การแปลงลาปลาซ

การแปลงลาปลาซ (Laplace transform) เป็นวิธีการหนึ่งที่สามารถใช้หาผลเฉลยของ*ปัญหาค่าตั้งต้น*ของสมการเชิงอนุพันธ์

"เราจะใช้การแปลงลาปลาซ แปลงจาก<u>ปัญหาค่าตั้งต้นของสมการเชิงอนุพันธ์</u> เข้าสู่สมการ<u>พหุนาม</u> และหลังจากจัดรูปสมการพนุนามโดยใช้วิธีทางพีชคณิต ก็จะใช้การแปลงลาปลาซผกผัน แปลงสมการพนุนามกลับ เพื่อหาผลเฉลยของสมการเอกพันธ์"

บทนิยาม สัญลักษณ์ และ การแปลงลาปลาซ

บทนิยาม 4.1. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามสำหรับทุกๆ $x \geq 0$ ถ้า $\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$ หาค่าได้ เราเรียกฟังก์ชัน

$$F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

(ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร s) ว่า *การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f และจะใช้สัญลักษณ์ $\mathscr{L}\{f\}$ แทน*การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f หรือก็คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{f\} = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

จะใช้สัญลักษณ์ $\mathscr{L}\{f\}$ แทน*การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน* f หรือก็คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{f\} = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$$

เราเรียกฟังก์ชัน $f(x)$ ว่า*การแปลงลาปลาซผกผัน* (inverse Laplace transform) ของฟังก์ชัน $F(s)$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย

$$f(x) = \mathscr{L}^{-1}\{F\}$$

- **การแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน** $f(x) = 1$ เนื่องจาก

$$\mathscr{L}\{1\} = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-sx} dx = -\frac{e^{-sx}}{s}\Big|_0^\infty = \begin{cases} \dfrac{1}{s} & \text{ถ้า } s > 0 \\ \infty & \text{ถ้า } s \leq 0 \end{cases}$$

ดังนั้นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน 1 คือ

$$F(s) = \mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \qquad \text{เมื่อ } s > 0$$

$f(x)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f\}$
1	$\dfrac{1}{s}, \quad s > 0$
x	$\dfrac{1}{s^2}, \quad s > 0$
$x^n, \ n = 1, 2, 3, \ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
e^{ax}	$\dfrac{1}{s-a}, \quad s > a$
$\sin ax$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos ax$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$

ตารางที่ 4.1: ตารางการแปลงลาปลาซอย่างย่อ

ทฤษฎีบท 4.2 (ความเป็นเชิงเส้นของการแปลงลาปลาซ). *ถ้าเราสามารถหาการแปลงลาปลาซของ* f, f_1 *และ* f_2 *สำหรับบางช่วง* $s > \alpha$, *เมื่อ* α *เป็นจำนวนจริง แล้ว*

- $\mathscr{L}\{f_1 + f_2\} = \mathscr{L}\{f_1\} + \mathscr{L}\{f_2\}$
- $\mathscr{L}\{cf\} = c\mathscr{L}\{f\}$

เมื่อ c *เป็นค่าคงตัวใดๆ และ* $s > \alpha$

$$\mathscr{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1\mathscr{L}\{f_1\} + c_2\mathscr{L}\{f_2\},$$

จงหาการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x) = \cosh ax$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $\sinh ax$

จงหา $\mathscr{L}\{1 + 2x + 3e^{4x} - 5\sin 6x\}$

ทฤษฎีบท 4.3 (การเลื่อนขนานในแนวแกน s ของการแปลงลาปลาซ). *สำหรับการแปลงลาปลาซของ* $f(x)$ *ใดๆ*

$$\mathscr{L}\{f\} = F(s), \qquad s > \alpha$$

เราได้ว่า

$$\mathscr{L}\{e^{ax} f(x)\} = F(s-a), \qquad s > \alpha + a$$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $e^{ax}\sin bx$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $e^{ax}\sinh bx$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $\sinh x \cosh x$

ทฤษฎีบท 4.4 (การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง). *ถ้า* $f(x)$ *ต่อเนื่องบนช่วง* $[0,\infty)$ *และ* $f'(x)$ *ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บน* $[0,\infty)$ *โดยที่* $f(x)$ *เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง* α *แล้ว*

$$\mathscr{L}\{f'\} = s\mathscr{L}\{f\} - f(0), \qquad \text{เมื่อ} \;\; s > \alpha$$

$$\mathscr{L}\{f''\} \;\; =$$

ทฤษฎีบท 4.5 (การแปลงลาปลาซของอนุพันธ์อันดับอื่นๆ).

