ระบบพิกัดเชิงขั้ว

สำหรับระบบพิกัดเชิงขั้ว เมื่อกล่าวถึงพิกัด (r, θ) จะหมายถึงจุด ซึ่งหาได้จากพิจารณา ค่า r ถ้า r มีค่าเป็น 0 ก็จะหมายถึงจุดกำเนิด $(0, 0)$ ถ้ามีค่ามากกว่าศูนย์ จะกำหนดจุดดังกล่าวโดยวัดระยะจากจุดกำเนิด**ไปทางขวา**เป็นระยะทาง r หน่วย จากนั้นพิจารณาค่ามุม θ

_ ถ้า θ มีค่าเป็นบวก จะหมายถึงให้หมุนจุดดังกล่าวรอบจุดกำเนิดในทิศทาง**ทวนเข็มนาฬิกา** เป็นมุม θ แต่ถ้า θ มีค่าเป็นลบ จะหมายถึงให้หมุนจุดดังกล่าวรอบจุดกำเนิดในทิศทาง**ตามเข็มนาฬิกา** เป็นมุม θ

สำหรับกรณีค่า r น้อยกว่าศูนย์ จะกำหนดจุดดังกล่าวโดยวัดระยะจากจุดกำเนิด**ไปทางซ้าย**เป็นระยะทาง r หน่วย แล้วก็หมุนจุดนั้นรอบจุดกำเนิดด้วยมุม θ เหมือนดังกรณี r มีค่ามากกว่าศูนย์

เพื่อความสะดวก ภายหลังจากนี้ จะใช้สัญลักษณ์ (x, y) แทนจุดในระบบพิกัดฉาก และใช้สัญลักษณ์ (r, θ) แทนจุดในระบบพิกัดเชิงขั้ว ยกเว้นว่าในเนื้อหาบางส่วน จะมีการแจ้งว่าจะใช้สัญลักษณ์อื่น

เมื่อกำหนดจุด (x, y) ในระบบพิกัดฉากมา เรา

สามารถแปลงให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้วได้คือ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{และ} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

โดยพิจารณา θ ให้อยู่ในช่วง $(-\pi, \pi]$

<u>**หมายเหตุ**</u> $r^2 = x^2 + y^2$ $\qquad \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

และในทางกลับกัน เมื่อกำหนดจุด (r, θ) ใน พิกัดเชิงขั้ว เราสามารถแปลงให้อยู่ในระบบพิกัดฉากได้

$$x = r\cos\theta \qquad \text{และ} \qquad y = r\sin\theta$$

$$x = 10, y = 10$$

$$x = 13, y = 12$$

$$x = 11\sqrt{3}, y = 11$$

$$y = x$$

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9 - y^2}$$

$$x = -\sqrt{9 - y^2}$$

$$y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{9 - x^2}$$

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1$$

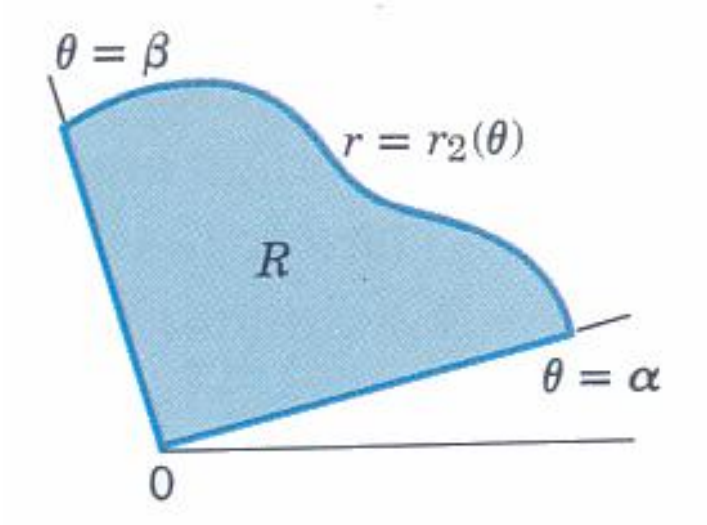
จงวาดรูปกราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้

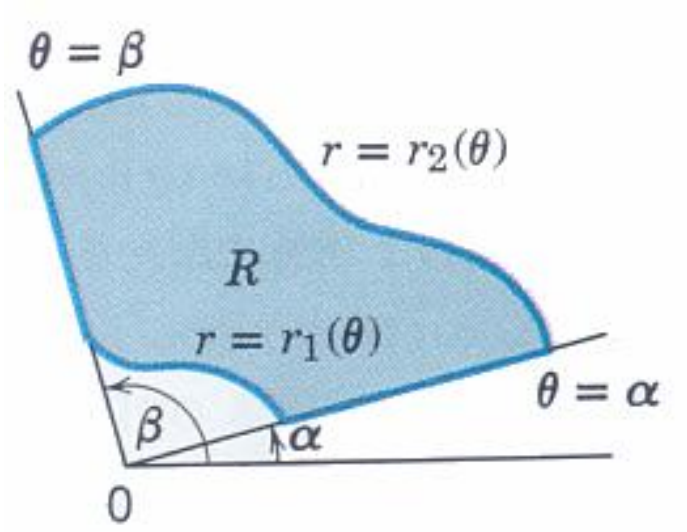
$$r = 2$$

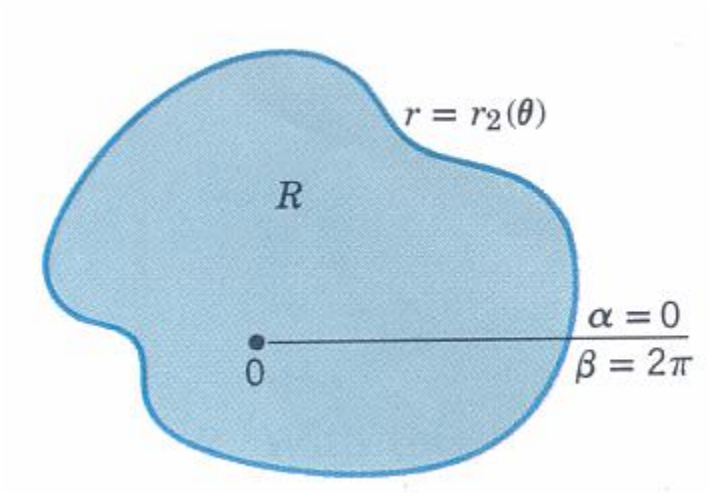
$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$r = 2(1 + \cos\theta)$$

