ทบทวนการหาปริพันธ์

1. $\int du = u + C$

2. $\int a\ du = au + C$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัวใดๆ

3. $\int [f(u) + g(u)]\, du = \int f(u)du + \int g(u)du$

4. ความเป็นเชิงเส้นของการหาค่าปริพันธ์

$$\int [c_1 f(u) + c_2 g(u)]\, du = c_1 \int f(u)du + c_2 \int g(u)du$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

5. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, เมื่อ $n \neq -1$

6. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

7. การหาค่าปริพันธ์ทีละส่วน (by parts integration)

$$\int u dv = uv - \int v du$$

8. $$\int \frac{u}{a+bu}du = \frac{1}{b^2}\left[bu - a\ln|a+bu|\right] + C$$

9. $$\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$$

10. $$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$$

11. $$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$$

12. $$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

13. $$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$$

14. $$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$$

15. $$\int u\sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{1}{3}\left(u^2 \pm a^2\right)^{3/2} + C$$

16. $$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

17. $$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$$

18. $$\int u\sqrt{a^2 - u^2} du = -\frac{1}{3} \left(a^2 - u^2\right)^{3/2} + C$$

19. $\int \sin u du = -\cos u + C$

20. $\int \cos u du = \sin u + C$

21. $\int \tan u du = \ln |\sec u| + C$

22. $\int \cot u du = \ln |\sin u| + C$

23. $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$

24. $\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + C$

25. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$

26. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$

27. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$

28. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$

29. $\int e^u du = e^u + C$

30. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

จากแนวคิดในการปริพันธ์จำกัดเขตของฟังก์ชัน f จาก a ถึง b

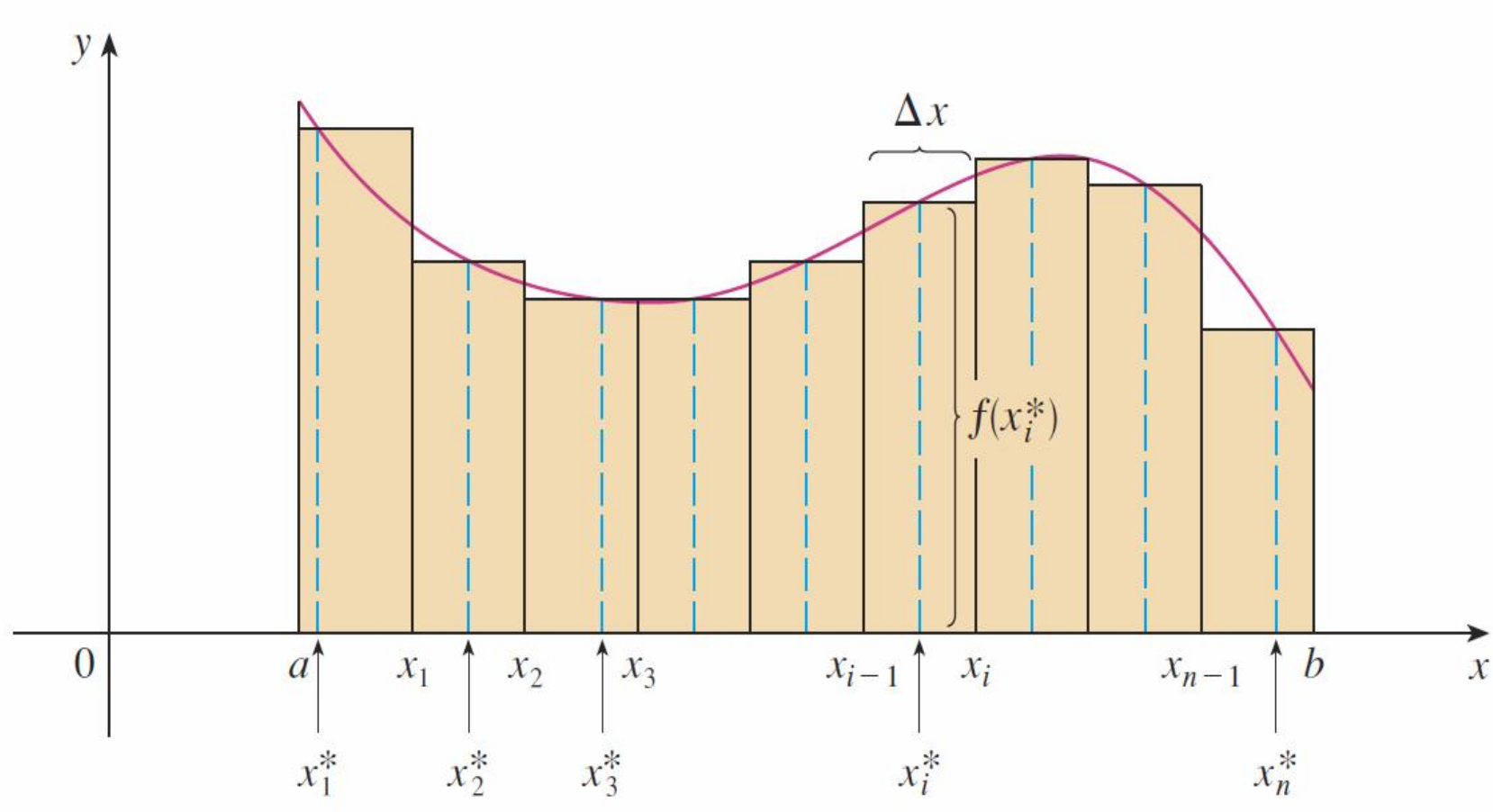
ถ้าฟังก์ชัน f นิยามเมื่อ $a \le x \le b$ และเราสามารถแบ่งช่วง $[a,b]$ ได้เป็น n ช่วงด้วยความกว้าง $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

กำหนดให้ $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ เป็นจุดปลายของช่วงย่อยดังกล่าวและ $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ เป็นจุดซึ่ง $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n$

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$ หาค่าได้ เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน f หาปริพันธ์ได้ บนช่วง $[a,b]$ และเรียกสัญกรณ์

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

ว่า**ปริพันธ์จำกัดของของฟังก์ชัน f จาก a ถึง b**


y
Δx
f(x_i^*)
0
a
x_1
x_2
x_3
x_{i-1}
x_i
x_{n-1}
b
x
x_1^*
x_2^*
x_3^*
x_i^*
x_n^*

ซึ่งแนวคิดดังกล่าวทำให้สามารถหาพื้นที่ใต้กราฟของเส้นโค้ง $y=f(x)$ ระหว่าง $x=a$ และ $x=b$ ได้

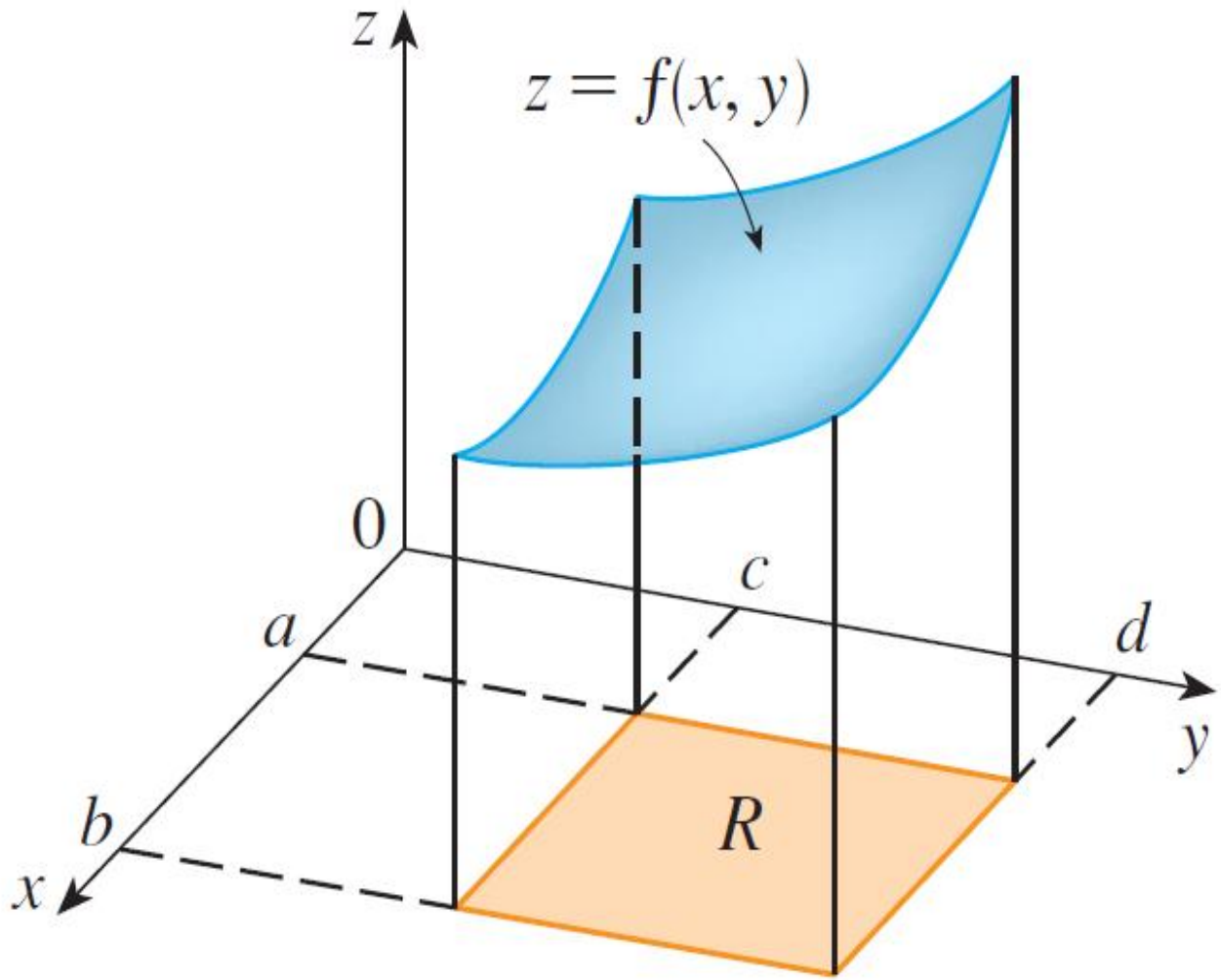
ในทำนองเดียวกันเราขยายแนวคิดไปสู่ฟังก์ชัน f ของสองตัวแปร นิยามบนเซต

$$R=[a,b]\times[c,d]=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b, c\le y\le d\right\}$$

ถ้าสมมติให้ $f(x,y)\ge 0$ เราสามารถร่างกราฟผิวโค้ง

$$z=f(x,y)$$

ได้ดังนี้


z
z = f(x, y)
0
c
a
d
y
b
R
x

ถ้ากำหนดให้ S เป็นทรงตันที่อยู่เหนือบริเวณ

$$R = [a,b]\times[c,d] = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\right\}$$

และอยู่ใต้ผิวโค้ง $z = f(x,y)$

นั่นคือ $S = \left\{(x,y,z) \mid 0 \le z \le f(x,y), (x,y)\in R\right\}$

เราจะสามารถหาปริมาตรของทรงตันดังกล่าวได้โดยพิจารณาจาก

เราจะแบ่งช่วง $[a,b]$ ได้เป็น m ช่วงด้วยความกว้าง $\Delta x = \dfrac{b-a}{m}$

โดยช่วงย่อย m ช่วงดังกล่าวคือ $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, m$

$x_0 = a, x_m = b$

ในทำนองเดียวกัน

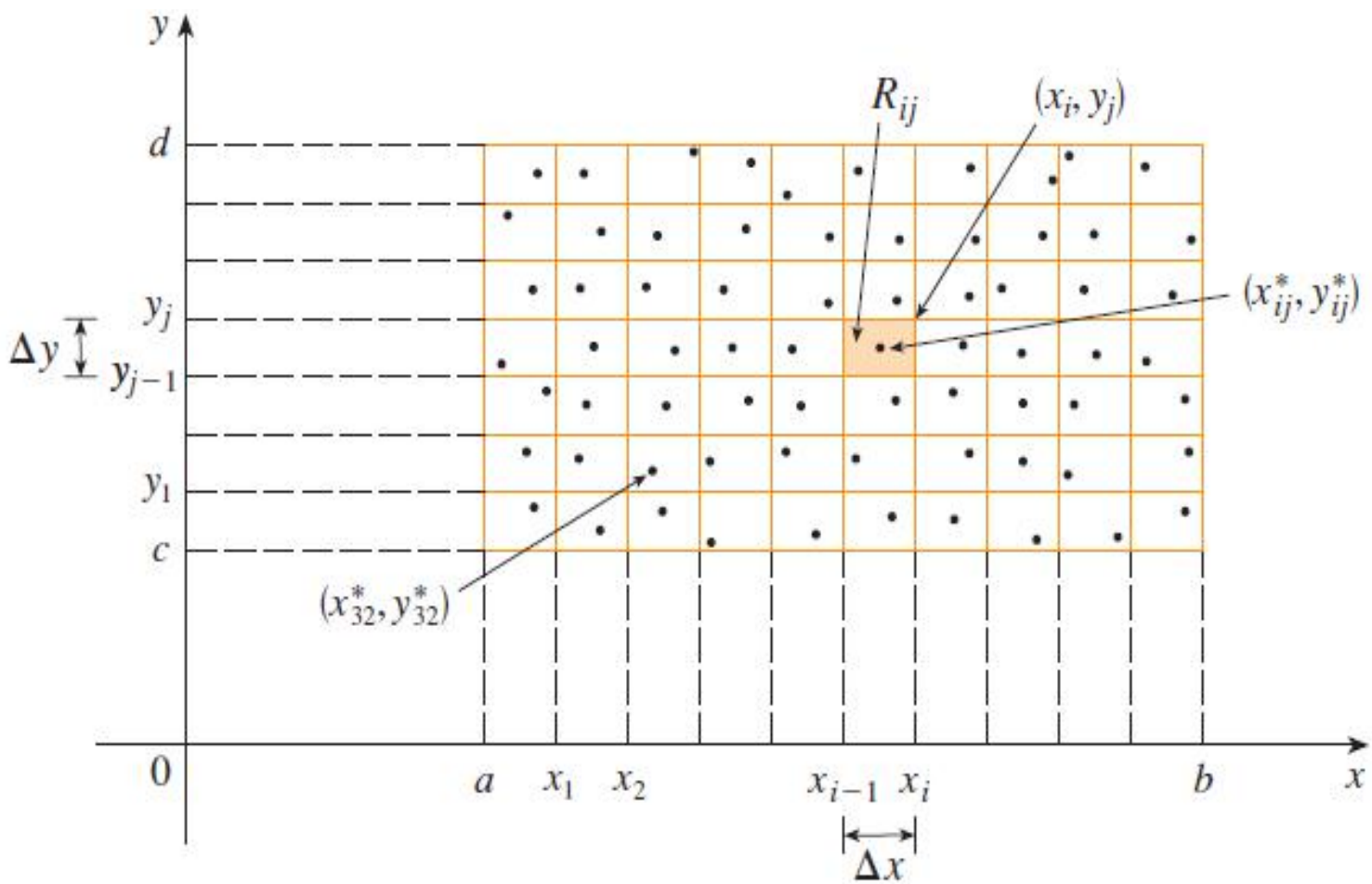
เราจะแบ่งช่วง $[c,d]$ ได้เป็น n ช่วงด้วยความกว้าง $\Delta y = \dfrac{d-c}{n}$