ถ้า $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ *ต่อเนื่องบนช่วง* $[0, \infty)$

และ $f^{(n)}(x)$ *ต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บน* $[0, \infty)$ *โดยที่ฟังก์ชันที่กล่าวมาทั้งหมด*

เป็นฟังก์ชันที่มีอันดับเลขชี้กำลัง α *แล้ว*

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\} = s^n \mathscr{L}\{f\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

เมื่อ $s > \alpha$

$\sinh ax$	$\dfrac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	128
$\cosh ax$	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > \lvert a \rvert$	125
$\mathscr{L}\{e^{ax} f(x)\}$	$F(s-a), \quad s > \alpha + a$	125
$\mathscr{L}\{c_1 f_1 + c_2 f_2\}$	$c_1 \mathscr{L}\{f_1\} + c_2 \mathscr{L}\{f_2\}$	124
$\mathscr{L}\{f'\}$	$s\mathscr{L}\{f\} - f(0), \quad s > \alpha$	126
$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}$	$s^n \mathscr{L}\{f\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \quad s > \alpha$	127

$x^2 e^{3x}$

$e^{-x} \cos x$

$x^{-1} e^{\pi x}$

$(1 + e^{-x})^2$

$\cos^2 x$

$e^{-x} \cos 3x + e^{6x} - x$

$2x^2 e^{-x} - x^2 + \cos 4x$

$x^{-1} e^{\pi x}$

$x^2 + e^x \sin 2x$

$(x - 5)^4$

$$\frac{2s+2}{s^2+2s+1}$$

$$\frac{3}{(s+5)^8}$$

$$\frac{s-1}{s^2-2s+5}$$

$$\frac{3}{2s^2+8s+10}$$

$$\frac{3s+2}{s^2+2s+10}$$

จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s+7}{s^2+2s-3}\right\}$

$$\frac{s-e}{(s-\sqrt{2})(s-\pi)}$$

จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ เมื่อ

$$F(s) = \frac{7s-1}{(s+1)(s+2)(s-3)}$$

จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ เมื่อ $F(s) = \dfrac{s^2+9s+2}{(s-1)^2(s+3)}$

จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ เมื่อ $F(s) = \dfrac{3s^2 + 5s + 3}{s^4 + s^3}$

จงหาค่า $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2+10s}{(s^2-2s+5)(s+1)}\right\}$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $x^4 e^{4x+4}$

จงหาการแปลงลาปลาซของ $e^{-2x+2}\sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)$

จงหาค่า $F(s)$ เมื่อ $F(s)$ เป็นการแปลงลาปลาซ ของ

$$f(x) = 6e^{5x} - 3\sin 4x$$

(1) $F(s) = \dfrac{2(s^2 - 2s + 26)}{s^3 - 5s^2 + 16s - 80}$ (2) $F(s) = \dfrac{3(s^2 - 2s + 26)}{s^3 - 5s^2 + 16s - 80}$

(3) $F(s) = \dfrac{4(s^2 - 2s + 26)}{s^3 - 5s^2 + 16s - 80}$ (4) $F(s) = \dfrac{5(s^2 - 2s + 26)}{s^3 - 5s^2 + 16s - 80}$

(5) $F(s) = \dfrac{6(s^2 - 2s + 26)}{s^3 - 5s^2 + 16s - 80}$

จงหา $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ เมื่อ $F(s) = \dfrac{1}{s^4 - 8s^2 + 16}$