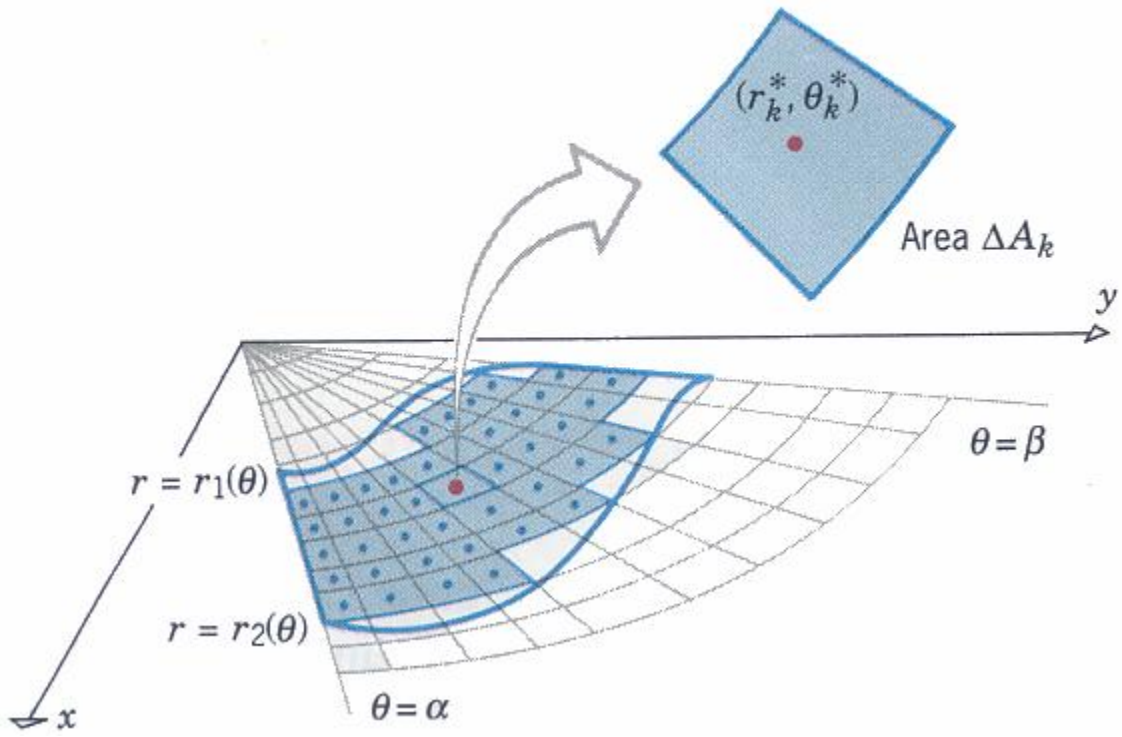
$$r = 2\sin\theta$$

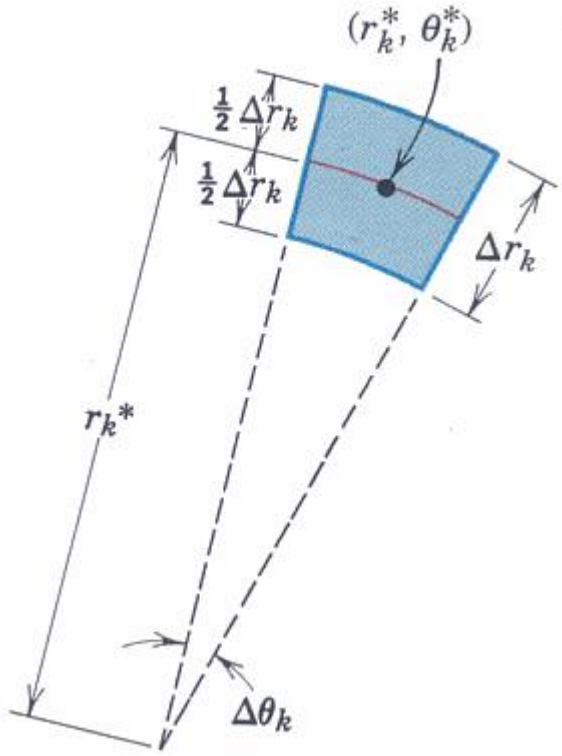

$\theta = \beta$
$r = r_2(\theta)$
R
$\theta = \alpha$
0

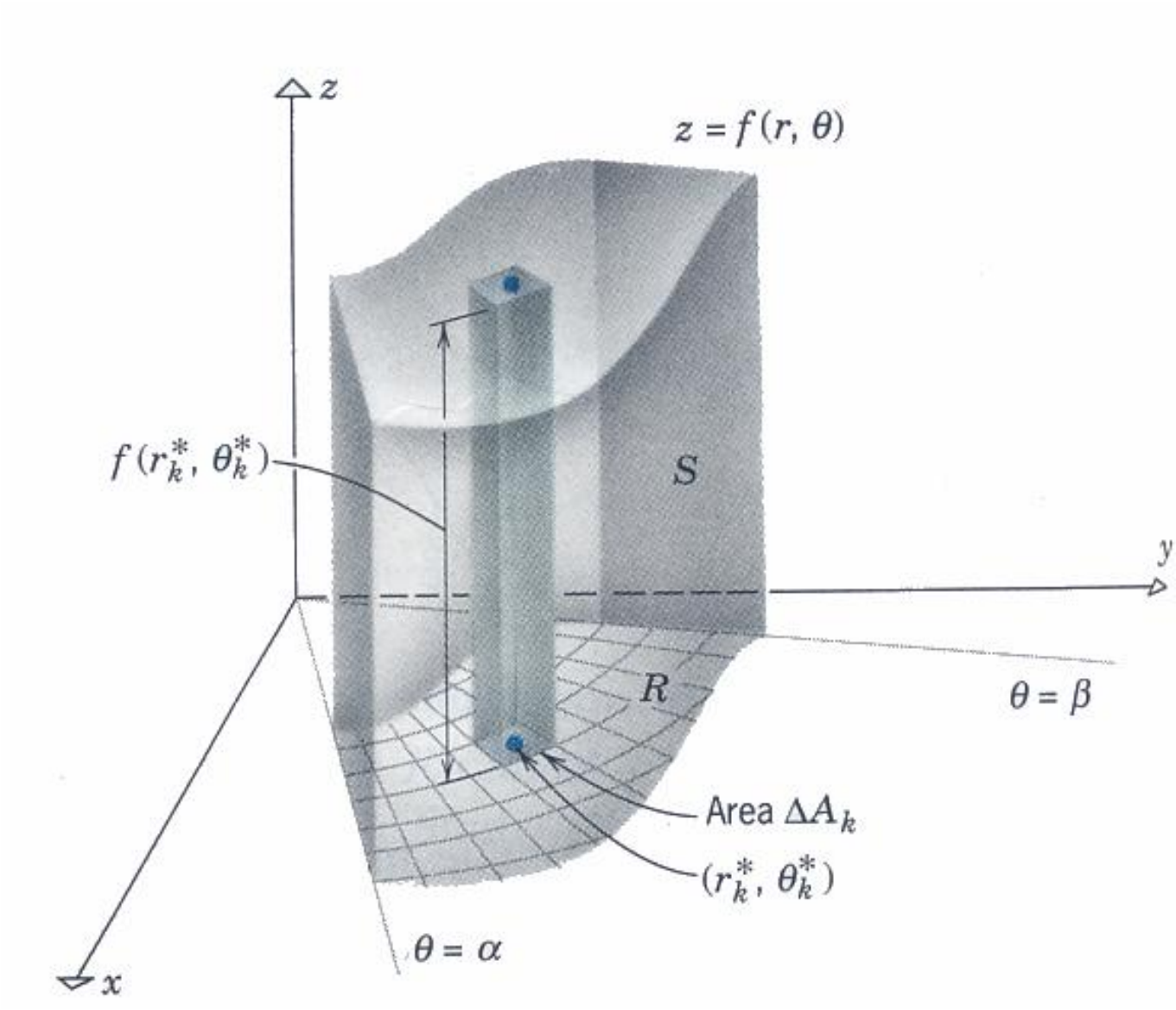

$\theta = \beta$
$r = r_2(\theta)$
R
$r = r_1(\theta)$
$\theta = \alpha$
β
α
0


$r = r_2(\theta)$
R
$\alpha = 0$
$\beta = 2\pi$
0

การหาค่าปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงขั้ว



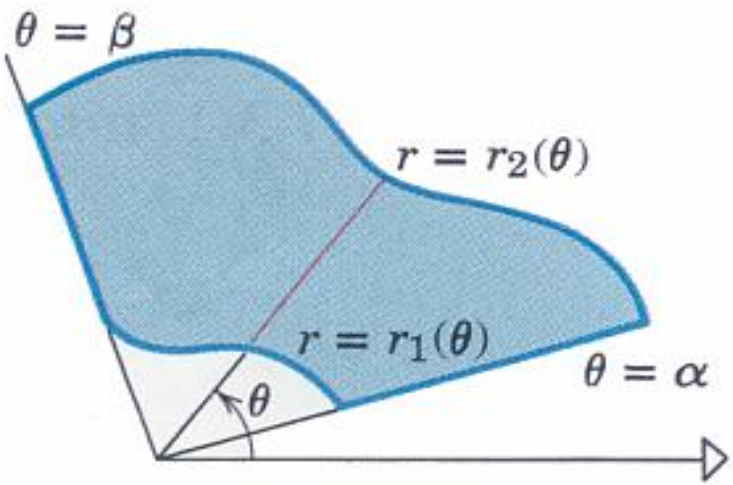



z
$z = f(r, \theta)$
$f(r_k^*, \theta_k^*)$
S
y
R
$\theta = \beta$
Area ΔA_k
(r_k^*, θ_k^*)
$\theta = \alpha$
x