โดยช่วงย่อย n ช่วงดังกล่าวคือ $[y_{j-1}, y_j], j = 1, 2, \ldots, n$

$y_0 = c, y_n = d$

ดังนั้นบริเวณ R จะถูกแบ่งเป็นบริเวณย่อยจำนวน $m \times n$ บริเวณ ได้แก่

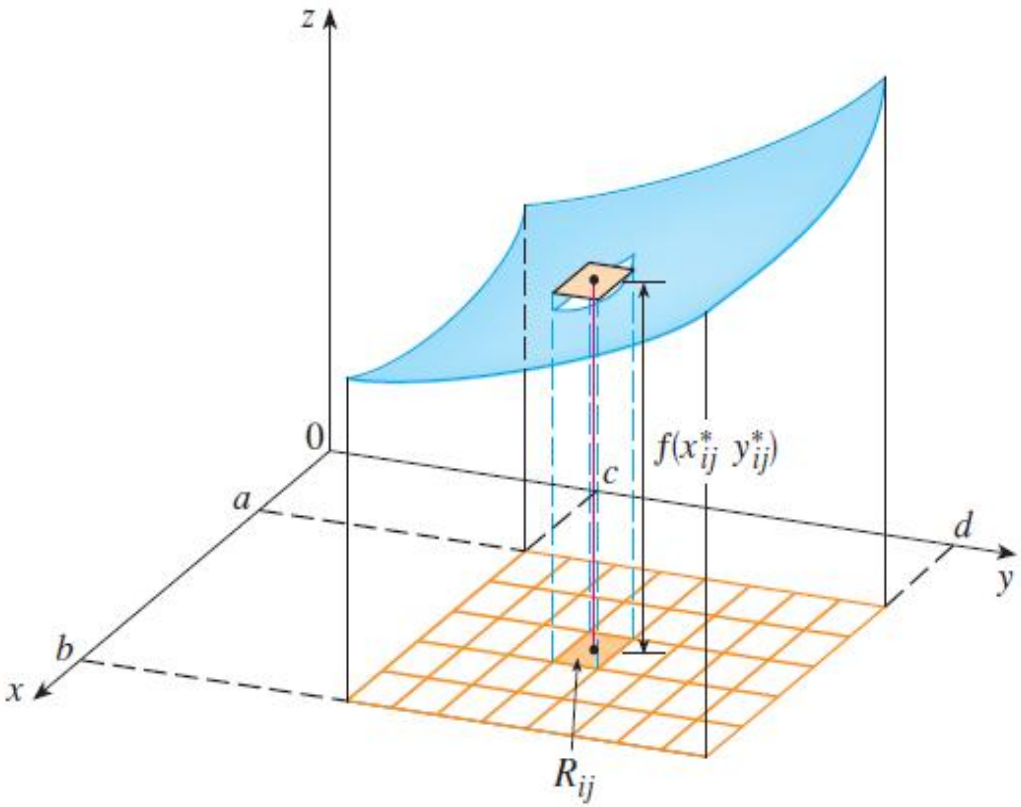
$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] = \left\{ (x, y) \mid x_{i-1} \le x \le x_i, y_{j-1} \le y \le y_j \right\}$$



บริเวณ R_{ij} จะมีพื้นที่เท่ากับ $\Delta A = \Delta x \Delta y$

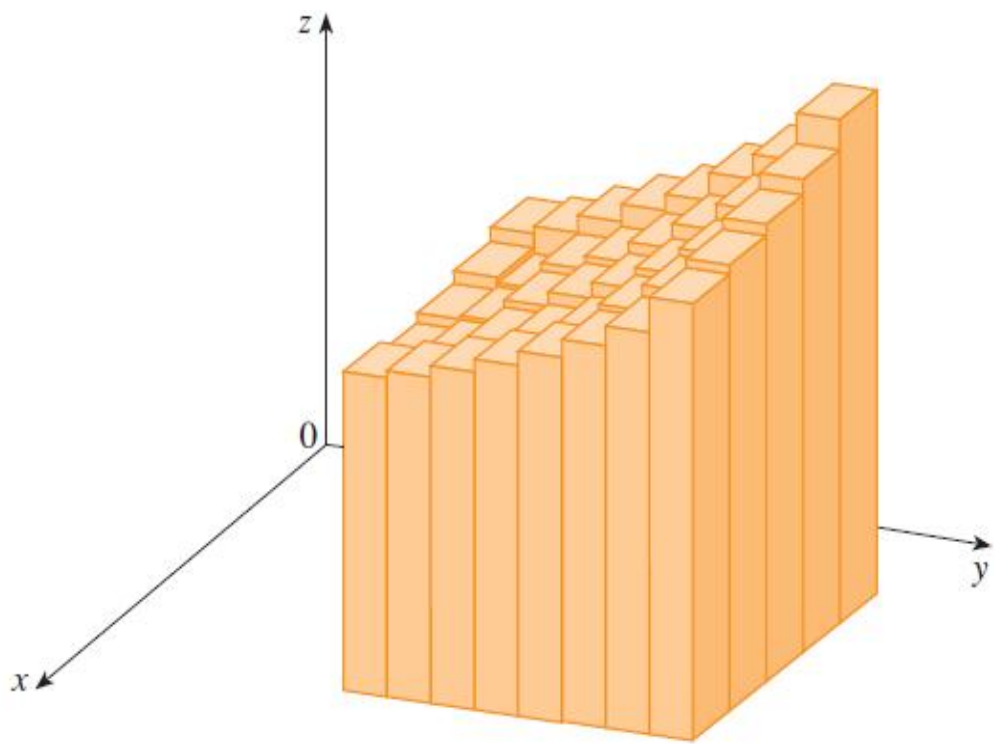
ถ้าให้ $(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \in R_{ij}$ พบว่าปริมาตรของทรงตันเล็กรูปกล่อง

คือ $$f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta A$$



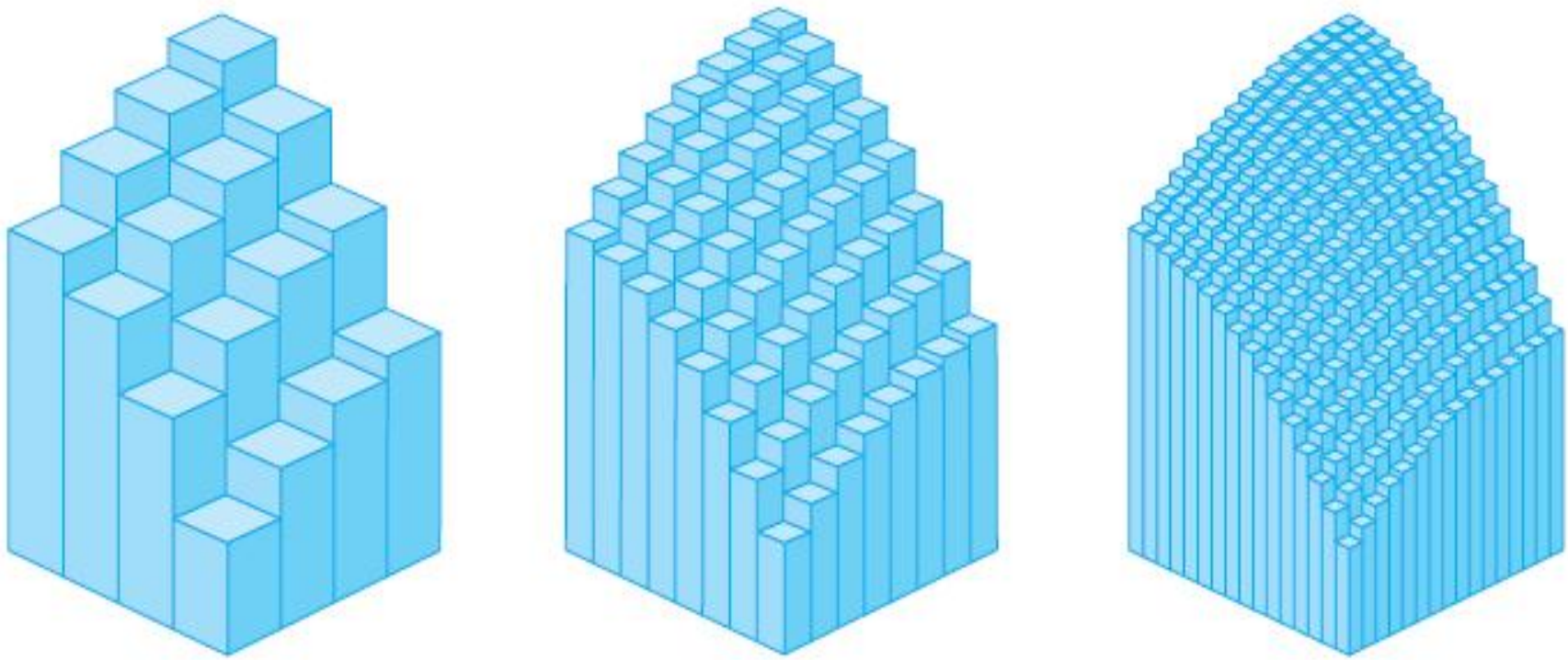
เราสามารถประมาณค่าปริมาตรของทรงตัน S ดังกล่าวได้โดยมีค่าเท่ากับผลรวมของปริมาตรของทรงตันรูปกล่องเล็กทั้งหมด หรือก็คือ

$$V \approx \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\triangle A$$



ถ้า m และ n มีค่ามากขึ้น จะทำให้ประมาณของปริมาตรดังกล่าวได้ถูกต้องมากขึ้น ดังนั้น

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}) \triangle A$$



ดังนั้นเราสามารถนิยามการหาปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณ R ได้ดังนี้

บทนิยาม

เราจะนิยามปริพันธ์สองชั้น (double integral)ของฟังก์ชัน f บนบริเวณ R ได้โดย

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\triangle A$$

ถ้าลิมิตหาค่าได้

จากแนวคิดที่กล่าวมาข้างต้น ทำให้ได้สมบัติของปริพันธ์สองชั้นที่น่าสนใจดังนี้

สมบัติของปริพันธ์สองชั้น

ถ้าปริพันธ์ $\iint_R f(x,y)\,dA$ และ $\iint_R g(x,y)\,dA$ หาค่าได้แล้ว

1. $$\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA + \iint_R g(x,y)\,dA$$

2. $$\iint_R [f(x,y)-g(x,y)]\,dA = \iint_R f(x,y)\,dA - \iint_R g(x,y)\,dA$$

3. $\iint_R cf(x,y)\,dA = c\iint_R f(x,y)\,dA$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เราอาจเขียนรวมสมบัติทั้ง 3 ข้อที่กล่าวมาในรูป

$$\iint_R [\alpha f(x,y) \pm \beta g(x,y)]\, dA = \alpha \iint_R f(x,y)\, dA \pm \beta \iint_R g(x,y)\, dA$$

เมื่อ α และ β เป็นค่าคงตัวใด ๆ

และสมบัติของปริพันธ์สองชั้นนี้ว่า

สมบัติความเป็นเชิงเส้นของปริพันธ์สองชั้น

(linearity of double integral)

สมบัติของปริพันธ์สองชั้น

4. ถ้า $f(x,y) \geq 0$ ทุก ๆ $(x,y) \in R$ แล้ว

$$\iint_R f(x,y)\, dA \geq 0$$

5. ถ้า $f(x,y) \geq g(x,y)$ ทุก ๆ $(x,y) \in R$ แล้ว

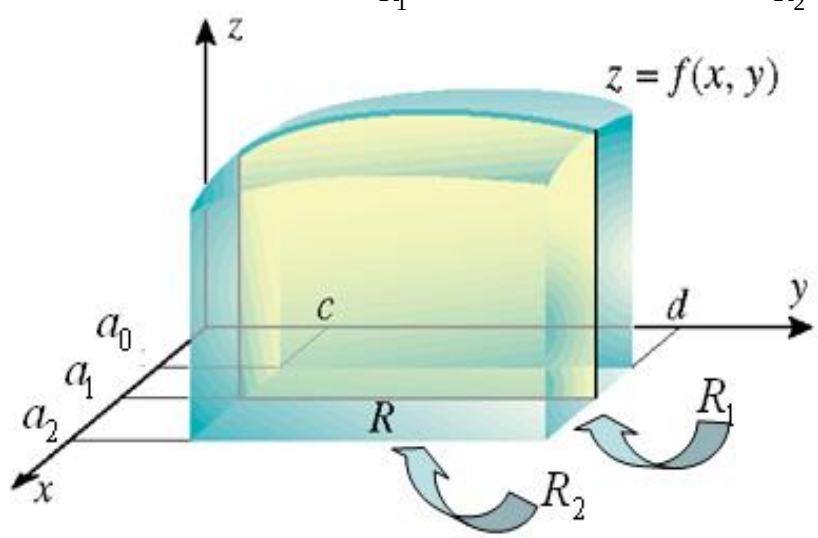
$$\iint_R f(x,y)\, dA \geq \iint_R g(x,y)\, dA$$

สมบัติของปริพันธ์สองชั้น

6. กำหนดให้ $a_0 \le a_1 \le a_2, c \le d$ และ

$$R_1 = [a_0, a_1] \times [c, d], R_2 = [a_1, a_2] \times [c, d], R = [a_0, a_2] \times [c, d]$$

แล้ว $$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_{R_1} f(x,y)\, dA + \iint_{R_2} f(x,y)\, dA$$

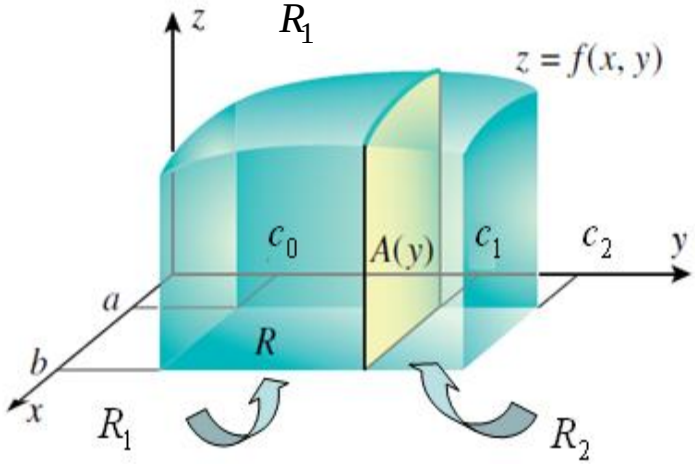


สมบัติของปริพันธ์สองชั้นที่น่าสนใจ

7. กำหนดให้ $a \le b, c_0 \le c_1 \le c_2$ และ

$$R_1 = [a,b]\times[c_0,c_1], R_2 = [a,b]\times[c_1,c_2], R = [a,b]\times[c_0,c_2]$$

แล้ว $\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dA$



การหาค่าปริพันธ์สองชั้น

(Evaluation of the Double Integral)

