ dz\ dx \\
&= \int_k^l\int_a^b\int_c^d f(x,y,z)\ dy\ dx\ dz \\
&= \int_c^d\int_k^l\int_a^b f(x,y,z)\ dx\ dz\ dy \\
&= \int_k^l\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\ dx\ dy\ dz
\end{aligned}
$$

จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นของ

$$\iiint_G 12xy^2z^3 \, dV$$

เมื่อ G นิยามโดย $-1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$ และ $0 \leq z \leq 2$

จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นของ

$$\int_{1}^{e}\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^{3}y^{2}z}\,dxdydz$$

จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นของ

$$\int_{1/3}^{1/2} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{1} zx \sin xy \, dz \, dy \, dx$$

จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นของ

$$\int_0^1 \int_1^{z^2+1} \int_1^y \frac{1}{x^3}\, dxdydz$$

จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นของ

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1+z^2}} \int_{0}^{\tan y} \frac{1}{1+x^2}\, dxdydz$$

จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นของ

$$\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} x e^y \, dy \, dz \, dx$$

จงหาค่าปริพันธ์ $\int_0^1 \int_0^{\frac{\ln x}{2}} \int_0^{e^y} e^y \, dz \, dy \, dx$

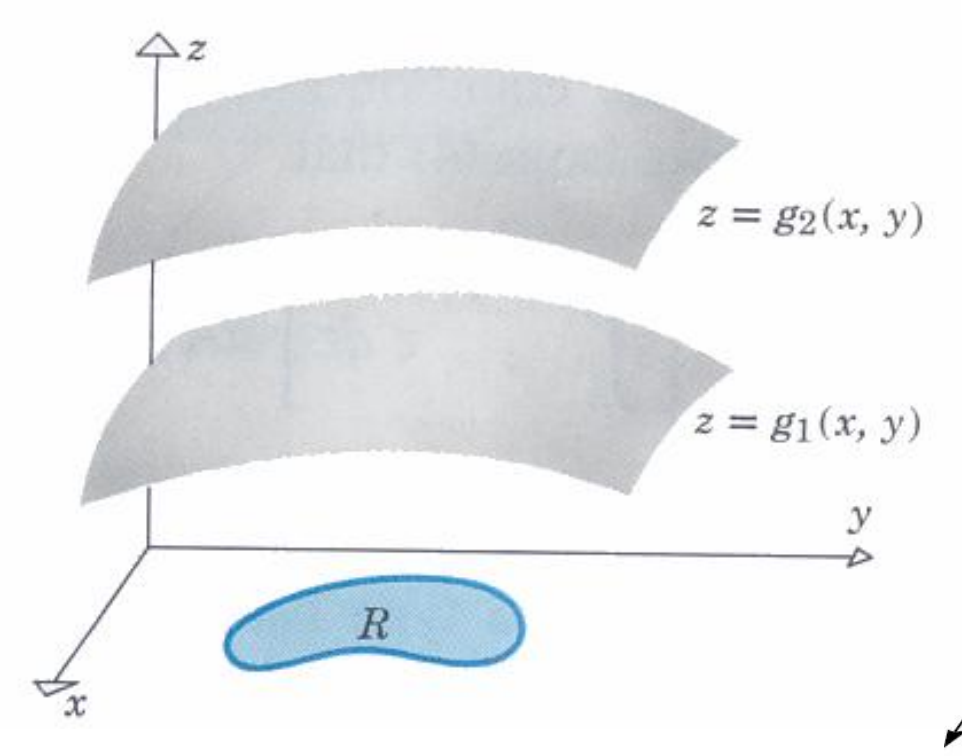
(1) $-\frac{3}{4}$

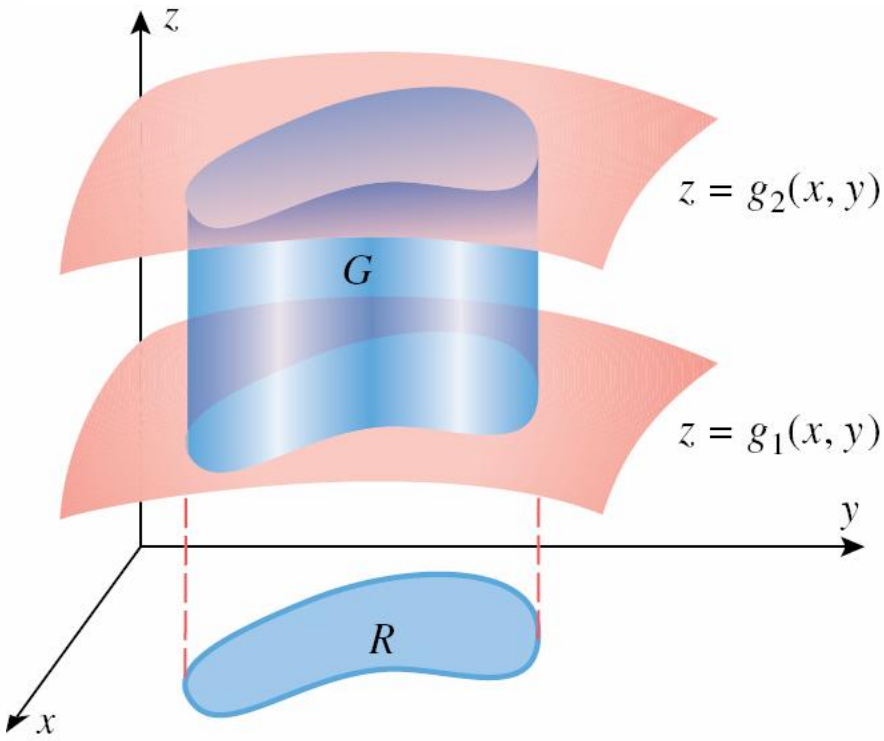
(2) $-\frac{1}{4}$

(3) 1

(4) $\frac{1}{4}$

(5) $\frac{3}{4}$





พื้นที่ปิด R

พื้นที่ผิว $z=g_1(x,y)$

พื้นที่ผิว $z=g_2(x,y)$

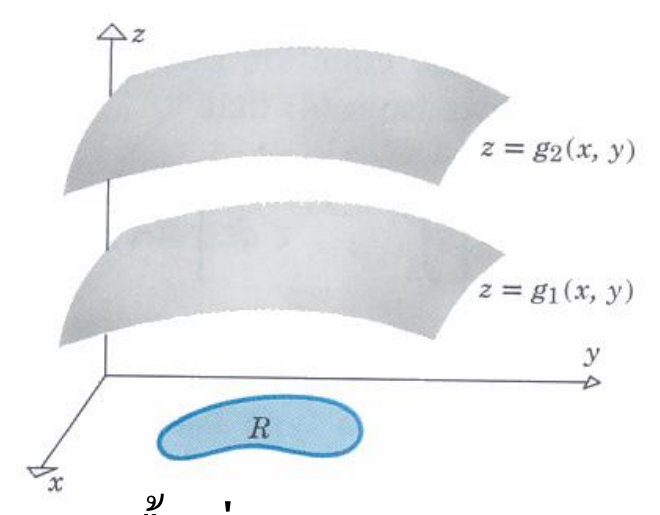
รูปทรงตันอย่างง่าย

บทนิยาม 3.1 (ทรงตันอย่างง่าย). ให้ R เป็นพื้นที่ปิดในระนาบ xy และให้ $g_1(x,y)$ และ $g_2(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องซึ่ง