จงหา $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}$ เมื่อ $s^2F(s) + sF(s) - 6F(s) = \dfrac{s^2+4}{s^2+s}$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y' + 2y = 0; y(0) = 1$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y' + 2y = e^x ; y(0) = 1$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้โดยการประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซ

$$y'' - y' - 2y = 0, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + 2y' - 3y = \sin(2x), \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + y = x, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = -2$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y''+4y'+13y = xe^{-x}, \qquad y(0) = 0,\ \ y'(0) = 2$$

จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y''+9y=\cos(2x), \qquad y(0)=1,\ y'(0)=\frac{12}{5}$$

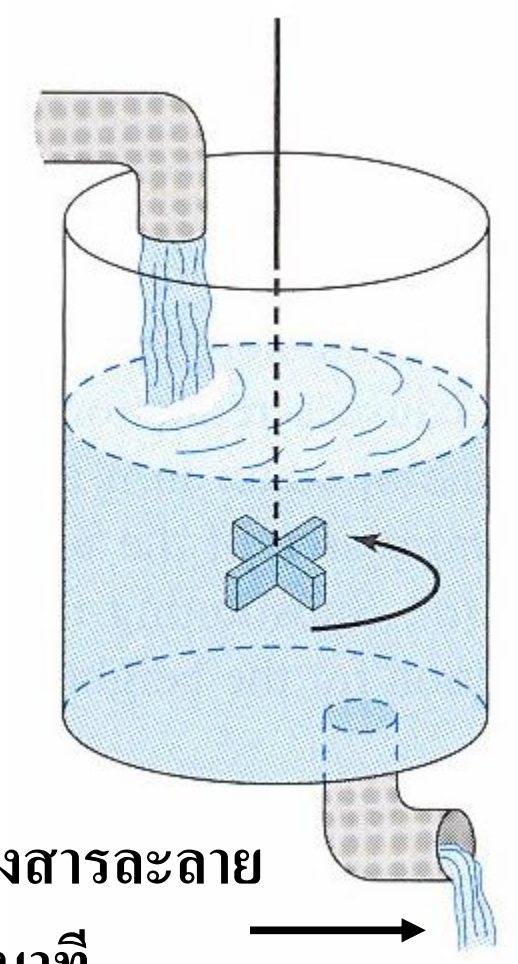
จงใช้การแปลงลาปลาซหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' - 2y' + y = 6xe^{x}, y(0) = 1, y'(0) = 2$$