ทฤษฎีบท 3.1 (การหาค่าปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว)

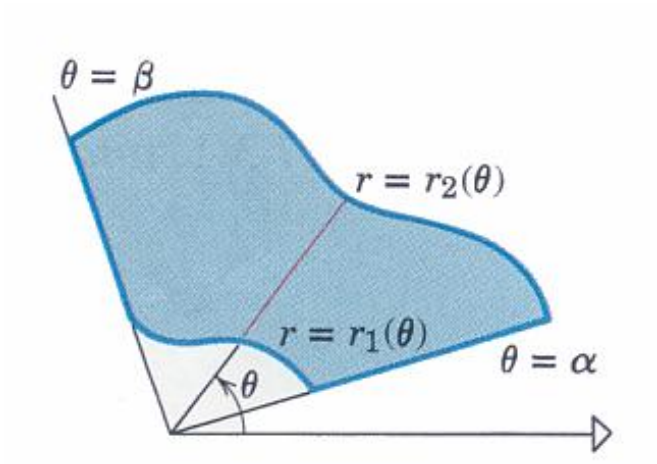
ถ้า $f(r,\theta)$ *เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณ* R *แล้ว*

$$\iint_R f(r,\theta)\ dA = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta) r\ dr\ d\theta$$



ขั้นตอนวิธีการหาค่าปริพันธ์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. ตรึงมุม θ เสมือนว่า θ เป็นค่าคงตัว จากนั้นลากเส้นรัศมีจากจุดศูนย์กลางไปยังพื้นที่ R โดยเส้นตรงซึ่งเป็นรัศมีนั้นทำมุม θ



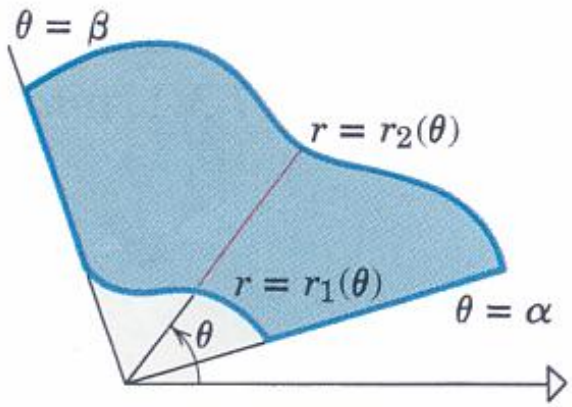
เส้นรัศมีนี้ ต้องตัดพื้นที่ R **สองครั้ง**