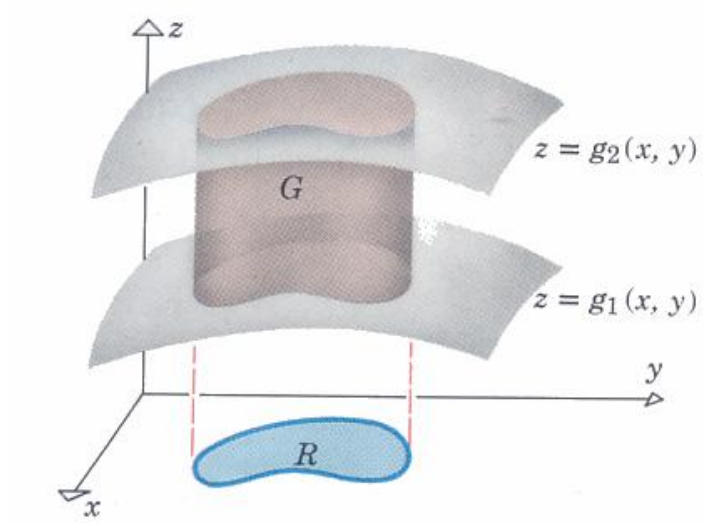
$$g_1(x,y) \leq g_2(x,y),$$

สำหรับทุกๆ $(x,y) \in R$ ถ้าเราพิจารณาในเชิงเรขาคณิต พบว่า พื้นที่ผิว $z = g_2(x,y)$ จะเป็นพื้นที่ผิว ที่อยู่เหนือพื้นที่ผิว $z = g_1(x,y)$

เราเรียก พื้นที่ผิว $z = g_2(x, y)$ ว่า*พื้นที่ผิวบน* (upper surface) และเรียก พื้นที่ผิว $z = g_1(x, y)$ ว่า*พื้นที่ผิวล่าง* (lower surface)



พื้นที่ปิด R
พื้นที่ผิว $z=g_1(x,y)$
พื้นที่ผิว $z=g_2(x,y)$



รูปทรงตันอย่างง่าย

เราเรียกปริมาตร G ซึ่งบรรจุจุดต่างๆซึ่งอยู่*เหนือหรือ ใต้ พื้นที่ R โดยอยู่ระหว่างพื้นที่ผิว $z = g_1(x, y)$ และ $z = g_2(x, y)$* ว่า*ทรงตันอย่างง่าย* (simple solid) และ เรียกพื้นที่ R ว่า *ภาพฉายของ G บนระนาบ xy* (projection of G on the xy-plane)

เพื่อความสะดวก เราจะเรียก "*ทรงตันอย่างง่าย*" ว่า "*ทรงตัน*"

ขั้นตอนการหาค่าอินทิกรัลสามชั้น

$$\iiint_G f(x,y,z)\,dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$

1. หาสมการของพื้นที่ผิวล่าง $z = g_1(x,y)$ และพื้นที่ผิวบน $z = g_2(x,y)$ ของทรงตัน G ฟังก์ชัน $g_1(x,y)$ และ $g_2(x,y)$ จะเป็นค่าลิมิตล่างและบนของการหาค่าอินทิกรัล

2. หาค่าอินทิกรัลย่อย

$$\tilde{f}(x,y) = \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\ dz$$

ค่าอินทิกรัลที่ได้ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และ y

3. พิจารณาภาพฉาย R ซึ่งเกิดจากการฉายภาพทรงตัน G ลงบนระนาบ xy และทำการหาค่า**อินทิกรัลสองชั้น** ของฟังก์ชัน $\tilde{f}(x,y)$ บนพื้นที่ R