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้สมการเชิงอนุพันธ์

การไหลของสารละลายคลอรีนความเข้มข้น 2 กรัม/ลิตร

3 ลิตร/นาที

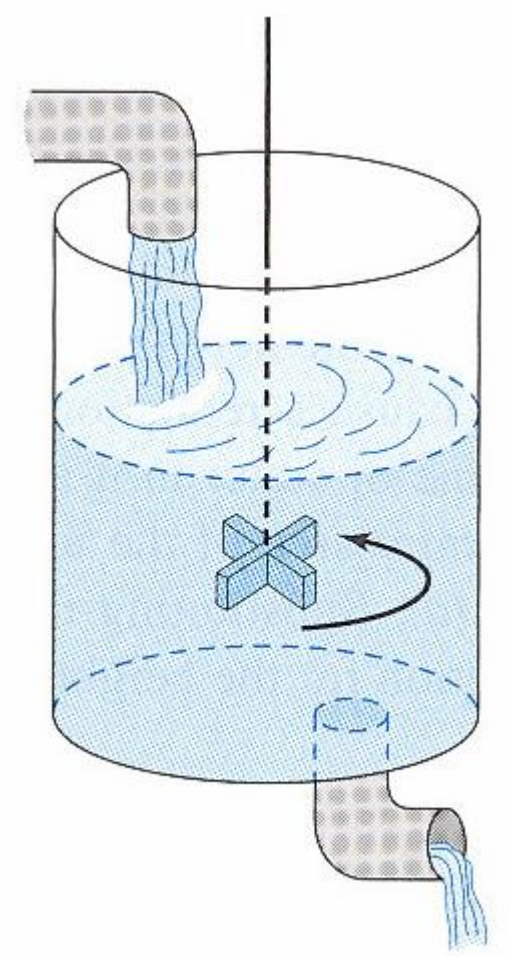


ปริมาตรของสารละลายคงตัว

300 ลิตร

การไหลออกของสารละลาย

3 ลิตร/นาที



ถ้าให้ $y(t)$ แทนปริมาณครอลีน ณ เวลา t

เราสามารถหาการเปลี่ยนแปลง

ของปริมาณครอลีน หรือ $y(t)$ ได้

$$\frac{dy}{dt} = \text{ปริมาณครอลีนที่เข้า- ปริมาณครอลีนที่ออก}$$

$$\text{ปริมาณคลอรีนที่เข้า} = 2 \bullet 3 = 6 \text{ (กรัม/นาที)}$$

ความเข้มข้น 2 กรัม/ลิตร

อัตราการไหล<u>เข้า</u>ของสารละลาย 3 ลิตร/นาที

$$\text{ปริมาณคลอรีนที่ออก} = \frac{y(t)}{300} \bullet 3 = \frac{y(t)}{100} \text{ (กรัม/นาที)}$$

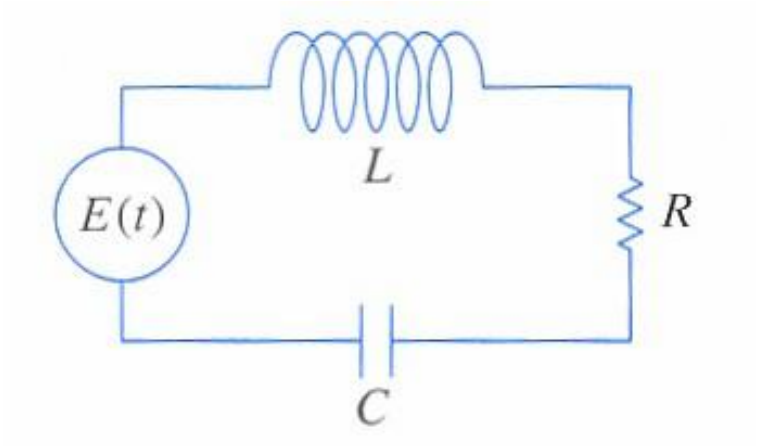
ความเข้มข้น
ปริมาณ คลอรีน /ปริมาตร (กรัม/ลิตร)

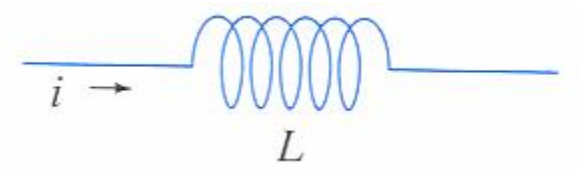
อัตราการไหล<u>ออก</u>ของสารละลาย 3 ลิตร/นาที

ปริมาณครอลีน $y(t)$ หาได้จาก

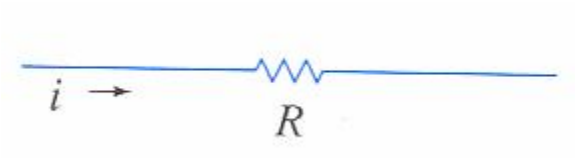
$$\frac{dy}{dt} = \text{ปริมาณครอลีนที่เข้า- ปริมาณครอลีนที่ออก}$$