จุดตัดจุดแรกต้องเป็นจุดบนเส้นโค้ง $r = r_1(\theta)$

จุดตัดที่สองต้องเป็นจุดบนเส้นโค้ง $r = r_2(\theta)$

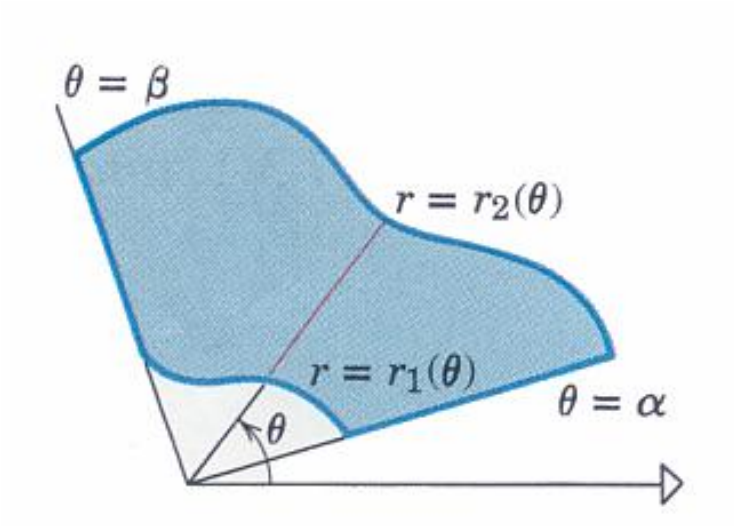
ซึ่งทำให้เราสามารถหาค่าปริพันธ์ย่อยได้

$$\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta) r \; dr$$



2. พิจารณามุมของเส้นตรงรัศมีที่กวาดผ่านพื้นที่ R โดยให้ลากเส้นตรงรัศมีจากจุดกำเนิดไปทางขวา จากนั้นเริ่มหมุนเส้นตรงรัศมีดังกล่าวรอบจุดกำเนิดไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เรียกมุมเมื่อเส้นตรงรัศมีพบกับพื้นที่ R ครั้งแรกว่ามุม α และเรียกมุมเมื่อรัศมีตัดกับพื้นที่ R เป็นจุดสุดท้ายว่ามุม β ทำได้เราหาค่าปริพันธ์ได้คือ

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta) r \; dr \; d\theta$$



จงหาค่าปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน e^{r^2} **ในระบบพิกัดเชิงขั้ว**

เมื่อ $0 \le r \le \sqrt{\ln 3}$ **และ** $0 \le \theta \le \pi$

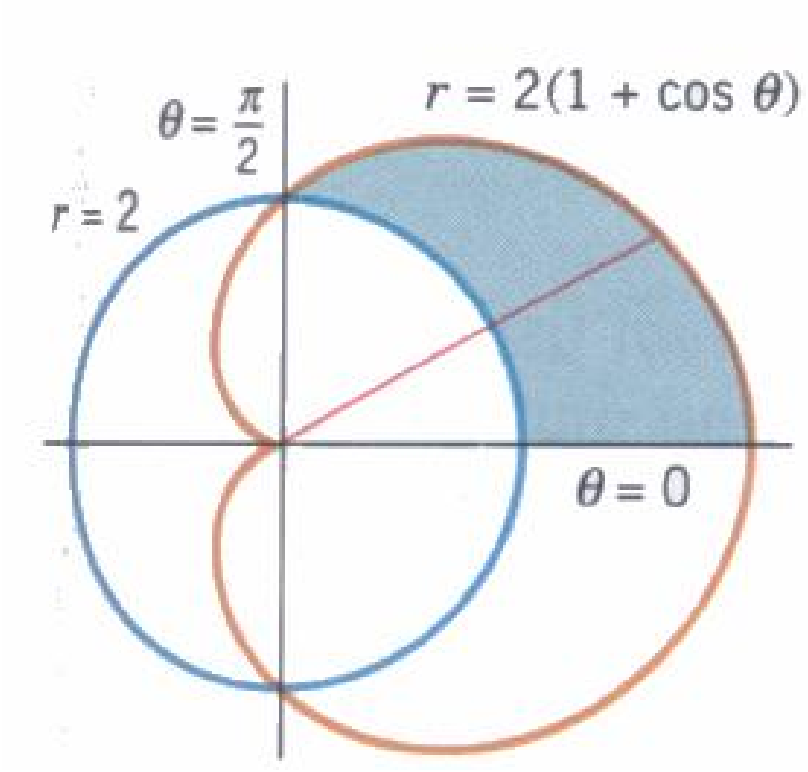
จงหาค่าปริพันธ์ $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin\theta} r\cos\theta \, dr \, d\theta$

จงหาค่าของ $\displaystyle\iint_R \sin\theta \; dA$

เมื่อ R คือ พื้นที่ในจตุภาค (quadrant) ที่หนึ่ง ซึ่ง

อยู่นอกวงกลม $r = 2$ และ อยู่ภายในรูปหัวใจ

$$r = 2(1 + \cos\theta)$$


$\theta = \frac{\pi}{2}$
$r = 2(1 + \cos\theta)$
$r = 2$
$\theta = 0$

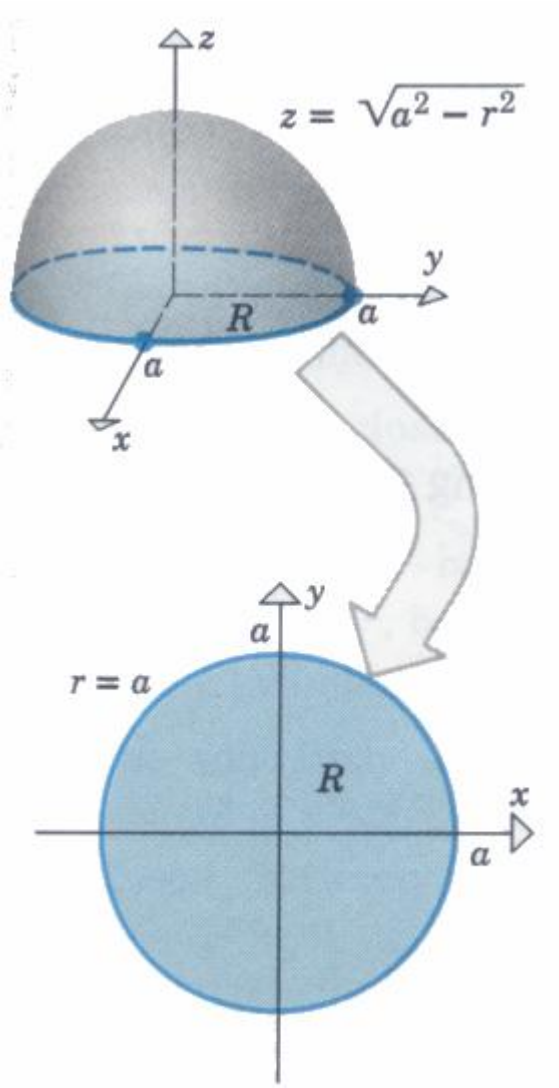
Evaluate

1. $$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin\theta} r\cos\theta \, dr \, d\theta$$