$$\int\int_G\int f(x,y,z)\,dV = \int\int_R \tilde{f}(x,y)\,dA$$

จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นของ

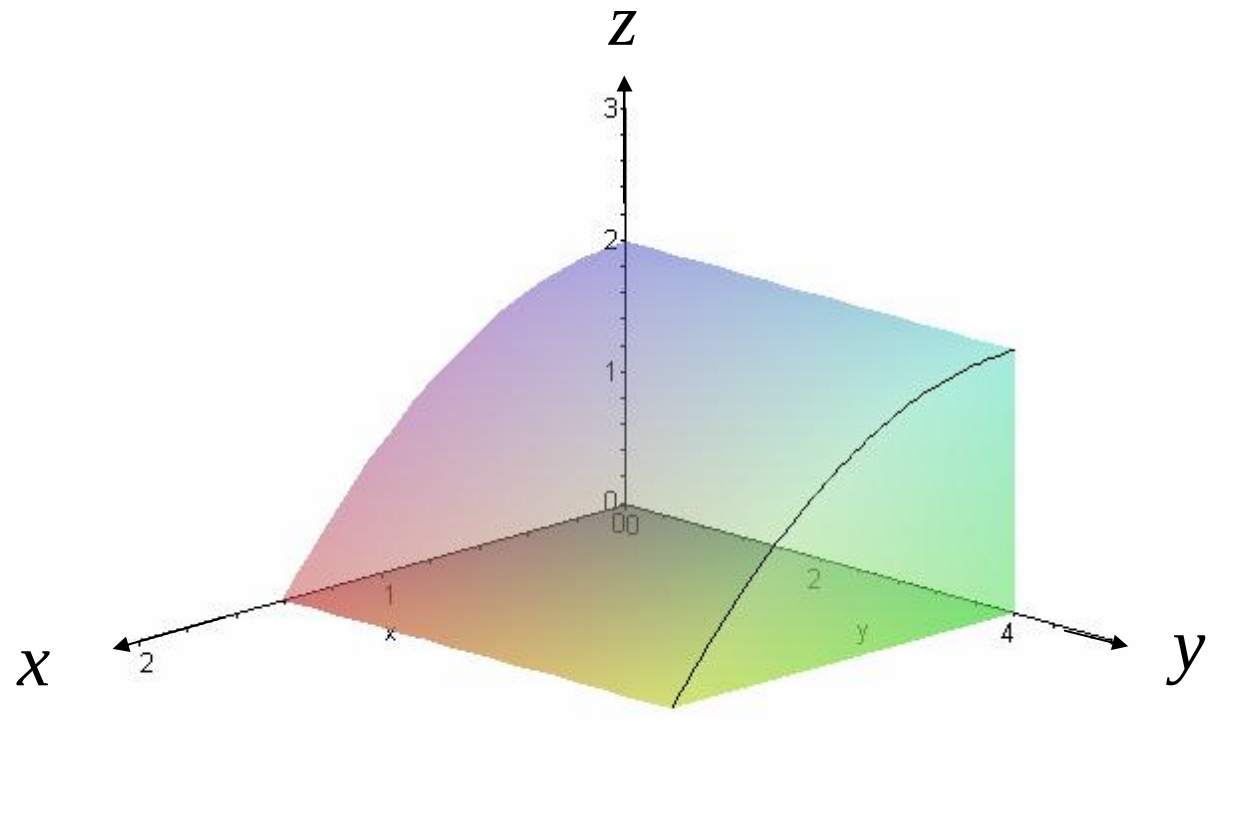
$$\iiint_G xyz\, dV$$

เมื่อ G คือทรงตันในอัฐภาค (octant) ที่ 1

ซึ่งถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิว

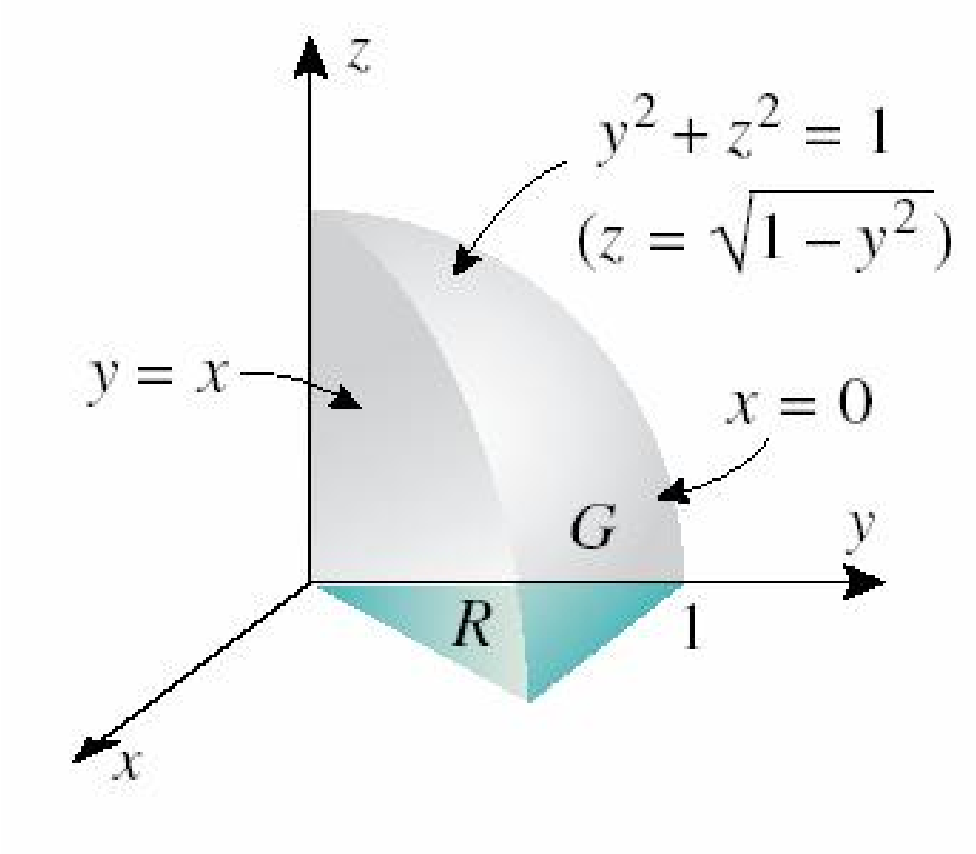