$$\frac{dy}{dt} = 6 - \frac{y(t)}{100}$$





แรงดันตกคร่อมขดลวด $L\dfrac{dI}{dt}$

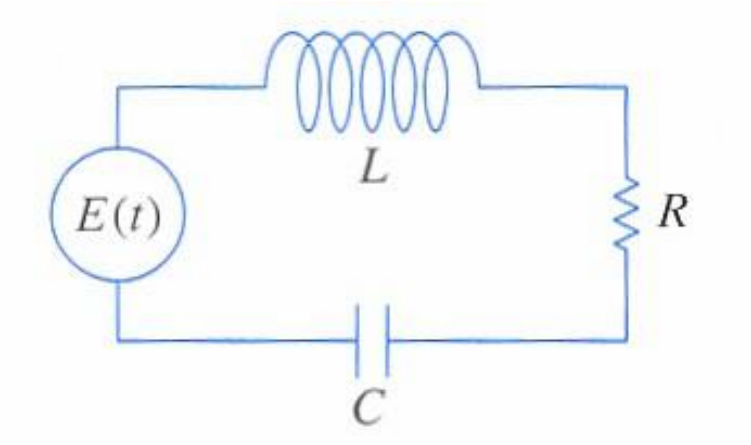


แรงดันตกคร่อมตัวต้านทาน RI

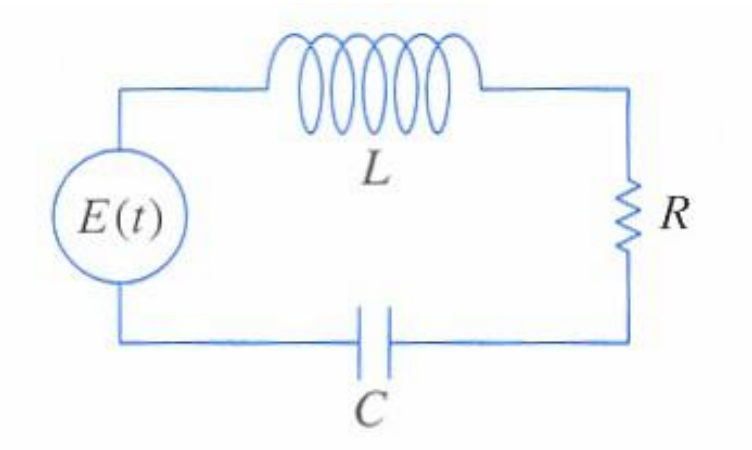
แรงดันตกคร่อมตัวเก็บประจุ $\dfrac{1}{C}q$

โดยกฎของ Kirchoff ข้อที่ 2

“แรงดันรวมในวงจรเท่ากันผลรวมของแรงดันตกคล่อมที่ปรากฏในวงจรนั้น”