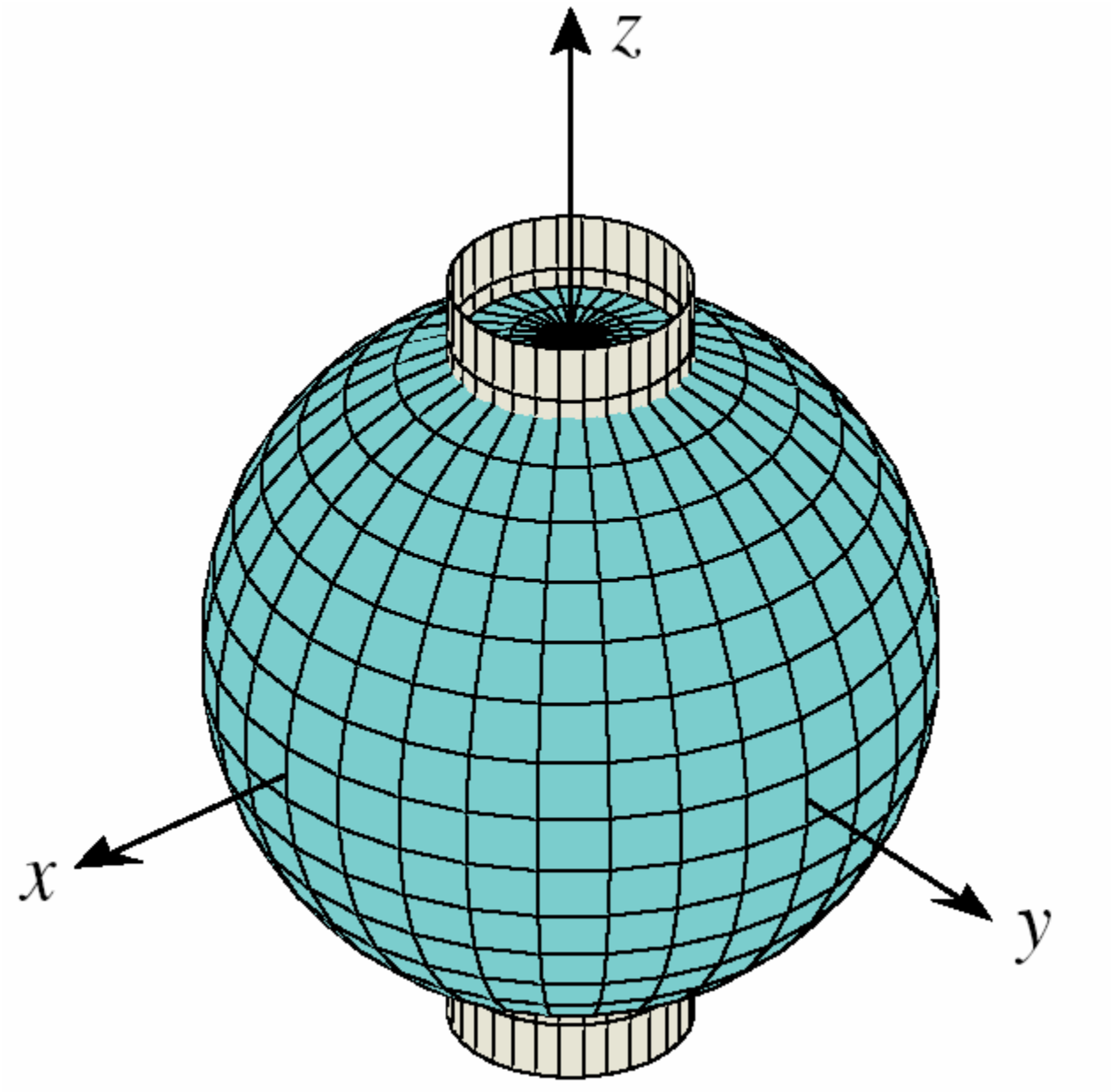
2. $$\int_0^{\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r \, dr \, d\theta$$

3. $$\int_0^{\pi/6} \int_0^{\cos 3\theta} r \, dr \, d\theta$$

จงหาปริมาตรของทรงกลมที่มีรัศมี a

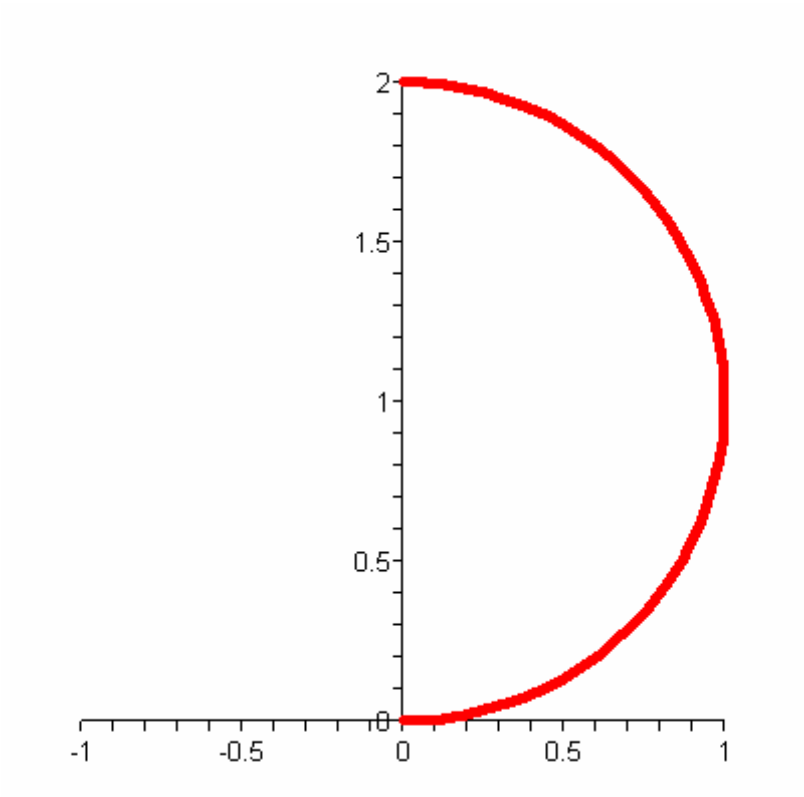


ถ้านำลูกสนุกเกอร์ลูกหนึ่งมีลักษณะเป็นทรงกลม และมีรัศมี 3 เซนติเมตร มาเจาะรูให้ทะลุแนวกลาง ด้วยดอกสว่านซึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลาง 1 เซนติเมตร จงหาปริมาตรของลูกสนุกเกอร์นี้ภายหลังจากการเจาะแล้ว


z
x
y

จงหาพื้นที่ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad \text{และ} \quad 0 \le r \le 2\sin\theta$$