$z = 2 - x^2 \qquad z = 0 \qquad y = 0$

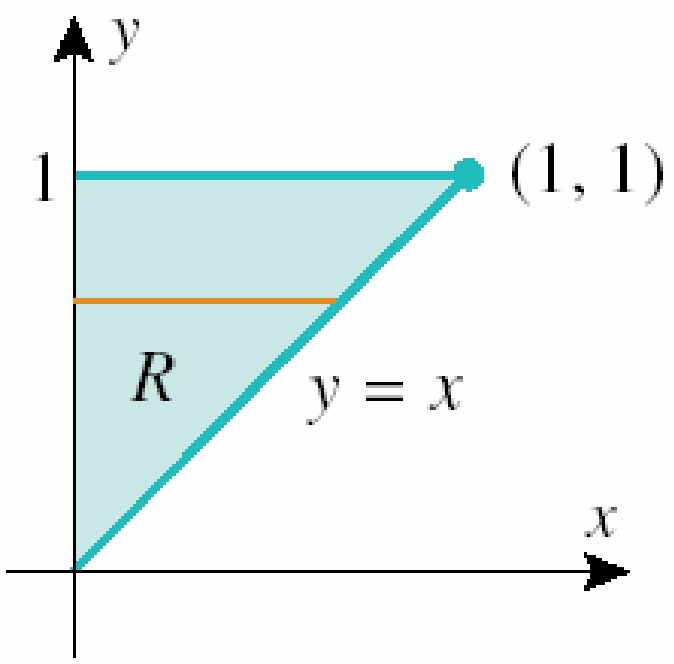
และ $y = 4$


z
3
2
1
0
00
1
x
2
2
y
4
x
y

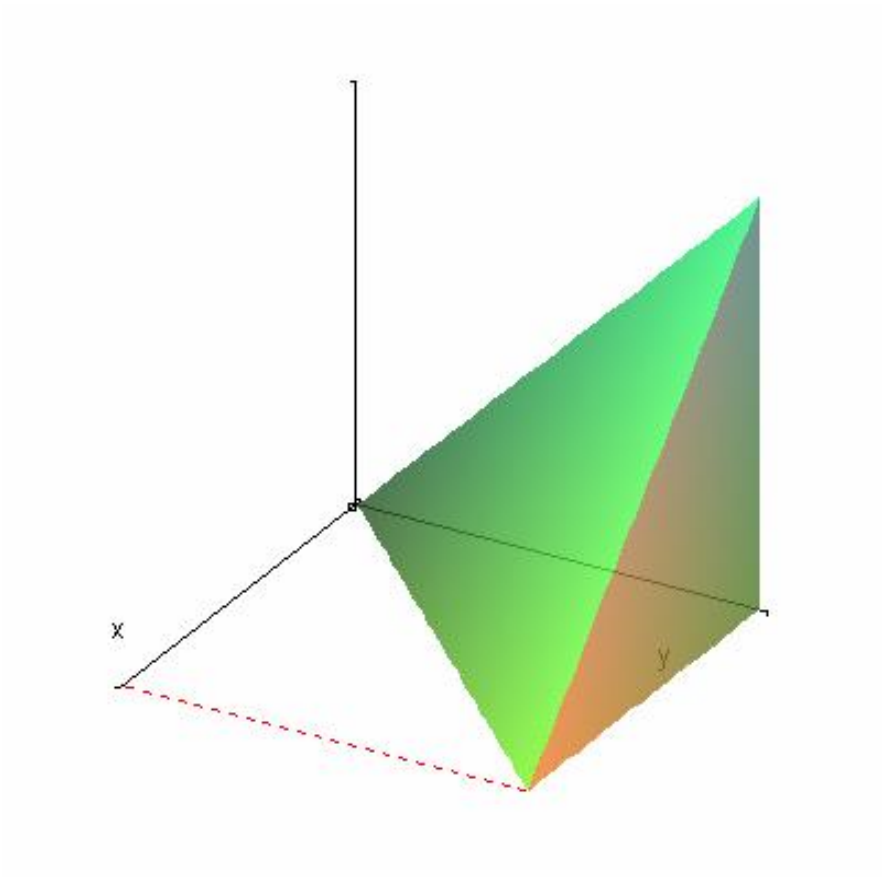
ตัวอย่าง 3.2. ให้ G เป็นปริมาตรรูปลิ่ม ซึ่งอยู่ในอัตภาค (octant) ปิดล้อมด้วยทรงตันรูปทรงกระบอก $y^2 + z^2 \leq 1$ และระนาบ $y = x$ และ $x = 0$ จงหาค่า