$$E(t) = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}q$$

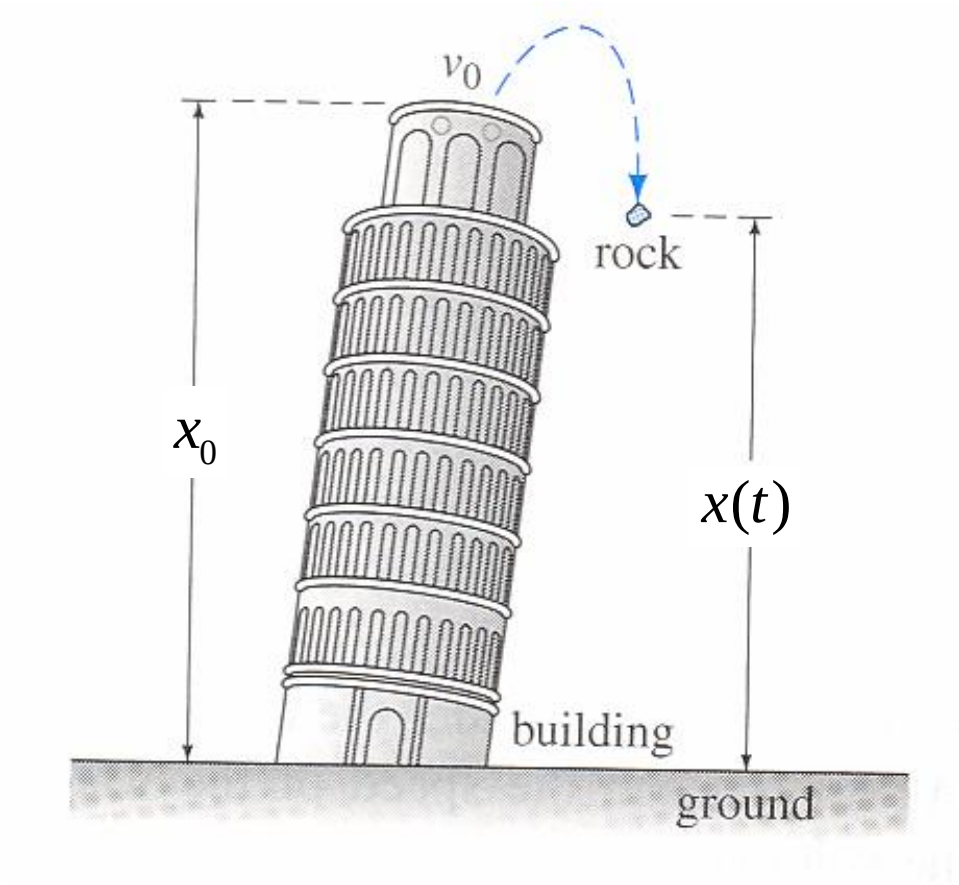


$$E(t) = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}q$$

<u>บทนิยาม</u> กระแสไฟฟ้าคือการเปลี่ยนแปลงประจุต่อ 1 หน่วยเวลา

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$E(t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q$$



มวล	m
เวลา	t
ระยะทาง	$x(t)$
แรง	$F = ma$
ความเร่ง	$a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$

ความเร่งสู่ศูนย์กลางโลก $g = 9.8$

สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับการหาตำแหน่งของวัตถุ

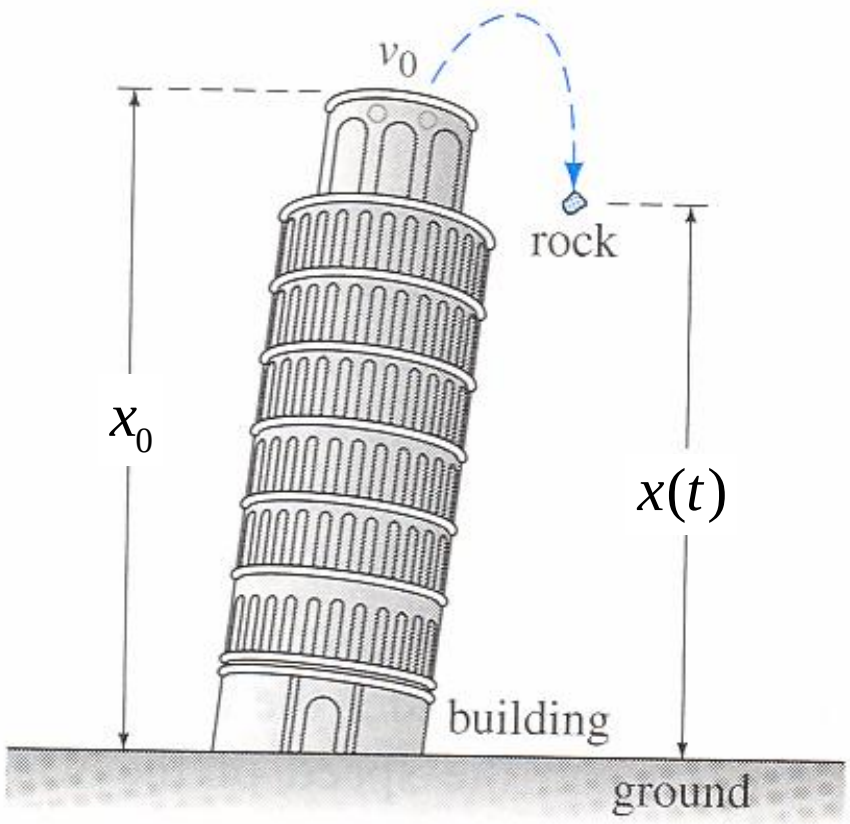
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

$$F = ma$$

ปัญหาค่าตั้งต้นสำหรับการหาตำแหน่งของวัตถุ



$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g,$$

$$x(0) = x_0, x'(0) = v_0$$