ในการหาค่าปริพันธ์ $\iint_R f(x,y)\,dA$ เมื่อ $R=[a,b]\times[c,d]$

สามารถทำได้ 2 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

กรณีที่ 2 $\iint_R f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$

กรณีที่ 1 $\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$

สำหรับกรณีนี้จะเริ่มต้นหาปริพันธ์ $\int_c^d f(x,y)\,dy$ ก่อน

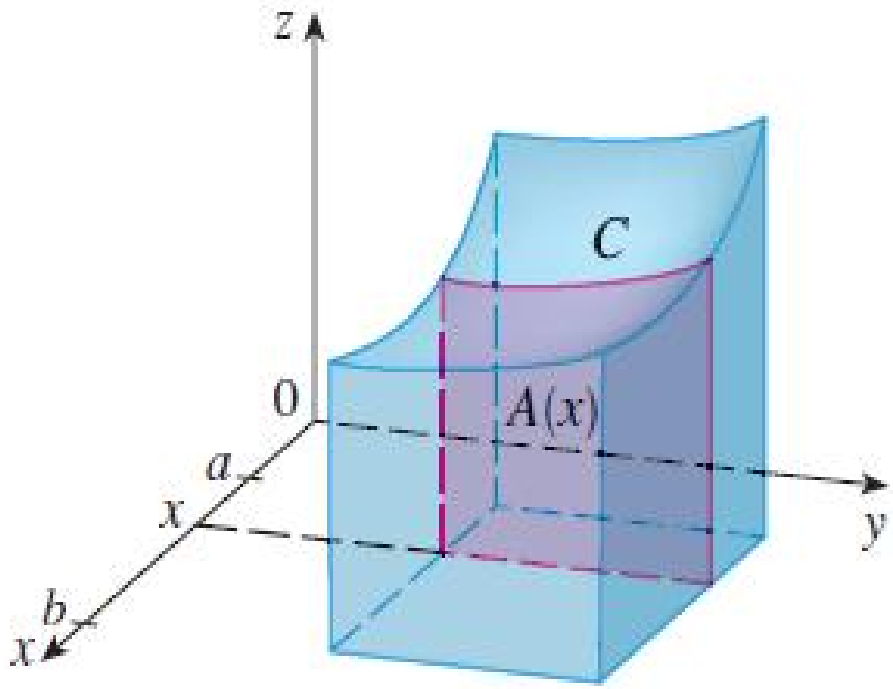
สำหรับการหาปริพันธ์ $\int_c^d f(x,y)\,dy$ นี้ จะกำหนดให้ตัวแปร x เป็นเสมือนค่าคงตัว แล้วทำการหาปริพันธ์ของ $f(x,y)$ เทียบกับตัวแปร y จาก $y=c$ ถึง $y=d$ เรียกขั้นตอนดังกล่าวนี้ว่า

การหาปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร *y*

(partial integration with respect to *y*)

ปริพันธ์ $\int_c^d f(x,y)\,dy$ ที่คำนวณได้ จะเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร x

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$



ขั้นตอนถัดไป ให้หาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $A(x)$ เทียบกับตัวแปร x จาก $x=a$ ถึง $x=b$

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$$

เราเรียกกระบวนการในการหาปริพันธ์ดังกล่าวนี้ว่า **การหาปริพันธ์ซ้อน** (iterated integration)

กรณีที่ 2 $\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$

สำหรับกรณีนี้จะเริ่มต้นหาปริพันธ์ $\int_a^b f(x,y)\,dx$ ก่อน

โดยหลักการคล้ายกันกรณีแรก ในการหาปริพันธ์ $\int_a^b f(x,y)\,dx$

จะกำหนดให้ตัวแปร y เป็นเสมือนค่าคงตัว แล้วทำการ

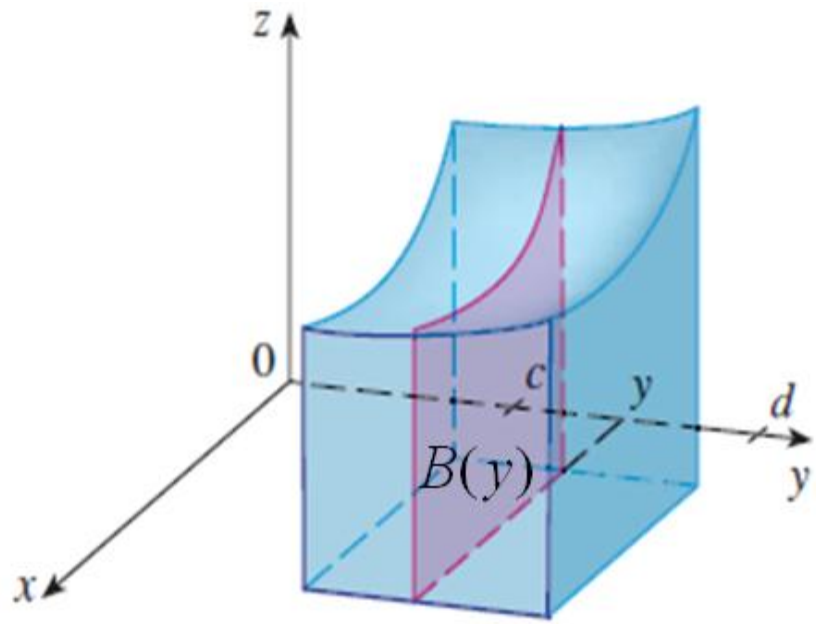
หาปริพันธ์ $f(x,y)$ เทียบกับตัวแปร x จาก $x=a$ ถึง $x=b$

เรียกขั้นตอนดังกล่าวนี้ว่า **การหาปริพันธ์ย่อยเทียบกับตัวแปร *x***

(partial integration with respect to *x*)

ปริพันธ์ $\int_a^b f(x,y)\,dx$ ที่คำนวณได้ จะเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปร y

$$B(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$



ขั้นตอนถัดไป ให้หาปริพันธ์ของฟังก์ชัน $B(y)$ เทียบกับตัวแปร y จาก $y=c$ ถึง $y=d$

$$\int_c^d B(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

สังเกตได้ว่าการหาปริพันธ์ทั้งสองกรณีที่กล่าวมาเป็นการห
ปริพันธ์จากภายในก่อนแล้วหาปริพันธ์ภายนอก

ตัวอย่างการหาปริพันธ์ซ้อน

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาค่า $\int_0^4 \int_1^3 xy^2 \, dy \, dx$

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาค่า $\int_1^3 \int_0^4 xy^2 \, dx \, dy$

ค่าปริพันธ์ที่เท่ากันไม่ใช่ความบังเอิญ

เป็นผลมาจากทฤษฎีบทซึ่งค้นพบโดย Guido Fubini

ทฤษฎีบทของฟุบินิอ่อน (Weak Fubini Theorem)

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนบริเวณ $R=[a,b]\times[c,d]$

แล้ว

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

$$=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

ตัวอย่าง

จงเปรียบเทียบค่าปริพันธ์ของ $\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy)\ dy\ dx$

และ $\int_1^2 \int_0^3 (1+8xy) dx dy$

$$\int_{-\ln 2}^{0}\int_{0}^{1} xe^{y}\,dx\,dy$$

$$\int_{0}^{1}\int_{-\ln 2}^{0} xe^{y}\,dy\,dx$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^1 xye^{y^2 x} dxdy$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{2}} xye^{y^2 x} dydx$$

จงหาค่าปริพันธ์ $\int_0^1 \int_{-\ln 2}^0 xye^{xy^2-x}\ dx\ dy$

จงหาค่าปริพันธ์ $\int_{1}^{2}\int_{0}^{1}(x+y^2)\,dx\,dy$

ค่าของ $\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\,dx\,dy$ **คือ**

ค่าของ $\int_{2}^{3}\int_{1}^{2}\left(\frac{x^{3}}{2}-\frac{y^{2}}{3}\right)dx\ dy$ คือ

1.) $-\frac{287}{72}$

2.) $-\frac{17}{72}$

3.) $-\frac{7}{72}$

4.) $\frac{17}{72}$

5.) $\frac{287}{72}$

ค่าของ $\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^{x-y}}\, dx\, dy$ คือข้อใด

(1) 1

(2) 2

(3) 4

(4) 6

(5) 8

ค่าของ $\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dx\,dy$ **คือ**

ค่าของ $\int_0^{\ln 2}\int_0^1 xye^{-xy^2}\,dy\,dx$ คือข้อใด

(1) $\dfrac{1-\ln 4}{4}$

(2) $\dfrac{\ln 2}{4}$

(3) $\dfrac{\ln 4-1}{4}$

(4) $\ln 2-2$

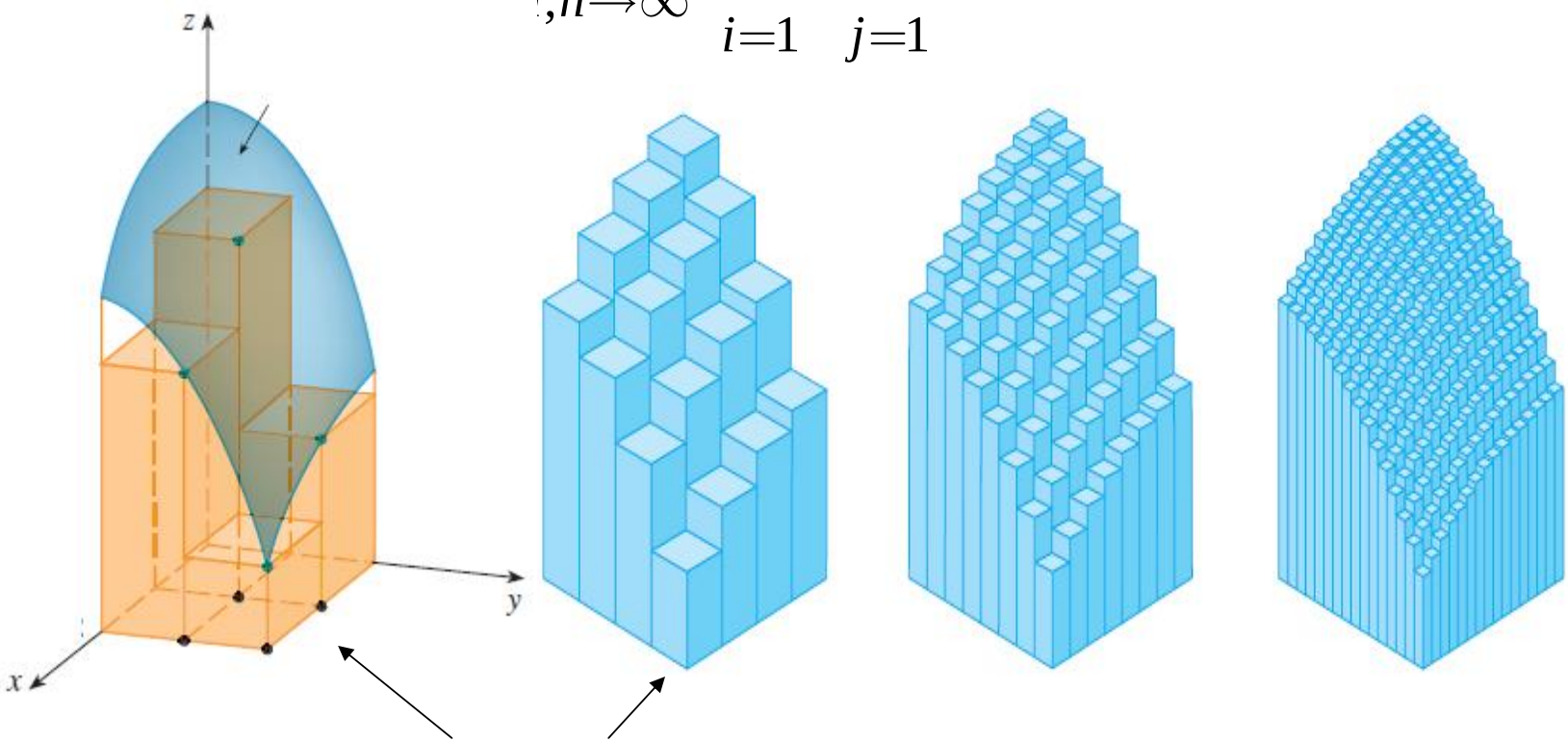
(5) $\dfrac{\ln 4-2}{2}$

การหาปริมาตรของทรงตันเหนือบริเวณรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยปริพันธ์สองชั้น

(Volumes of the Solids over the Rectangles by Double Integrals)

จากแนวคิดในการนิยามปริพันธ์สองชั้น

$$V = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\triangle A$$



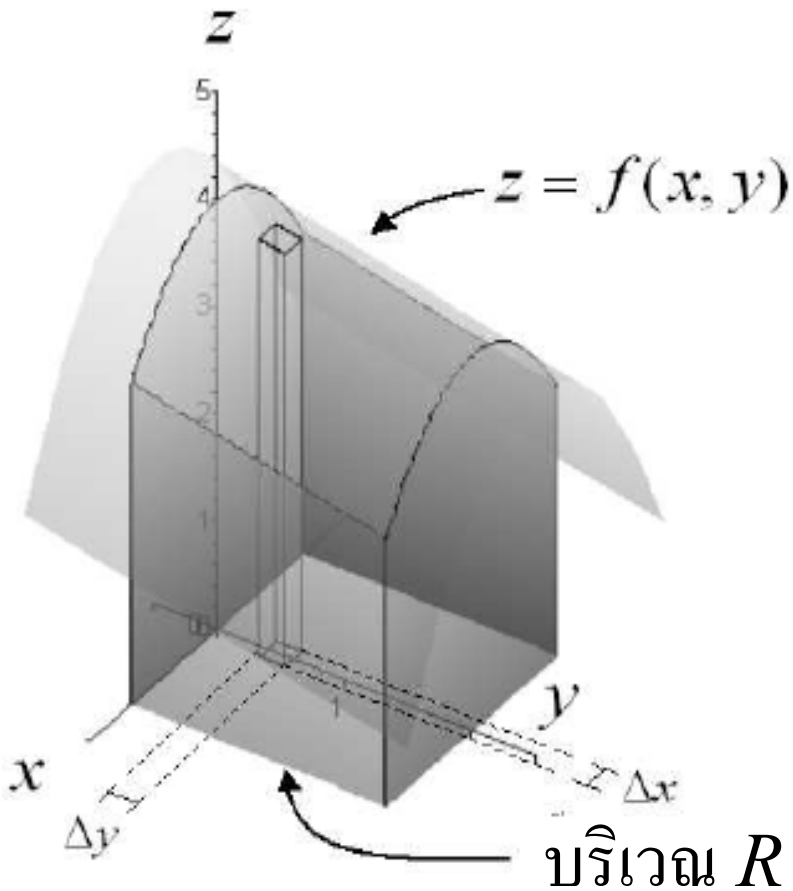
สร้างรูปให้เอียงในมุมเดียวกันนะครับ

และบทนิยามปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณ R

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\triangle A$$

ทำให้เราสามารถหาปริมาตรของทรงตัน S ที่อยู่เหนือบริเวณ $R=[a,b]\times[c,d]$ และอยู่ใต้ผิวโค้ง $z = f(x,y)$ ได้โดย