$$x^2 + (y-1)^2 = 1$$

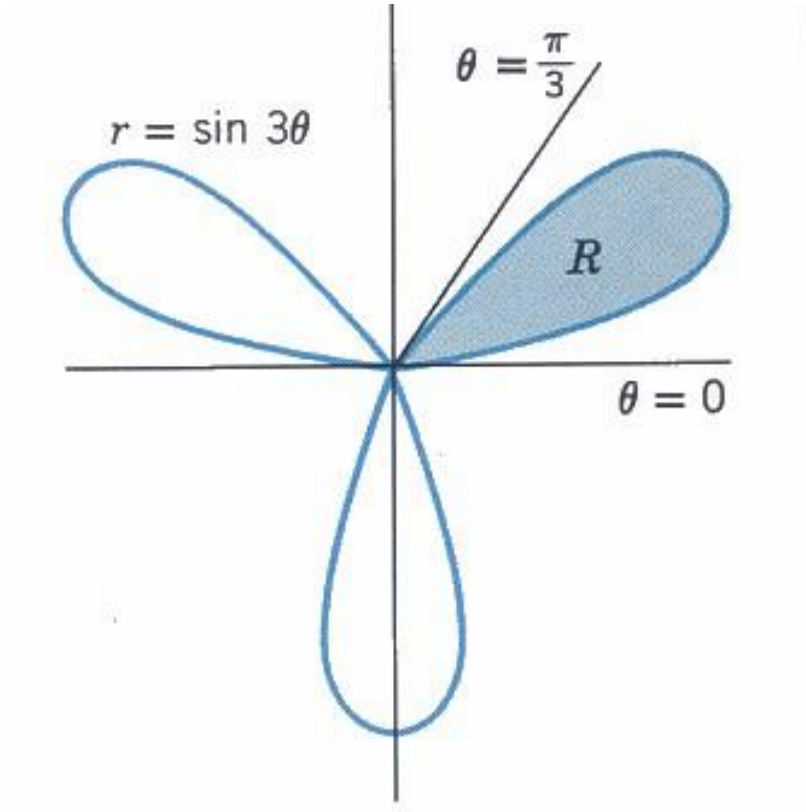
จงหาพื้นที่ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไข

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \text{ และ } 0 \leq r \leq 2\sin\theta$$

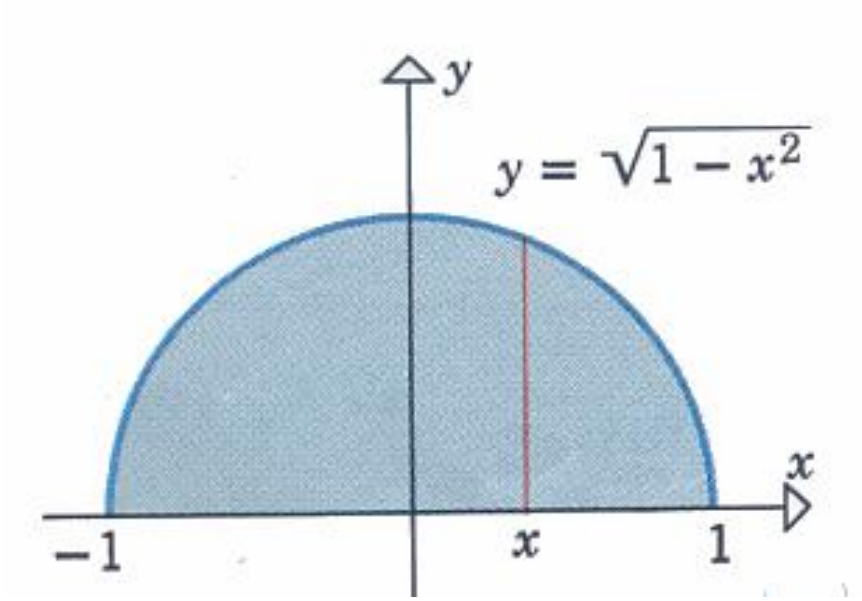
จงใช้การหาค่าอินทิกรัลสองชั้นในพิกัด

เชิงขั้ว หาพื้นซึ่งปิดล้อมด้วย**สมการดอกกุหลาบสามกลีบ**

(the three-petaled rose equation) $r = \sin 3\theta$



จงหาค่า $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dy\, dx$


y
$y = \sqrt{1 - x^2}$
x
−1
x
1

จงหาค่า $\displaystyle\iint_R \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dA$

เมื่อ R คือพื้นที่

ส่วนของวงกลมในจตุภาคที่หนึ่ง ซึ่งปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = 0$ และ