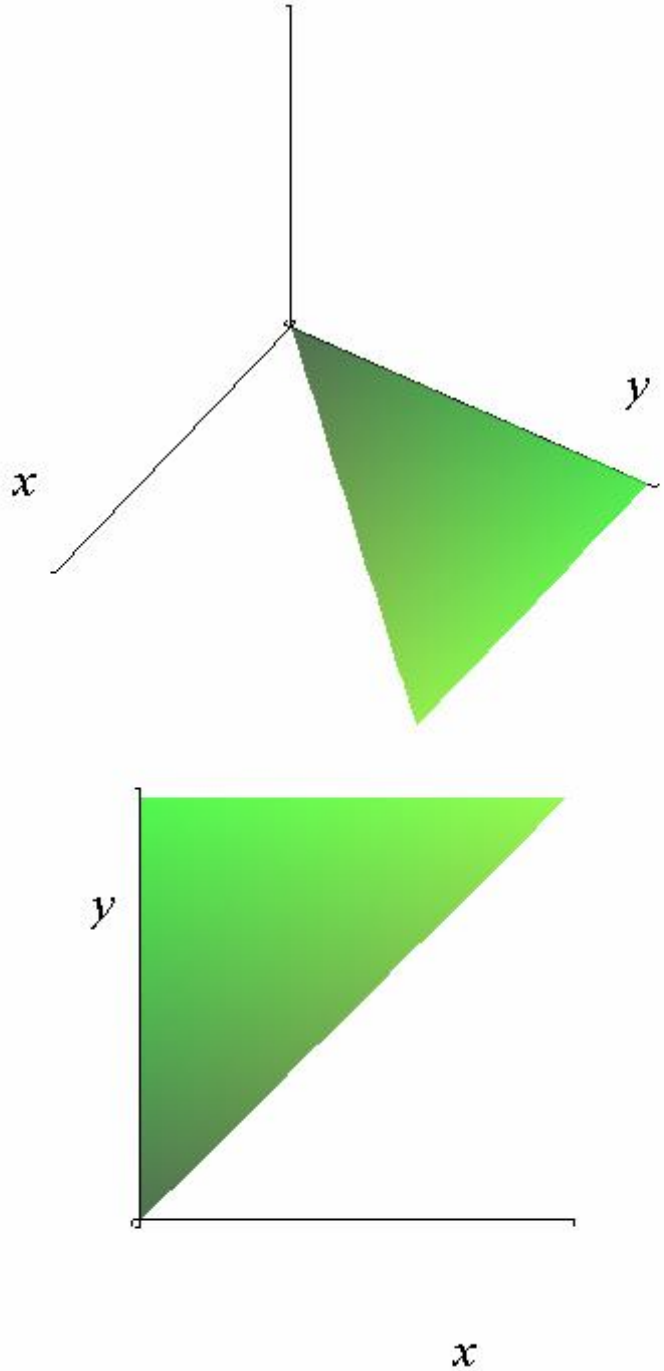
$$\int\int_G\int z \; dV$$


z
$y^2 + z^2 = 1$
$(z = \sqrt{1 - y^2})$
$y = x$
$x = 0$
G
y
R
1
x


y
1
(1, 1)
R
$y = x$
x

ตัวอย่าง 3.3. จงหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน $f(x, y, z) = xyz$ บนทรงตันรูปทรงปิรามิด ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$ และ $(0, 1, 1)$


x
y


y
x
y
x

พิจารณาทรงตันรูปปิรามิดซึ่งมีจุดยอดที่จุด (0,0,0) , (1,0,0) , (1,1,0) และ (1,1,1) จงหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชัน

$$f(x, y, z) = x$$

บนทรงตันดังกล่าว

พิจารณาทรงตัน G ซึ่งอยู่ใน

<u>อัฐภาค (octant) ที่หนึ่ง</u>

และถูกปิดล้อมด้วยระนาบ

$$5x + 10y + z = 10$$

จงหาสมการเส้นตรง ซึ่งเกิดจากการตัดกัน

ของระนาบ $5x + 10y + z = 10$ และระนาบ xy

บริเวณภาพฉาย R ของทรงตัน G บนระนาบ xy คือข้อใด

(1) $0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le \dfrac{x}{2}$