$$V = \iint_R f(x,y)\,dA$$


z
5
4
3
2
1
0
z = f(x, y)
y
x
Δx
Δy
บริเวณ R

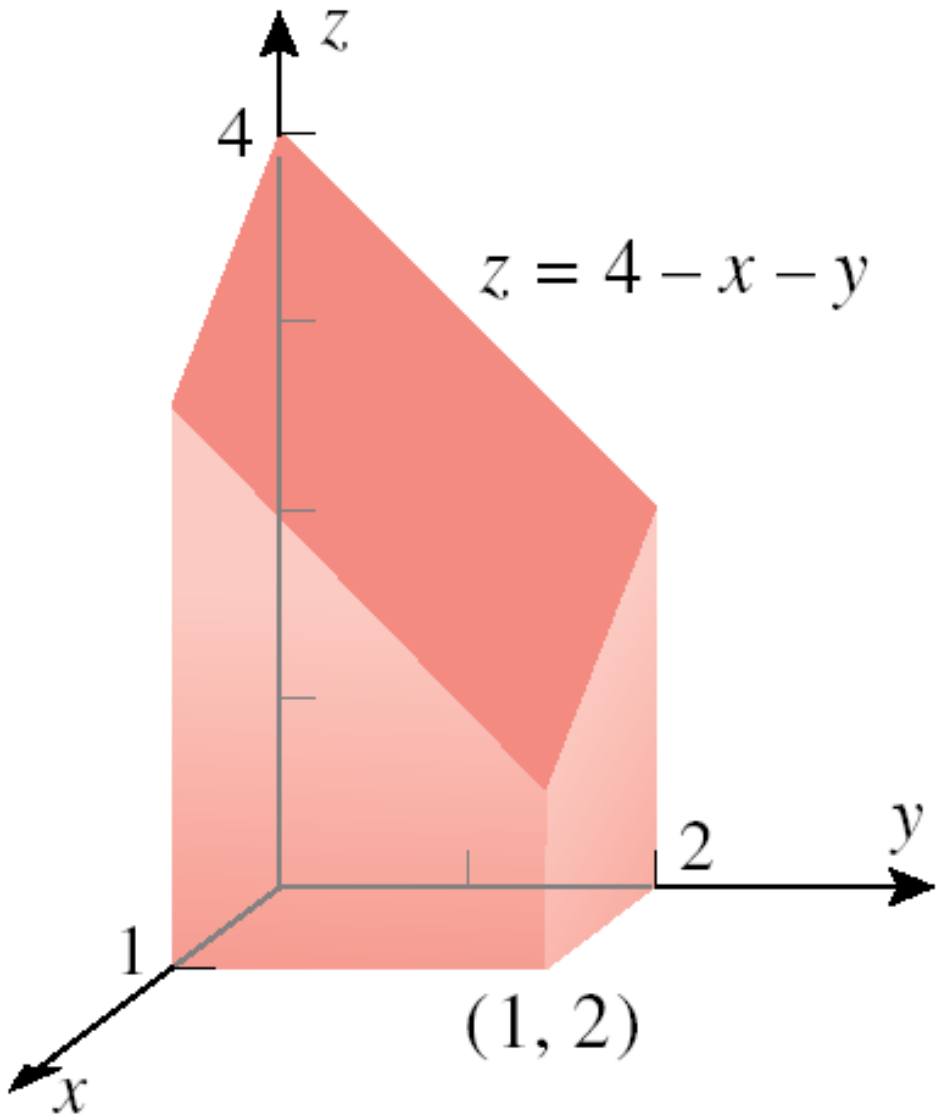
จงใช้การหาค่าปริพันธ์สองชั้นหาปริมาตรของรูปทรงที่ถูกล้อมรอบด้วย

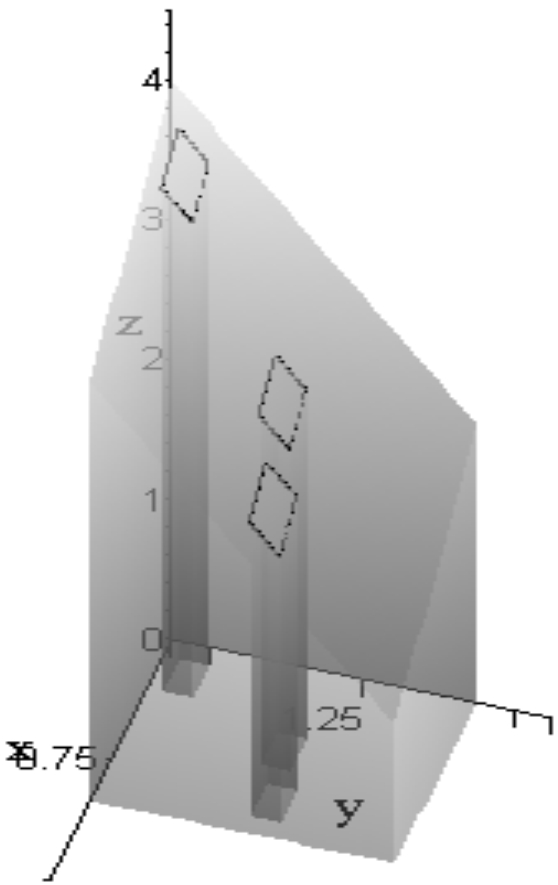
ระนาบ $z = 4 - x - y$

และสี่เหลี่ยมผืนผ้า $R = [0,1] \times [0,2]$

<u>หมายเหตุ</u>

$$[a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$$


z
4
z = 4 − x − y
y
2
1
(1, 2)
x

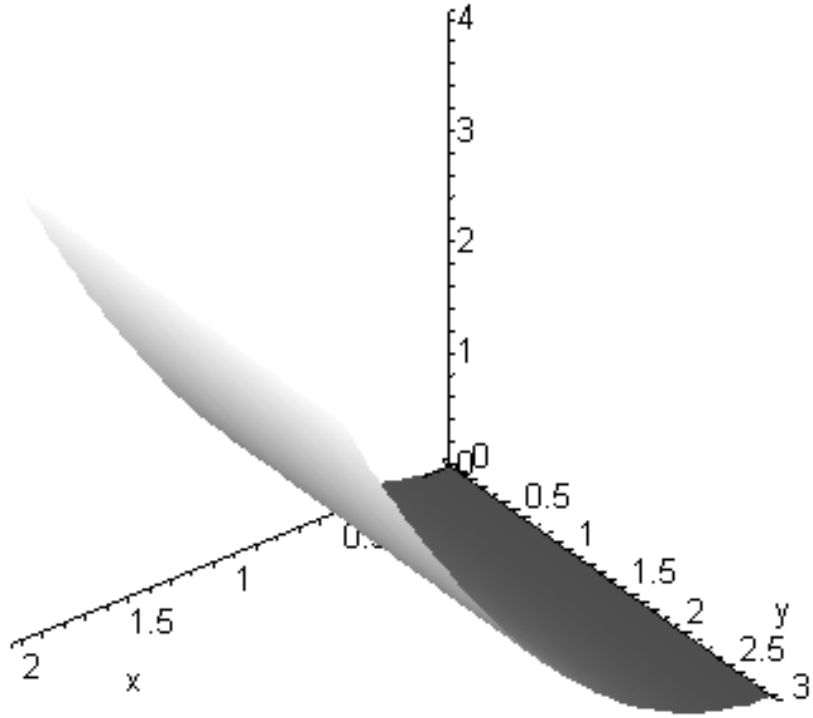

4
3
z
2
1
0
25
x
0.75
y

จงหาปริมาตรของรูปทรงตัน ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว

$$x = 0 \qquad x = 2$$

$$y = 0 \qquad y = 3$$

$$z = x^2 \qquad z = 0$$

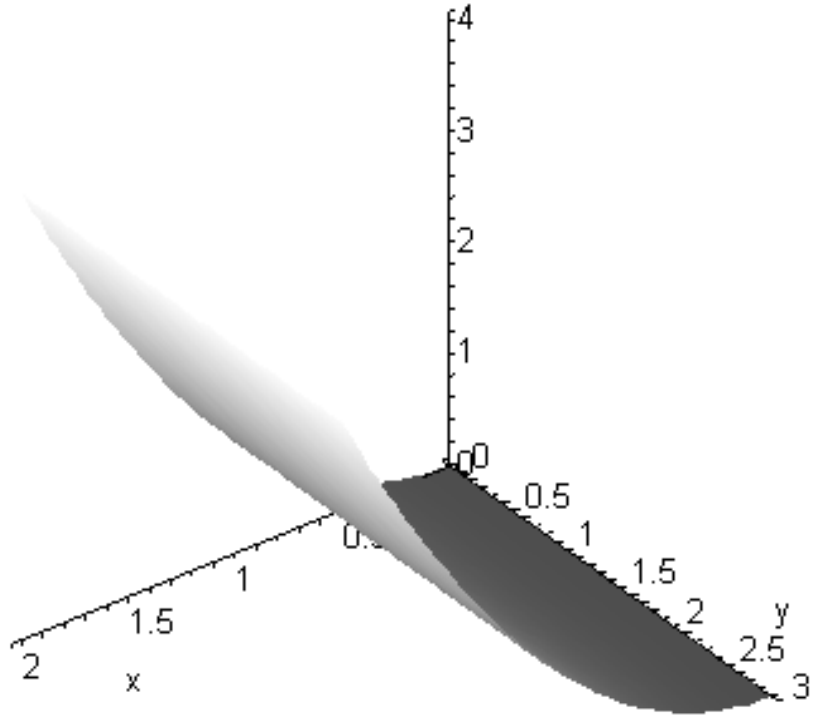

4
3
2
1
0
0.5
1
1.5
2
y
2.5
3
1
1.5
2
x

จงหาปริมาตรของรูปทรงตัน ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว

$$x = 0 \qquad x = 2$$

$$y = 0 \qquad y = 3$$

$$z = x^2 \qquad z = -2$$

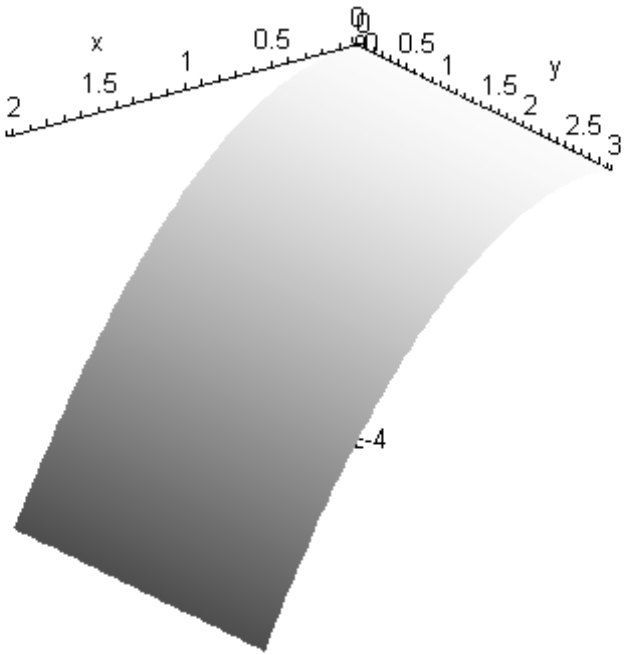

4
3
2
1
0
0.5
1
1.5
2
y
2.5
3
1
1.5
2
x

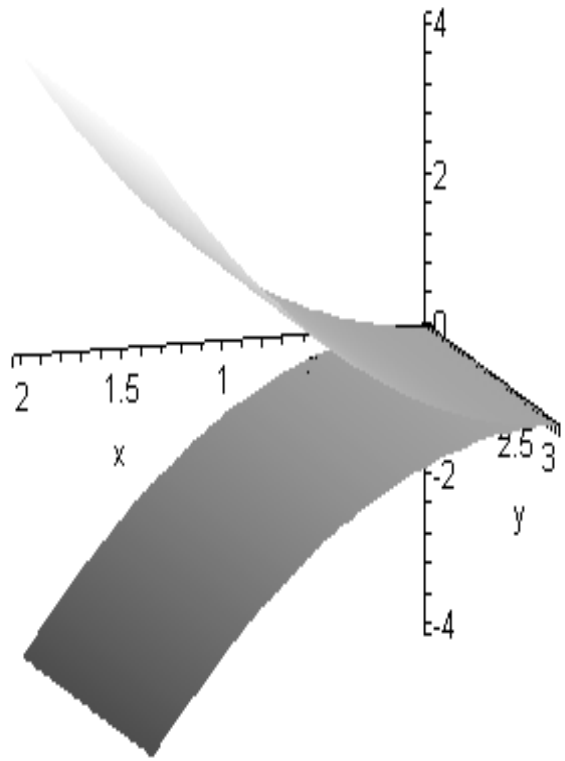
จงหาปริมาตรของรูปทรงตัน ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยพื้นผิว

$$x = 0 \qquad x = 2$$

$$y = 0 \qquad y = 3$$

$$z = x^2 \quad z = -x^2$$


x
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
y
e-4


4
2
0
-2
-4
2
1.5
1
x
2.5
3
y

พิจารณาทรงตันซึ่งถูกล้อมรอบด้วยพื้นผิว

$$x = 0, \quad x = 2, \quad y = 0,$$

$$y = 3, \quad z = 0, \quad y + 2z = 4$$

ปริมาตรของทรงตันเท่ากับเท่าใด

(1) 7.5 ลูกบาศก์หน่วย

(2) 10 ลูกบาศก์หน่วย

(3) 15 ลูกบาศก์หน่วย

(4) 16.5 ลูกบาศก์หน่วย

(5) 30 ลูกบาศก์หน่วย

พิจารณาทรงตัน G ซึ่งอยู่ใน

<u>อัฐภาค (octant) ที่หนึ่ง</u>

และถูกปิดล้อมด้วยระนาบ

$$x = 0,\ y = 0,\ y = 3,\ z = 0$$

และผิวโค้ง $x^2 + z = 4$

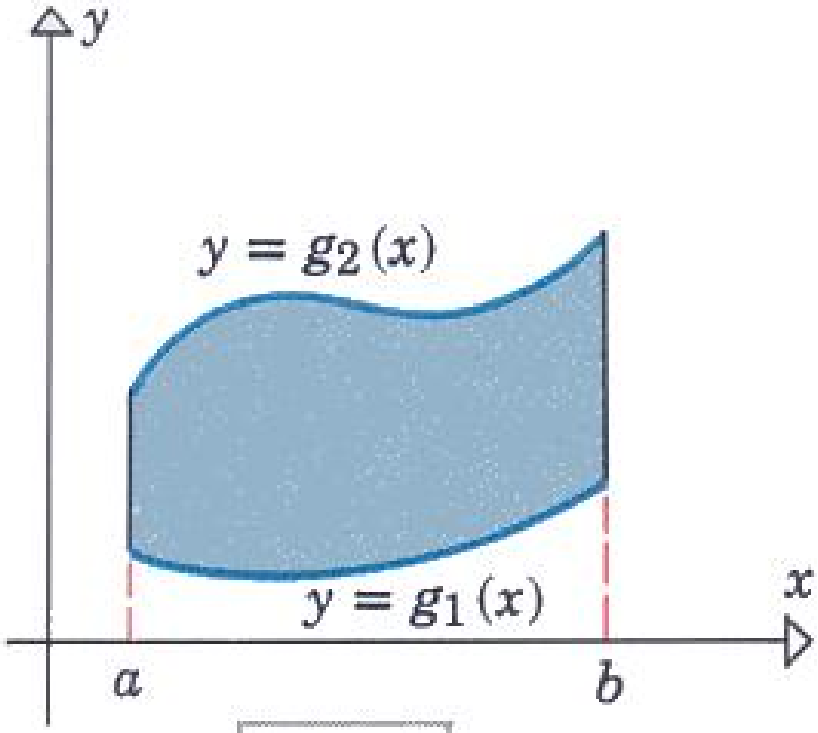
แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าปริพันธ์ $\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\, dy\, dx$