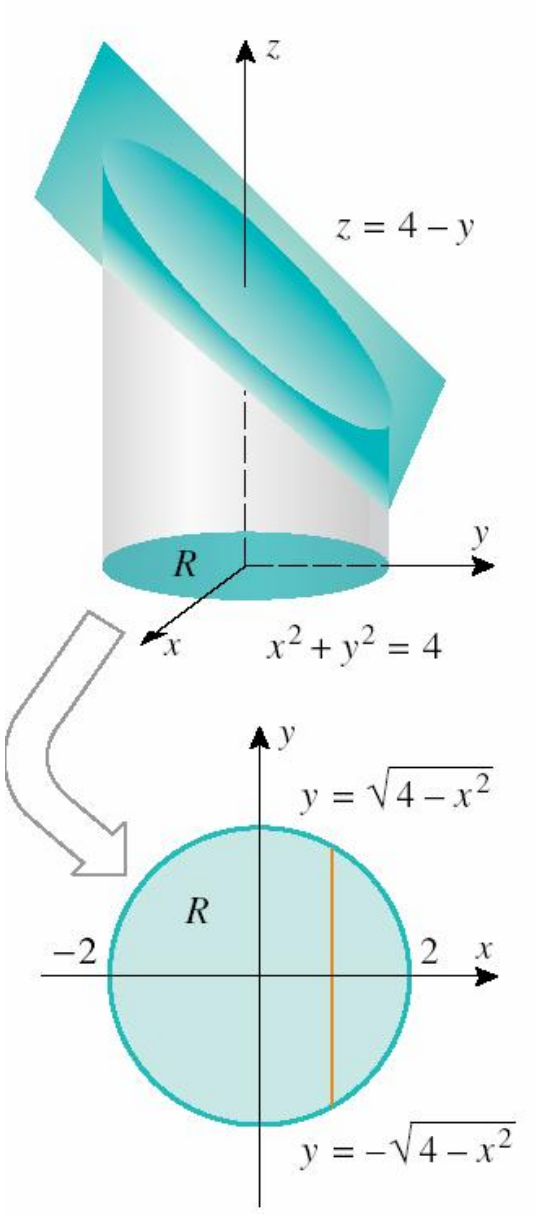
$y = x$ และเส้นโค้ง $x^2 + y^2 = 4$

จงหาปริมาตรซึ่งถูกปิดล้อมด้วย

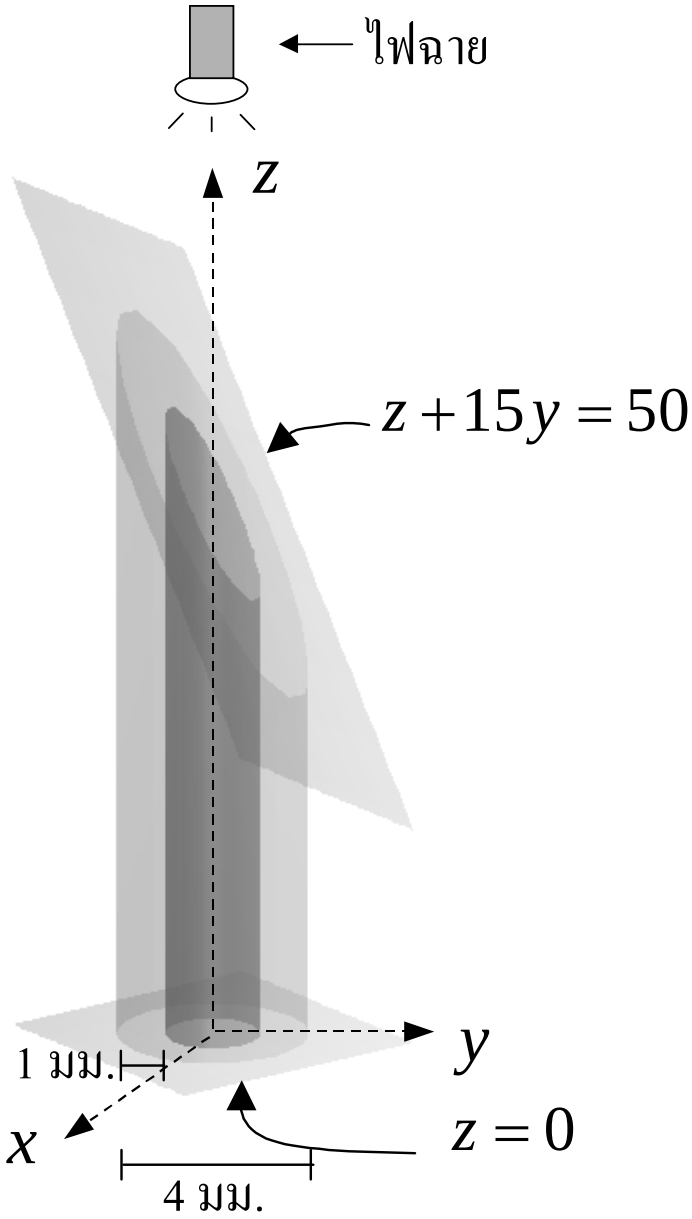
ทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$

ระนาบ $y + z = 4$

และระนาบ $z = 0$


z
z = 4 − y
y
R
x
x² + y² = 4
y
y = √(4 − x²)
R
−2
2
x
y = −√(4 − x²)

จงหาปริมาตรของเหล็กที่จะใช้ทำปลายเข็มฉีดยาสำหรับผสมเทียม ซึ่งปลายเข็มฉีดยามีลักษณะดังรูปที่กำหนดให้ ซึ่งมีลักษณะเป็นทรงกระบอกกลวงตรงกลาง โดยมี**เส้นผ่านศูนย์กลาง** 4 มิลลิเมตร และผนังของปลายเข็มฉีดยามี**ความหนา** 1 มิลลิเมตร ระนาบปลายเข็มฉีดยาด้านหนึ่งเอียงซึ่งเป็นไปตาม สมการ $z+15y=50$ และปลายอีกด้านหนึ่งเป็นไปตามสมการ $z=0$


ไฟฉาย
z
z + 15y = 50
y
1 มม.
x
z = 0
4 มม.

พิจารณาทรงตัน G ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยผิวโค้ง $9x^2+9y^2=4$ ระนาบ $y+z=9$ และระนาบ $z=1$

ปริมาตรของทรงตัน G มีค่าเท่ากับเท่าใด

(1) 4π ลูกบาศก์หน่วย

(2) 16π ลูกบาศก์หน่วย

(3) $\frac{64\pi}{9}$ ลูกบาศก์หน่วย

(4) $\frac{32\pi}{9}$ ลูกบาศก์หน่วย

(5) $\frac{32\pi}{3}$ ลูกบาศก์หน่วย

พิจารณาทรงตัน G ซึ่งถูกปิดล้อมด้วย
ผิวโค้ง $x^2 + y^2 = 4$ ผิวโค้ง $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
และระนาบ $z = 0$

ปริมาตรของทรงตัน G มีค่าเท่ากับเท่าใด

(1) 4π **ลูกบาศก์หน่วย** **(2)** 8π **ลูกบาศก์หน่วย**

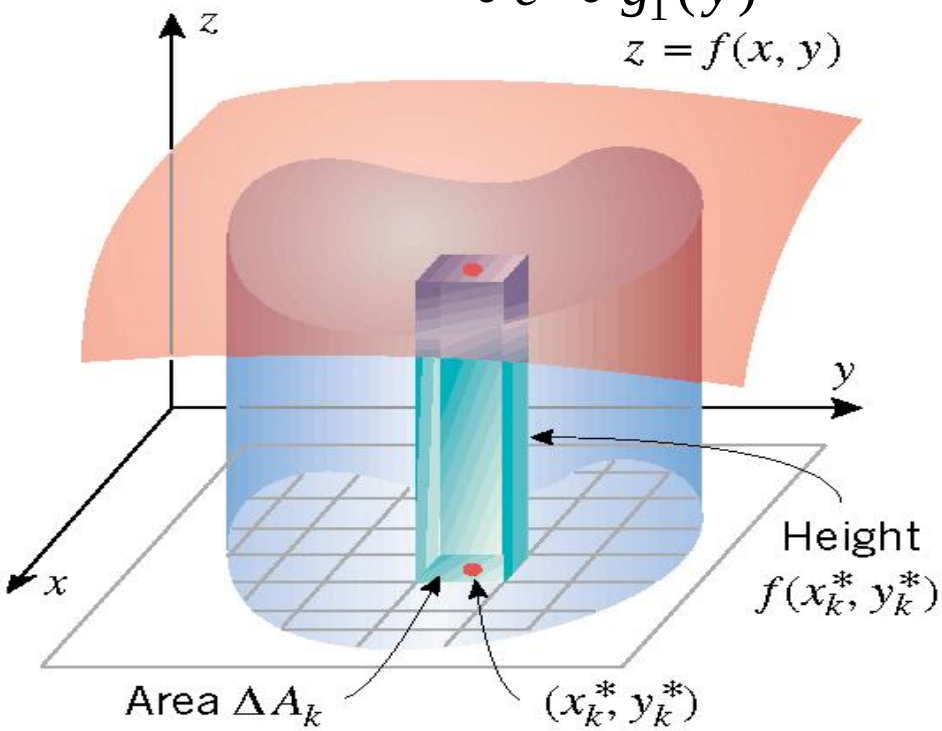
(3) $\dfrac{8\pi}{3}$ **ลูกบาศก์หน่วย** **(4)** $\dfrac{16\pi}{3}$ **ลูกบาศก์หน่วย**