(2) $0 \le y \le 2, \quad 0 \le x \le 2y$

(3) $0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le 2 - 2y$

(4) $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2 - 2x$

(5) $0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2x$

พื้นที่ของบริเวณ R มีค่าเท่ากับเท่าใด

(1) $\frac{2}{3}$ ตารางหน่วย

(2) 1 ตารางหน่วย

(3) $\frac{4}{3}$ ตารางหน่วย

(4) $\frac{10}{3}$ ตารางหน่วย

(5) $\frac{20}{3}$ ตารางหน่วย

ปริมาตรของทรงตัน G มีค่าเท่ากับเท่าใด

(1) $\frac{2}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย

(2) 1 ลูกบาศก์หน่วย

(3) $\frac{4}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย

(4) $\frac{10}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย

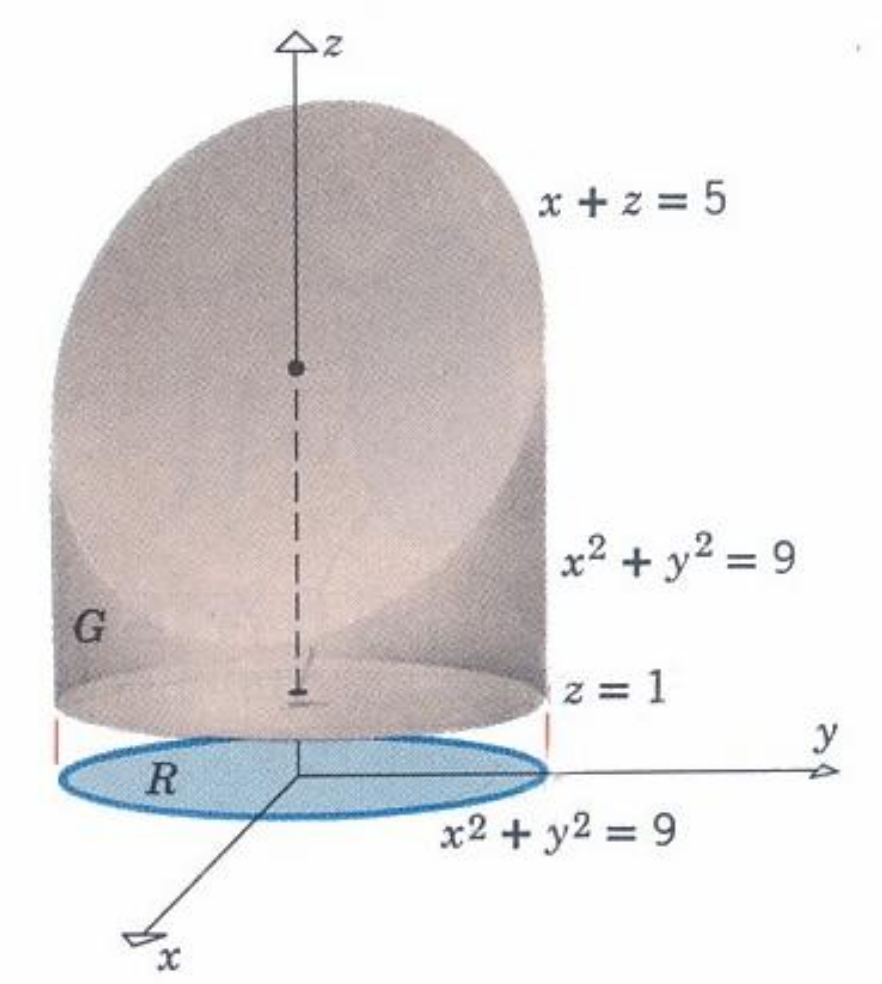
(5) $\frac{20}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย

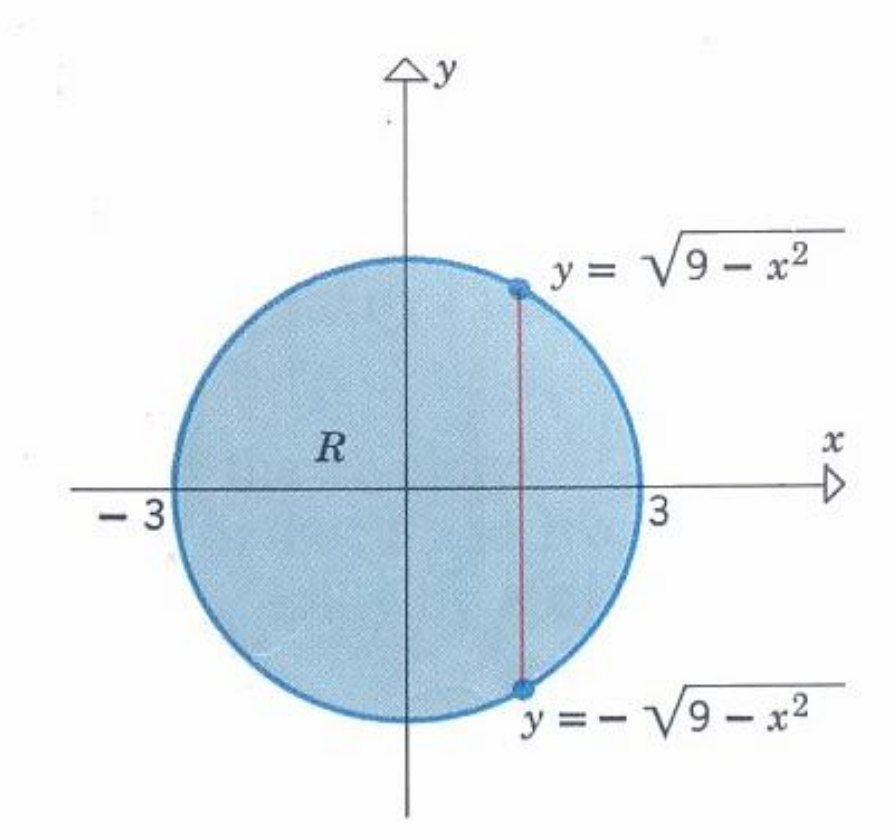
แบบฝึกหัด

จงหาปริมาตรของทรงตันรูปทรงปิรามิดที่มีฐานเป็นสี่เหลี่ยมจตุรัส ยาวด้านละ a หน่วย และสูง h หน่วย

จงหาค่าอินทิกรัล $\iiint_G y\,dV$

เมื่อ G เป็นทรงตันซึ่งถูกปิดล้อมด้วย ทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 9$ ระนาบ $z = 1$ และระนาบ $x + z = 5$


z
x + z = 5
x² + y² = 9
G
z = 1
y
R
x² + y² = 9
x


y
y = √(9 − x²)
R
x
− 3
3
y = − √(9 − x²)