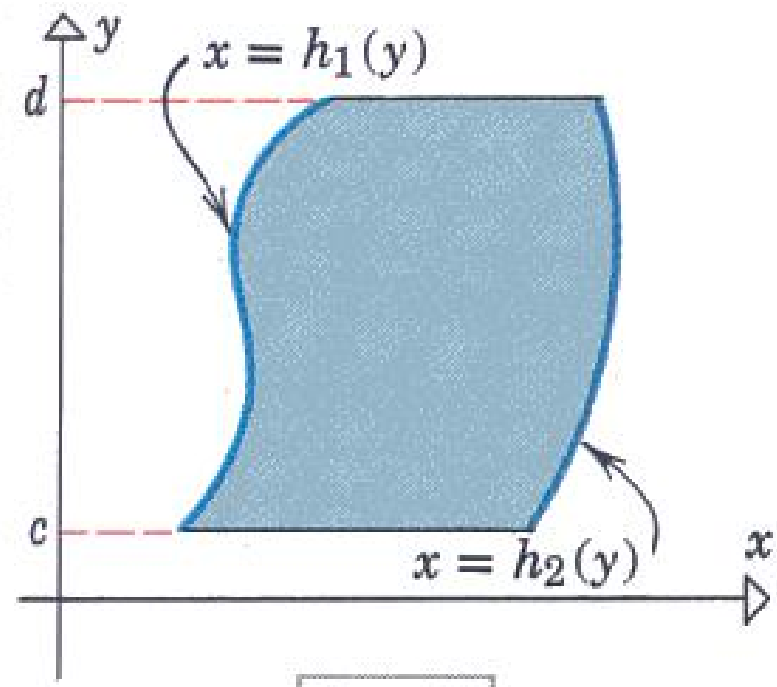
2. จงหาค่าปริพันธ์ $\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^1 xy \sin(yx^2)\, dy dx$

การหาค่าปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ในหัวข้อนี้ จะนำเสนอการหาค่าปริพันธ์สองชั้นเหนือบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ในเฉพาะกรณีเหล่านี้เท่านั้น



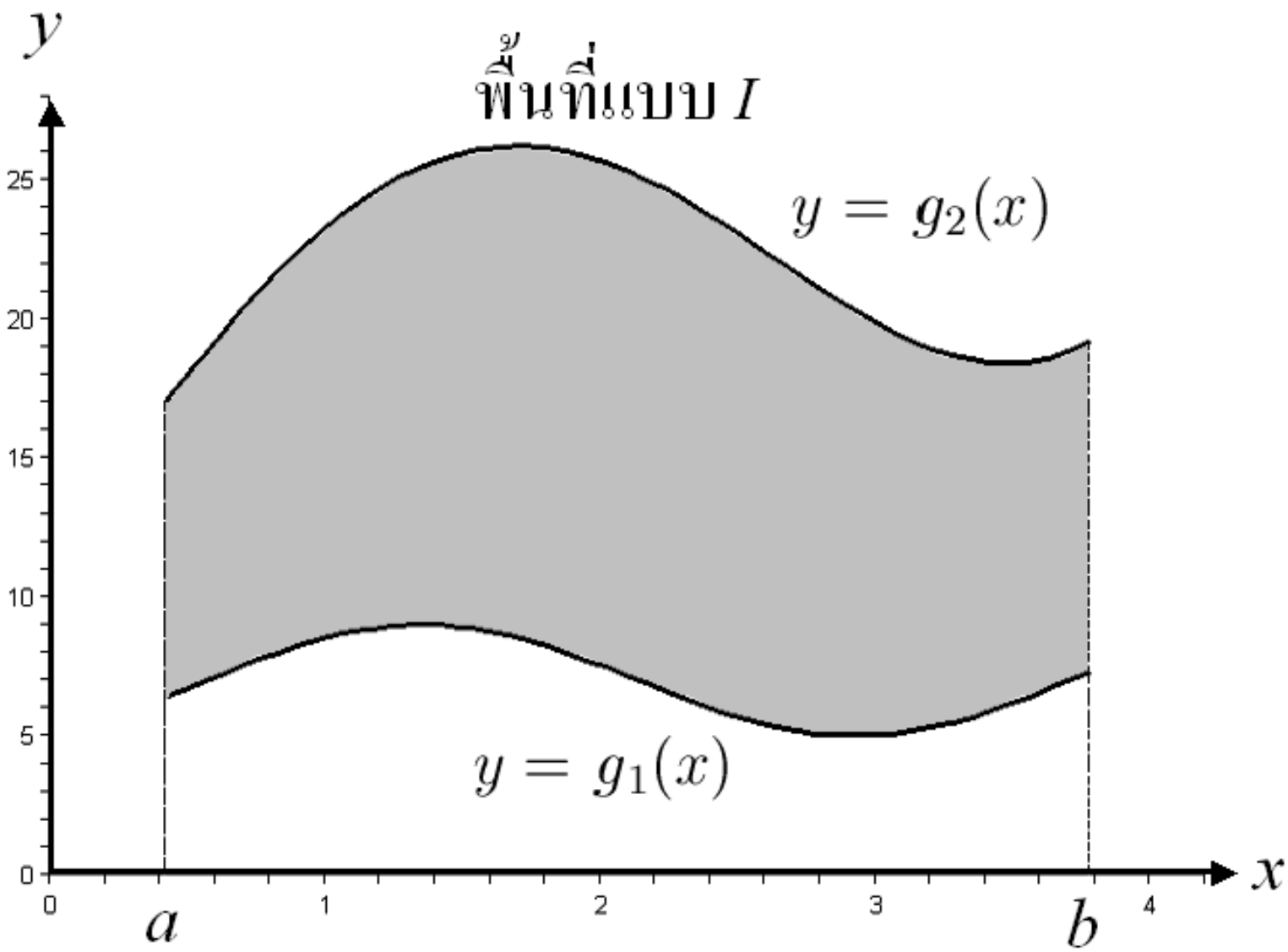
Type I



Type II

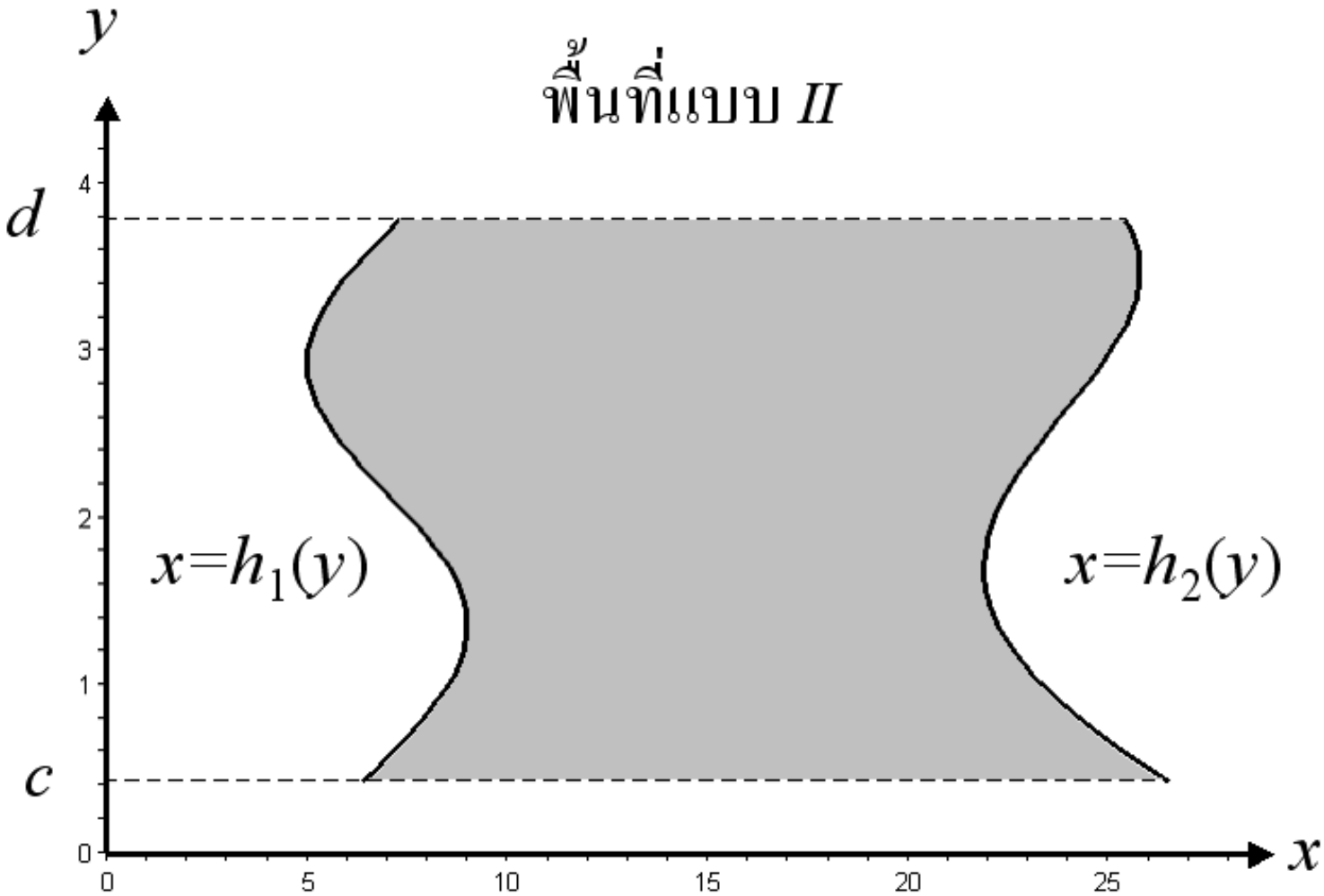
1. **พื้นที่แบบ I**

เป็นพื้นที่ ที่ถูกล้อมรอบด้วย เส้นแนวตั้ง $x = a$ และ $x = b$ ทางด้านซ้ายและขวา และ เส้นโค้ง $y = g_1(x)$ และ $y = g_2(x)$ ทางด้านล่างและบนตามลำดับ โดยที่ $g_1(x) \leq g_2(x)$ เมื่อ $a \leq x \leq b$


y
พื้นที่แบบ I
25
20
15
10
5
0
$y = g_2(x)$
$y = g_1(x)$
0
a
1
2
3
b
4
x

2. **พื้นที่แบบ** II

เป็นพื้นที่ ที่ถูกล้อมรอบด้วย เส้นแนวนอน $y = c$ และ $y = d$ ทางด้านบนและล่าง และ เส้นโค้ง $x = h_1(y)$ และ $y = h_2(y)$ ทางด้านซ้ายและขวาตามลำดับ โดยที่ $h_1(y) \leq h_2(y)$ เมื่อ $c \leq y \leq d$


พื้นที่แบบ II
y
d
c
x
x=h1(y)
x=h2(y)
0
1
2
3
4
0
5
10
15
20
25

จงหาค่า $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} y^2 x \; dy \; dx$

จงหาค่า $\int_0^{\pi} \int_0^{\cos y} x \sin y \; dx \; dy$

จงหาค่าปริพันธ์ $\int_1^2 \int_0^{y^2} e^{x/y^2}\, dx\, dy$

จงหาค่าปริพันธ์ $$\int_{\pi/2}^{\pi}\int_{0}^{x^2} \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\ dydx$$

ทฤษฎีบทของฟุบินิเข้ม (Strong Fubini Theorem)

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนบริเวณ R แล้ว

- *ถ้าพื้นที่* R *เป็นพื้นที่แบบ* I *นั่นคือ นิยามโดย* $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ *โดยที่* $g_1(x)$ *และ* $g_2(x)$ *ต่อเนื่องบนช่วงปิด* $[a, b]$ *แล้ว*

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

- *ถ้าพื้นที่* R *เป็นพื้นที่แบบ* II *นั่นคือ นิยามโดย* $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq y_2(y)$ *โดยที่* $h_1(y)$ *และ* $h_2(y)$ *ต่อเนื่องบนช่วงปิด* $[c, d]$ *แล้ว*

$$\iint_R f(x, y)\ dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\ dx\ dy$$

ในการหาค่าปริพันธ์สำหรับกรณีนี้ ควรจะเริ่มพิจารณาจากรูปของบริเวณ R ก่อน (ค่อนข้างจำเป็นว่าผู้อ่านควรจะสามารถวาดรูปบริเวณ R ได้ แต่อาจจะไม่จำเป็นว่าจะต้องวาดรูปผิวโค้ง $z = f(x, y)$ ได้) เมื่อเห็นรูปของบริเวณ R จะทำให้ผู้อ่านสามารถประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของฟุบินิ ได้อย่างถูกต้อง

ตัวอย่าง 2.6. จงหาค่า $\iint\limits_R xy\ dA$ เมื่อ R คือ พื้นที่ ที่ถูกปิดล้อมด้วย $y = \frac{1}{2}x$, $y = \sqrt{x}$ และ $x = 2$ และ $x \leq 2$

ตัวอย่าง 2.6. จงหาค่า $\iint\limits_R xy\ dA$ เมื่อ R คือ พื้นที่ ที่ถูกปิดล้อมด้วย $y = \frac{1}{2}x$, $y = \sqrt{x}$ และ $x = 2$ และ $x \geq 2$

ตัวอย่าง 2.6. จงหาค่า $\displaystyle\iint_R xy\ dA$ เมื่อ R คือ พื้นที่ ที่ถูกปิดล้อมด้วย $y = \frac{1}{2}x$, $y = \sqrt{x}$

ตัวอย่าง 2.6. จงหาค่า $\displaystyle\iint_R xy\ dA$ เมื่อ R คือ พื้นที่ ที่ถูกปิดล้อมด้วย $y = \frac{1}{2}x$, $y = \sqrt{x}$

ตัวอย่าง 2.7. จงหาค่า $\displaystyle\iint_R (2x - y^2)\ dA$ เมื่อ R คือ พื้นที่สามเหลี่ยมที่ถูกปิดล้อมด้วย $y = -x + 1,\ y = x + 1$ และ $y = 3$

การประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทของฟุบินิ สามารถช่วยให้หาค่าปริพันธ์ได้ง่ายขึ้น โดยพิจารณาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\displaystyle\iint_R \frac{\sin x}{x}\, dA$ เมื่อ R เป็นสามเหลี่ยมในระนาบ xy ที่ถูกปิดล้อมด้วยแกน x เส้นตรง $y = x$ และเส้นตรง $x = 1$

จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2}\ dy\ dx$

จงหาค่าปริพันธ์ $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\, dx\, dy$

จงหาค่าปริพันธ์ $\int_1^3 \int_0^{\ln x} x \, dy \, dx$

พิจารณาปริพันธ์ $\int_0^{\frac{\sqrt{\ln 3}}{2}} \int_{2y}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\, dx\, dy$

โดยทฤษฎีบทของ Fubini เราทราบว่า

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\ln 3}}{2}} \int_{2y}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\, dx\, dy = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} e^{x^2}\, dy\, dx$$

จงหาค่า $\int_0^{\frac{\sqrt{\ln 3}}{2}} \int_{2y}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\, dx\, dy$

$$\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} \sec^2(\sin x)\ dx\ dy$$

จงใช้ทฤษฎีบทของ Fubini หาปริพันธ์ (integrand) ที่เหมือนกัน แต่มีลำดับการหาปริพันธ์ย่อยที่แตกต่างกัน

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\, dx \qquad \int_0^2 \int_1^{e^y} f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x,y)\, dy\, dx \qquad \int_0^4 \int_{2y}^8 f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{1-(x^2/4)}}^{\sqrt{1-(x^2/4)}} f(x,y)\, dy\, dx \qquad \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\, dx\, dy$$

จงใช้ทฤษฎีบทของ Fubini หาปริพันธ์ (integrand) ที่เหมือนกัน แต่มีลำดับการหาปริพันธ์ย่อยที่แตกต่างกัน

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{1-x^2/4}}^{\sqrt{1-x^2/4}} f(x,y)\ dydx$$

$$\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dxdy$$

$$\int_{0}^{1}\int_{\sin^{-1} y}^{\pi/2} f(x,y)\ dxdy$$

ปริพันธ์สองชั้นบนบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

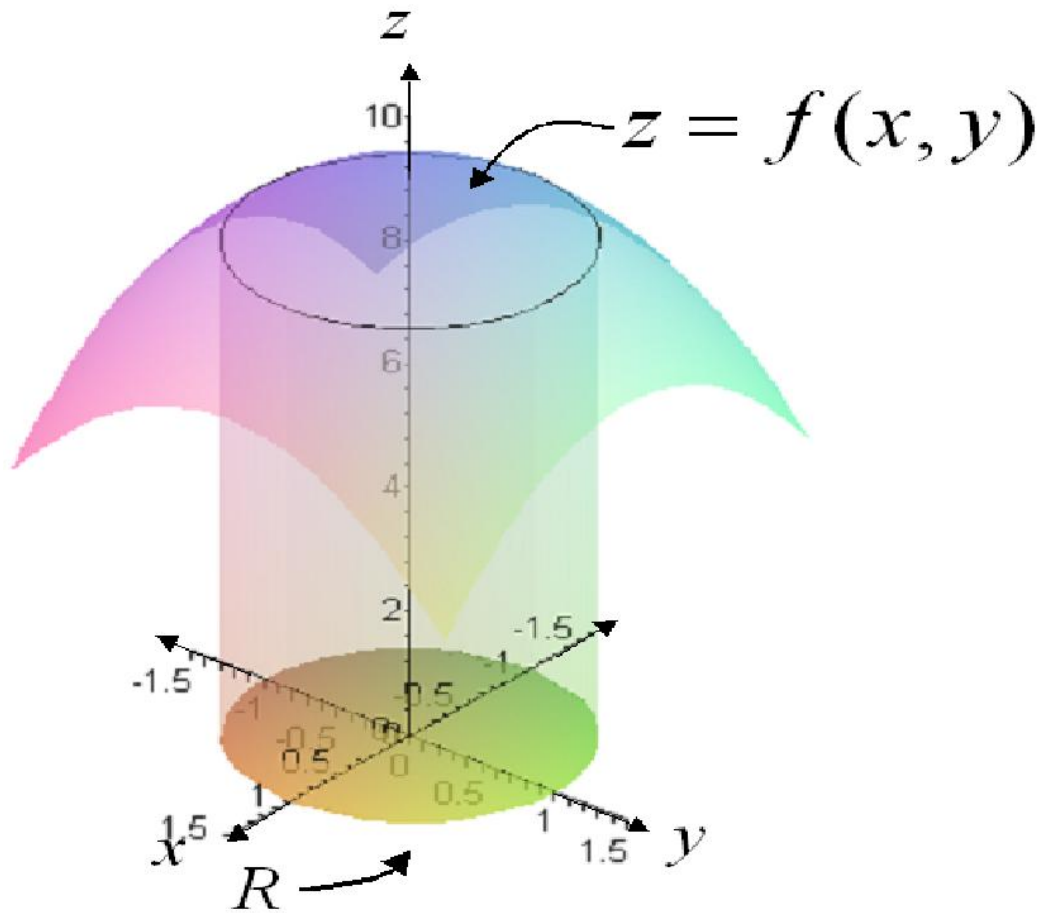
ถ้า $z = f(x, y)$ เป็นพื้นผิวซึ่งมีค่าเป็นบวก บนส่วนของบริเวณ R ซึ่งเป็นเราสามารถหาปริมาตรของรูปทรง ที่มีฐานเป็นรูปบริเวณ R และมีพื้นผิวปิดด้านบนเป็นพื้นผิว (x, y, z) ได้ในรูปแบบของการหาปริพันธ์สองชั้นได้ดังนี้

1. พื้นที่แบบ I

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dydx$$

2. พื้นที่แบบ II

$$V = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\ dxdy$$

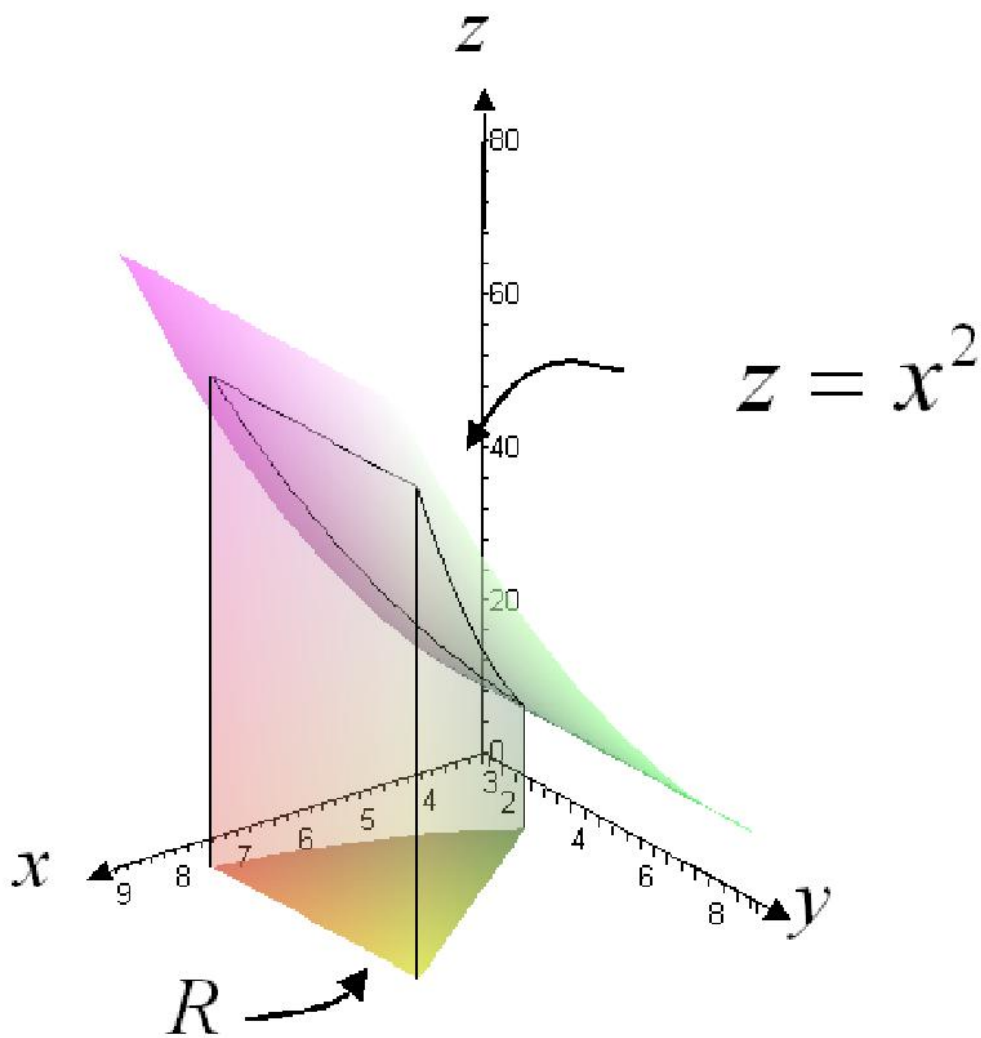

z
10
8
6
4
2
$z = f(x, y)$
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
x
y
R

จงหาปริมาตรของทรงตันซึ่งอยู่ภาย

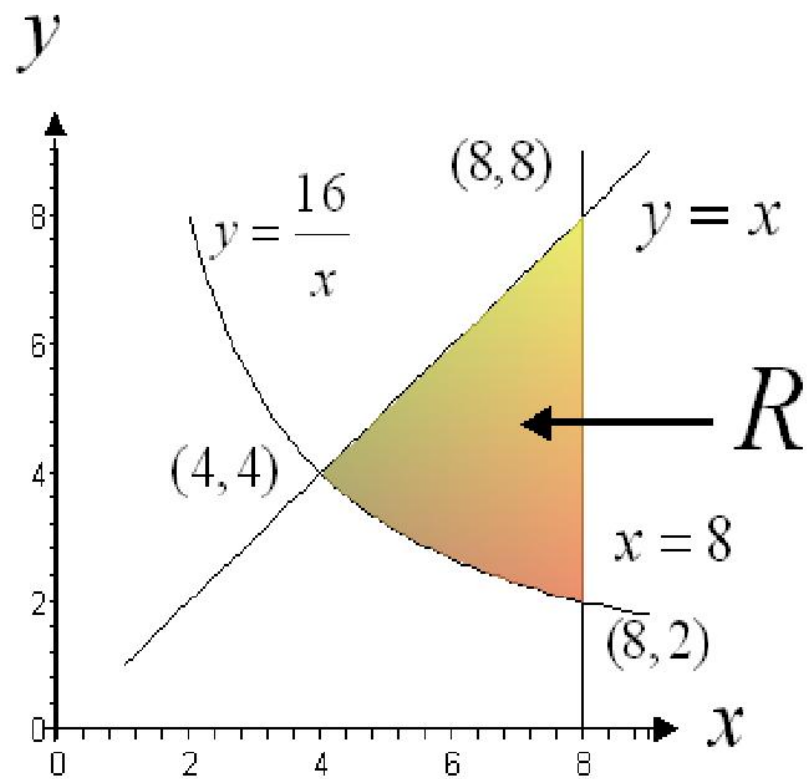
ใต้ผิวโค้ง $z = x^2$ และเป็นปริมาตรเหนือบริเวณ

R ซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = \dfrac{16}{x}$, เส้นตรง

$y = x$ และ เส้นตรง $x = 8$


z
80
60
40
20
0
x
9
8
7
6
5
4
3
2
4
6
8
y
R

$$z = x^2$$


y
(8,8)
$y = \frac{16}{x}$
$y = x$
R
(4,4)
$x = 8$
(8,2)
x
0
2
4
6
8

จงหาพื้นที่ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยสมการ

$y = x^2 + 2x$ **และ** $y = 4 - x$

แบบฝึกหัด

1. จงวาดรูปบริเวณ ***R*** ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยสมการ

$$y = -2x, y = 4x - x^2$$

และหาพื้นที่ดังกล่าว

2. จงวาดรูปบริเวณ ***R*** และหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 \cos(x^2)\, dx\, dy$$

3. จงวาดรูปบริเวณ ***R*** และหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} y} \sec^2(\sin x)\ dx\ dy$$

4. จงวาดรูปบริเวณ ***R*** และหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

$$\int_0^{\frac{\sqrt{\ln 5}}{2}} \int_{2y}^{\sqrt{\ln 5}} e^{x^2}\, dx\ dy$$

5. จงวาดรูปบริเวณ $\boldsymbol{R}$ และหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

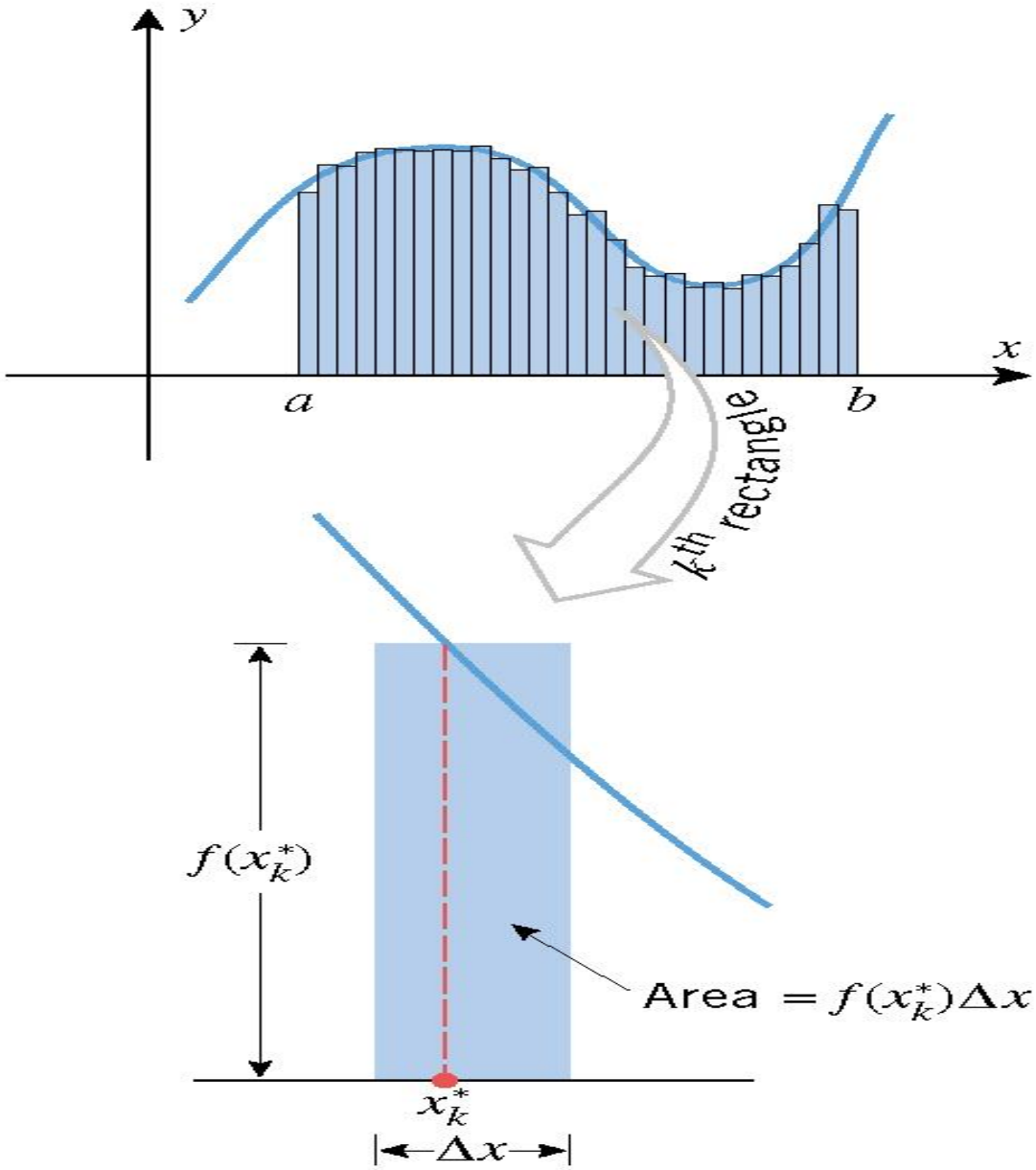
$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 \cos\left(x^2\right) \; dxdy$$