(5) $\dfrac{32\pi}{3}$ **ลูกบาศก์หน่วย**

การหาค่าอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดฉาก

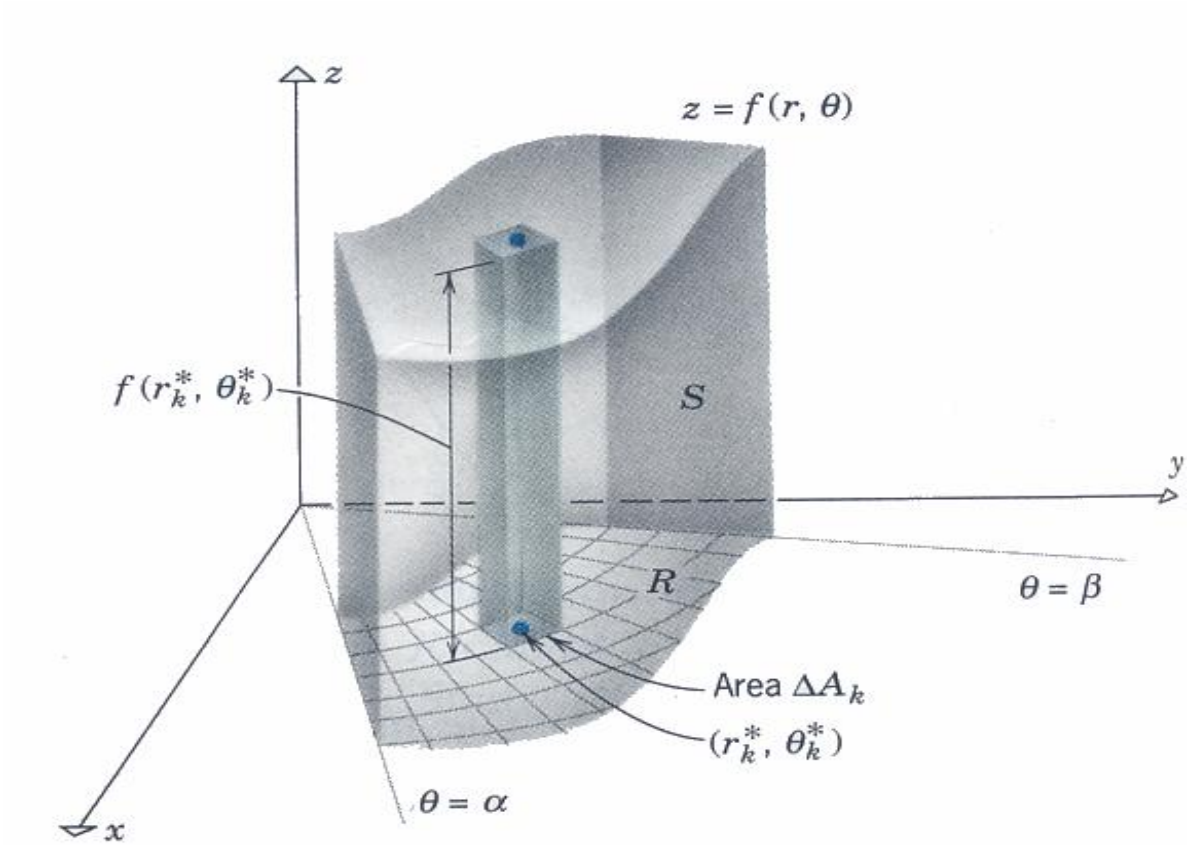
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\ dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\ dy$$

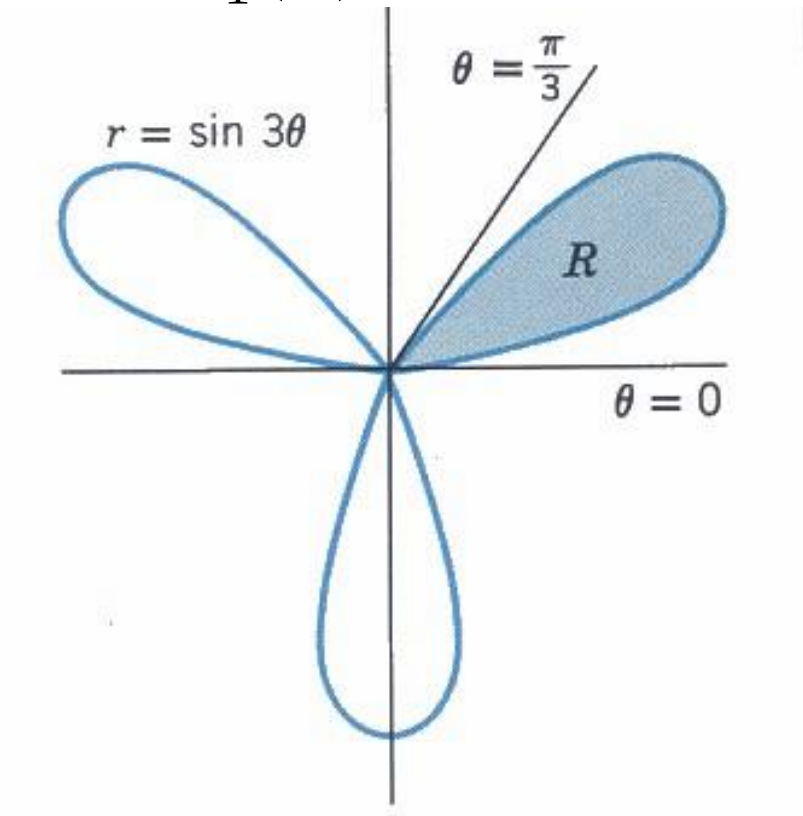
$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\ dx = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\ dy$$



การหาค่าอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r,\theta)r\ dr\ d\theta$$



การหาพื้นที่โดยการหาค่าอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} 1\, r dr\ d\theta$$