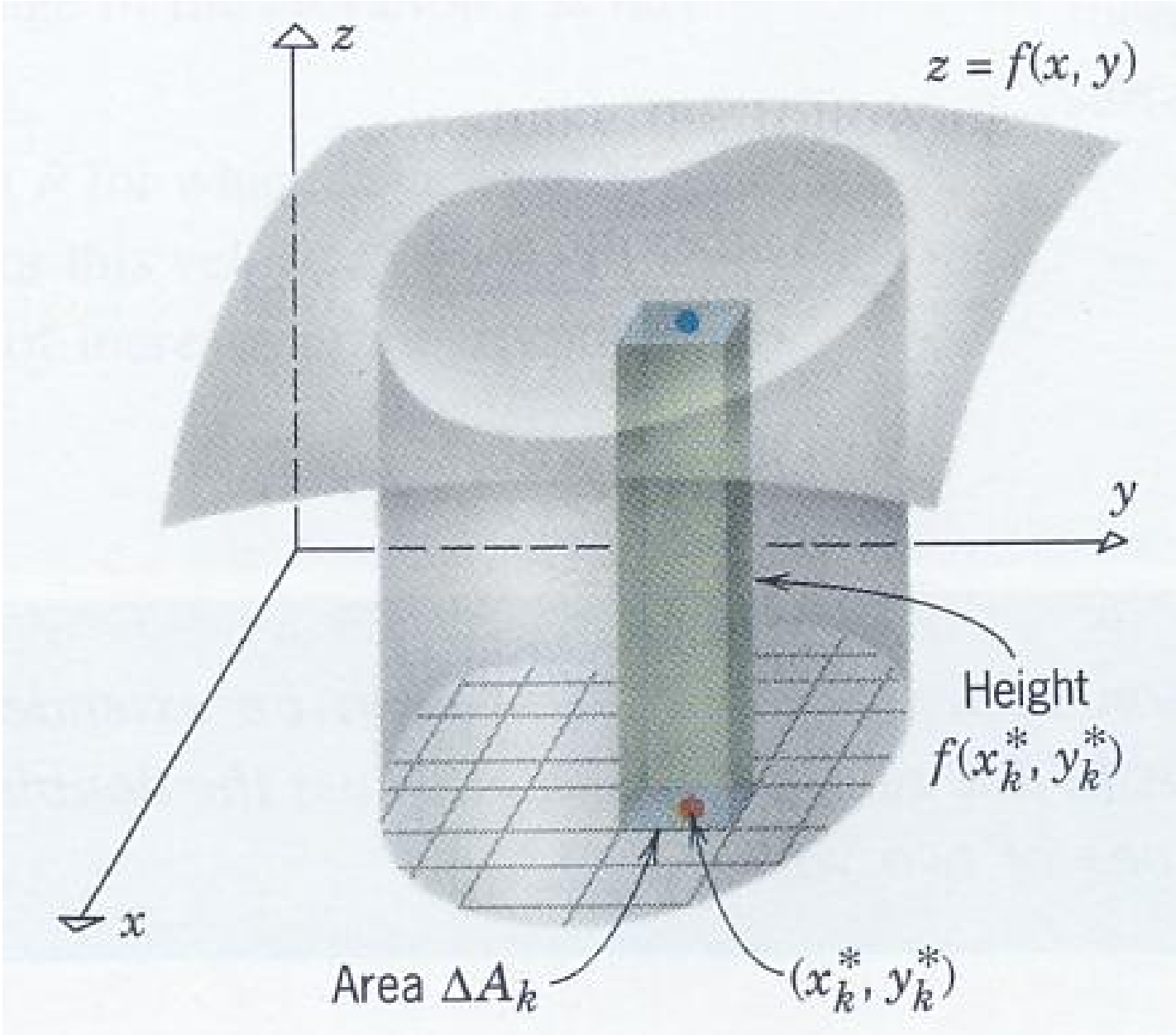
$$\int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{\pi/2} \sec^2\left(\cos x\right) \; dxdy$$

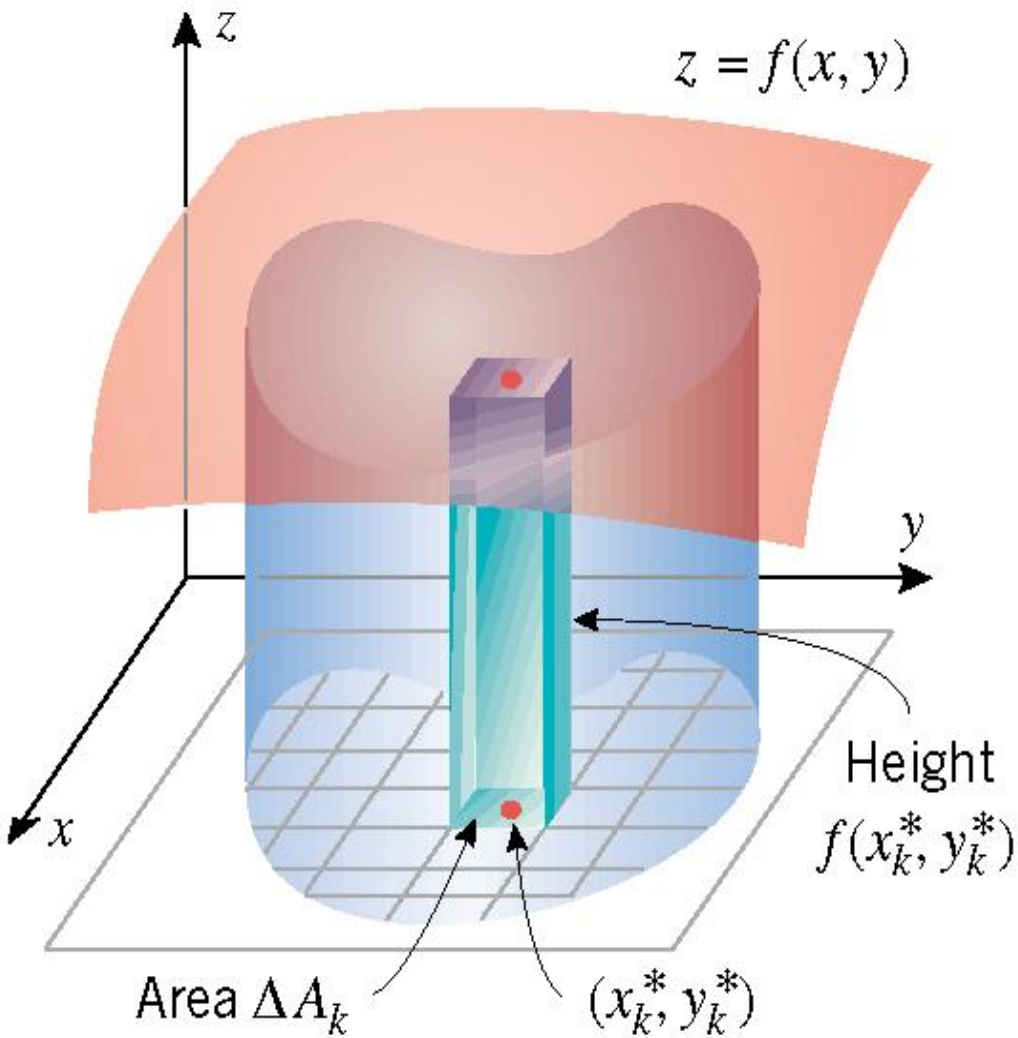
$$\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} x} x \; dydx$$

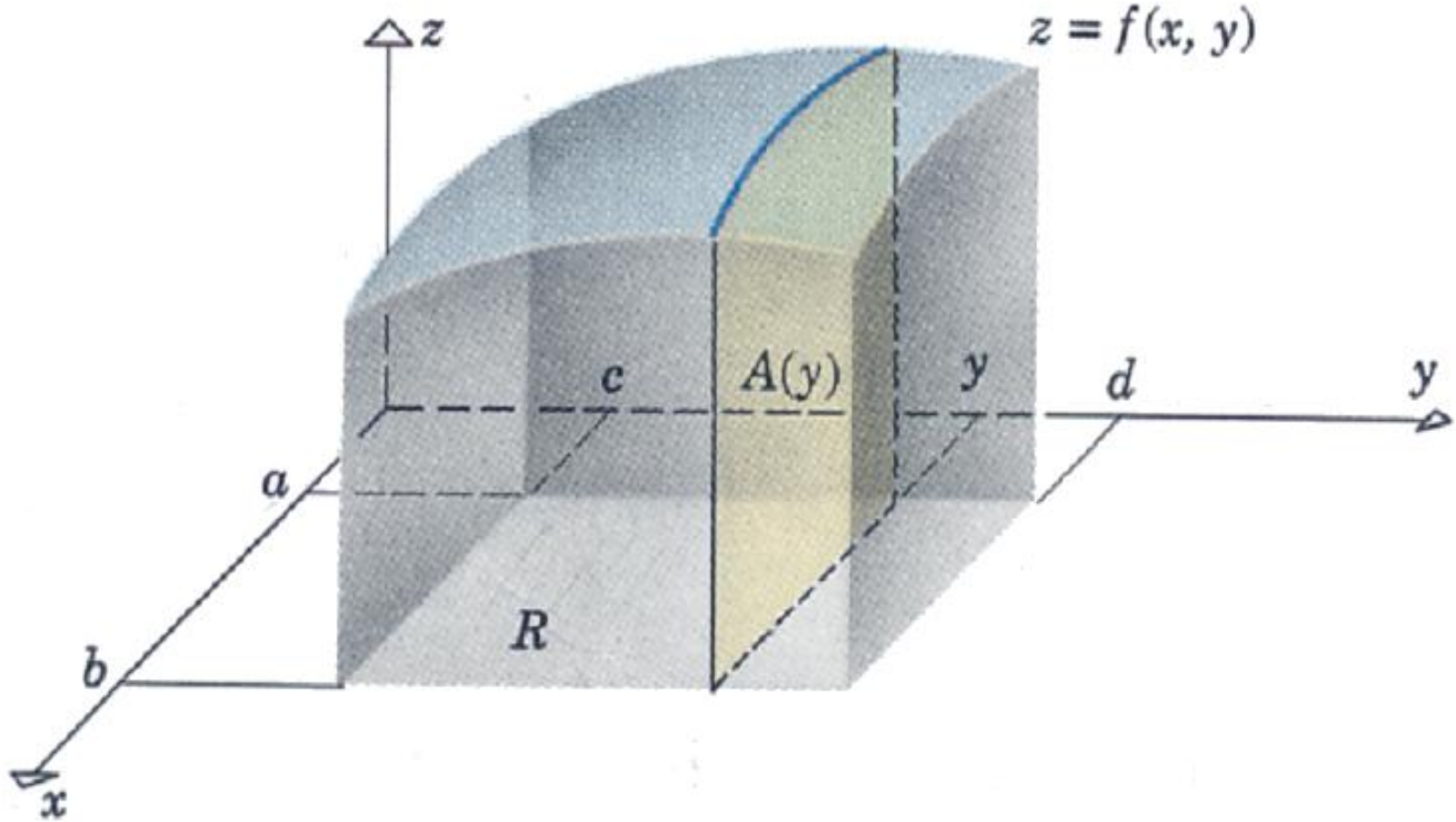
$$\int_0^1 \int_{\sin^{-1} y}^{\pi/2} \sec^2\left(\cos x\right) \; dxdy$$

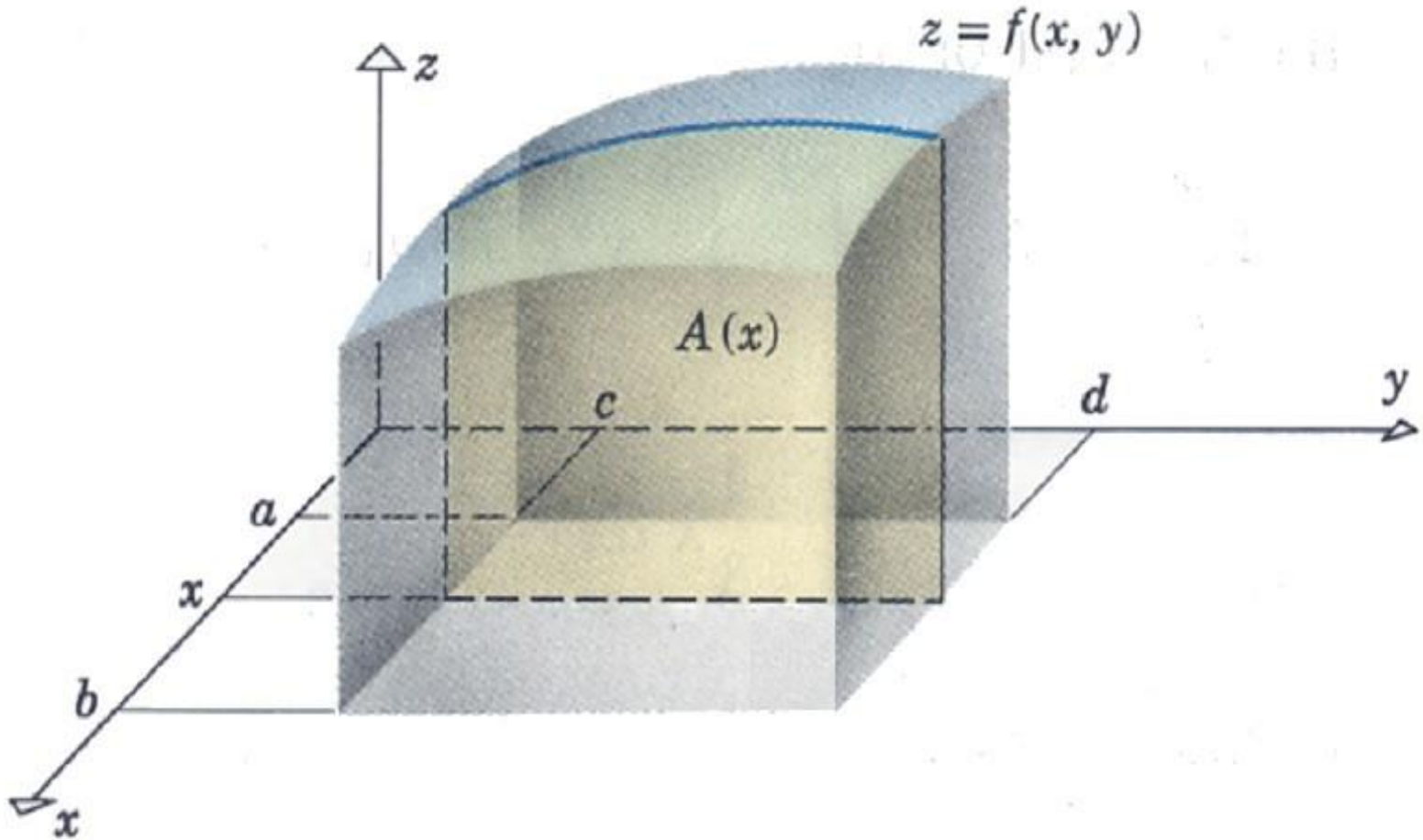
สรุป


y
x
a
b
k^{th} rectangle
$f(x_k^*)$
Area $= f(x_k^*)\Delta x$
x_k^*
Δx


z
z = f(x, y)
y
x
Height
$f(x_k^*, y_k^*)$
Area ΔA_k
(x_k^*, y_k^*)


z
$z = f(x, y)$
y
x
Height
$f(x_k^*, y_k^*)$
Area ΔA_k
(x_k^*, y_k^*)


z
z = f(x, y)
c
A(y)
y
d
y
a
R
b
x


$z = f(x, y)$
z
$A(x)$
c
d
y
a
x
b
x

ค่าปริพันธ์ที่เท่ากันไม่ใช่ความบังเอิญ

เป็นผลมาจากทฤษฎีบทซึ่งค้นพบโดย Guido Fubini

ทฤษฎีบทของฟุบินิอ่อน (Weak Fubini Theorem)

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนบริเวณ $R=[a,b]\times[c,d]$

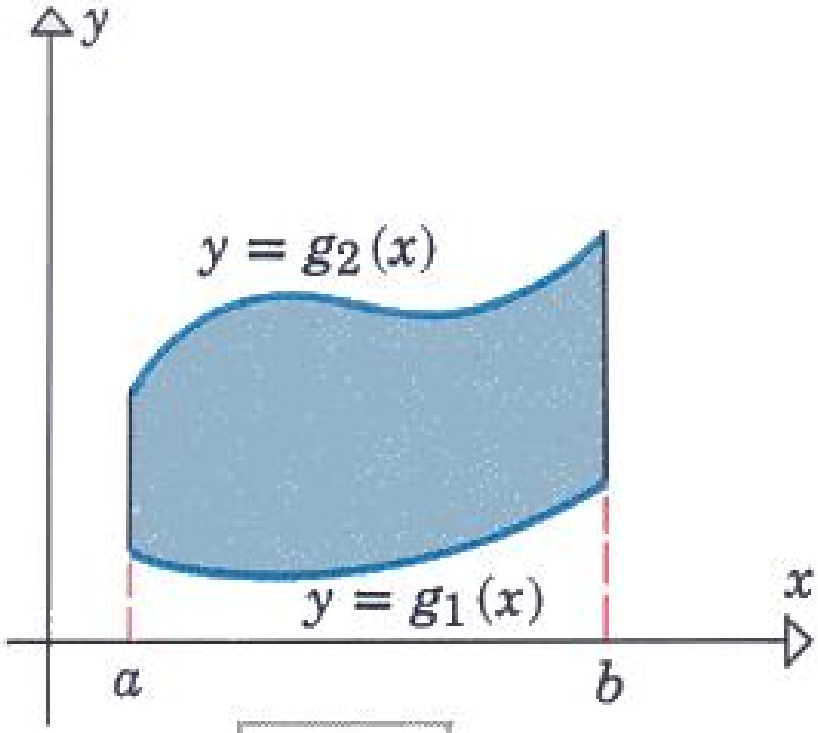
แล้ว

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

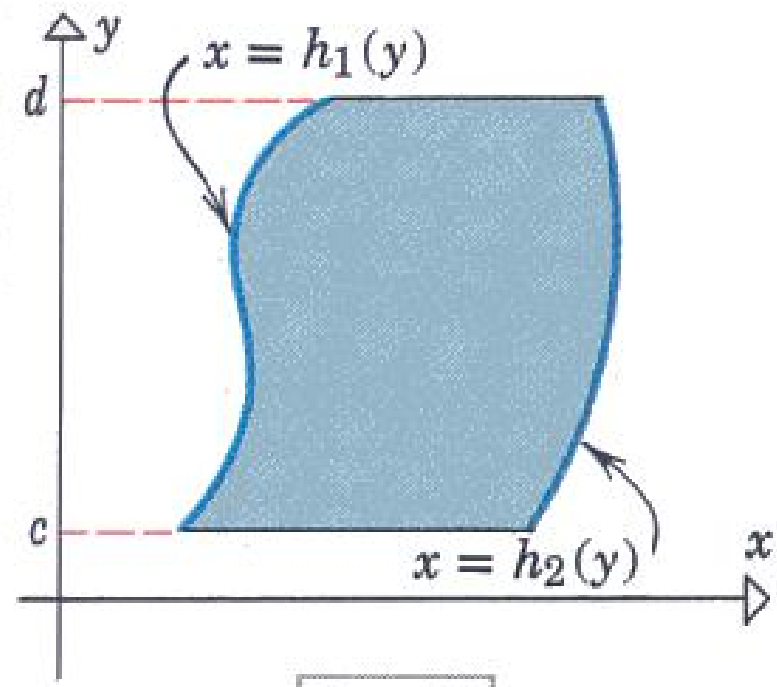
$$=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

การหาค่าอินทิกรัลสองชั้นเหนือบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ในส่วนนี้ จะนำเสนอการหาค่าอินทิกรัลสองชั้นเหนือบริเวณที่ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ในเฉพาะกรณีเหล่านี้เท่านั้น



Type I



Type II

ทฤษฎีบทของฟุบินิเข้ม (Strong Fubini Theorem)

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนบริเวณ R แล้ว

- *ถ้าพื้นที่* R *เป็นพื้นที่แบบ* I *นั่นคือ นิยามโดย* $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ *โดยที่* $g_1(x)$ *และ* $g_2(x)$ *ต่อเนื่องบนช่วงปิด* $[a, b]$ *แล้ว*

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

- *ถ้าพื้นที่* R *เป็นพื้นที่แบบ* II *นั่นคือ นิยามโดย* $c \leq y \leq d$, $h_1(y) \leq x \leq y_2(y)$ *โดยที่* $h_1(y)$ *และ* $h_2(y)$ *ต่อเนื่องบนช่วงปิด* $[c, d]$ *แล้ว*

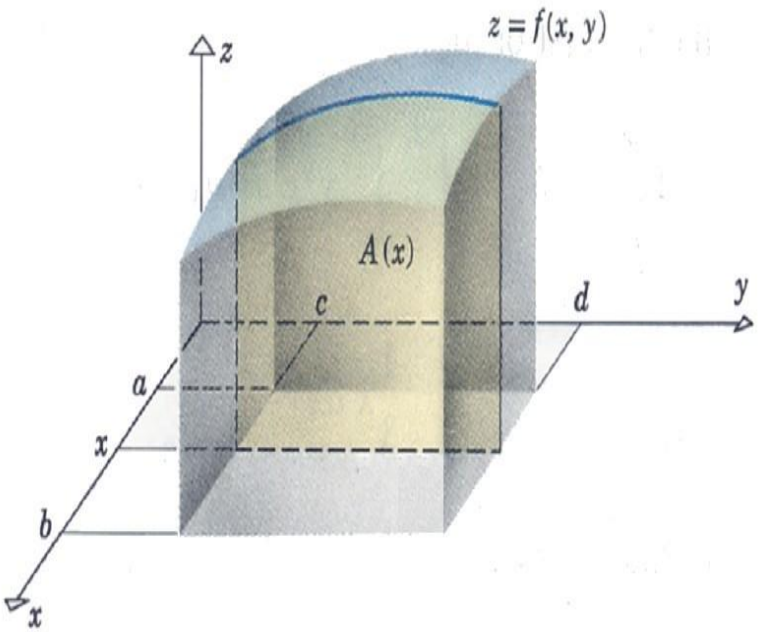
$$\iint_R f(x, y)\ dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\ dx\ dy$$

1. การหาค่าอินทิกรัลสองชั้นพบพื้นที่ที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

1.1 หาโดยตรง

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\ dx\ ,$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\ dy$$



1.2 ทฤษฎีบทของ Fubini

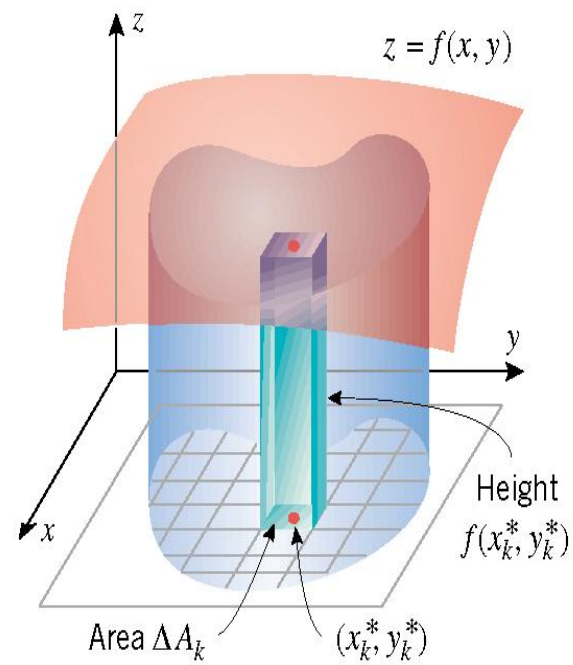
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\ dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\ dy$$

2. การหาค่าอินทิกรัลสองชั้นพบพื้นที่*ไม่*เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

2.1 หาโดยตรง

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\,dx\,,$$

$$\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\,dy$$



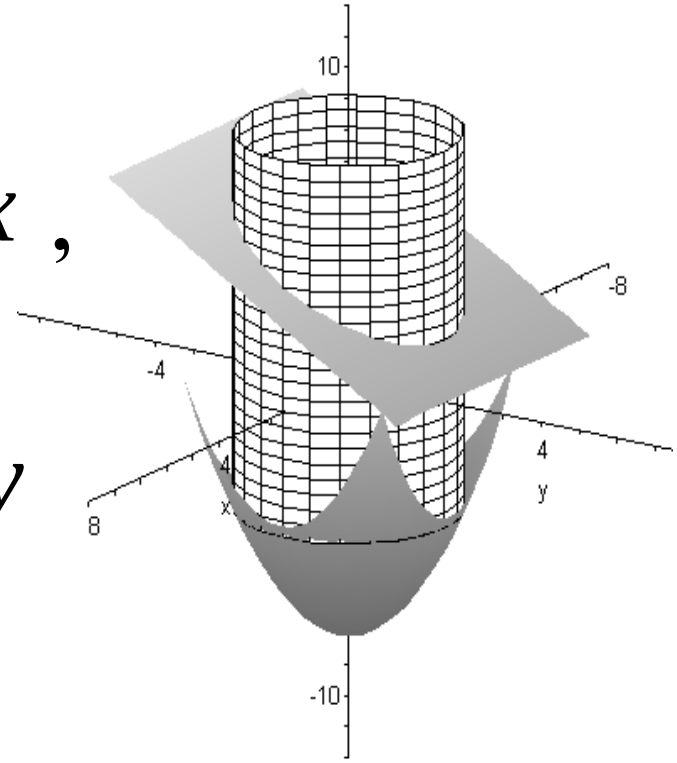
2.2 ทฤษฎีบทของ Fubini

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)dx\,dy$$

3. การประยุกต์การหาค่าอินทิกรัลสองชั้นเพื่อใช้หา*ปริมาตร*

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \left[z_{upper} - z_{lower} \right] dy\, dx \ ,$$

$$\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \left[z_{upper} - z_{lower} \right] dx\, dy$$



4. การประยุกต์การหาค่าอินทิกรัลสองชั้นเพื่อใช้หา<u>***พื้นที่***</u>

$$\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1\, dy\, dx \,, \quad \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} 1\, dx\, dy$$

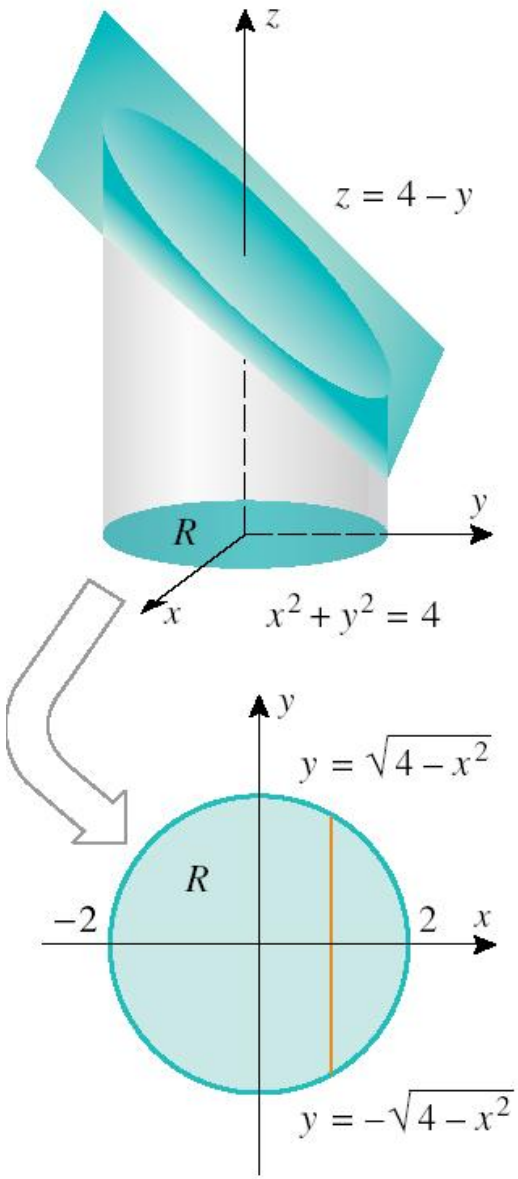
จงหาปริมาตรซึ่งถูกปิดล้อมด้วย

ทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$

ระนาบ $y + z = 4$

และระนาบ $z = 0$

ปริมาตร



$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(4-y)\,dy\,dx$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}(4-y)\,dx\,dy$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(4-y\right)dydx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left[4y-\frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}}dx$$

$$\int_{-2}^{2} 8\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= 4x\sqrt{4-x^2} + 16\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{x=-2}^{x=2}$$

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}(4-y)\,dxdy$$

$$=\int_{-2}^{2}(4-y)\,x\Big|_{x=-\sqrt{4-y^2}}^{x=\sqrt{4-y^2}}\,dy$$

$$\int_{-2}^{2} 2\left(4-y\right)\sqrt{4-y^2}\,dy$$

$$= \left. \begin{array}{l} 4y\sqrt{4-y^2} + 16\sin^{-1}\left(\dfrac{y}{2}\right) \\ + \dfrac{2}{3}\left(4-y^2\right)^{3/2} \end{array} \right|_{y=-2}^{y=2}$$