สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับที่สอง

รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองคือ

$$\frac{d^2y}{d^2x} = f(x, y, \frac{dy}{dx}),$$
$$y'' = f(x, y, y'),$$

โดยที่ f เป็นฟังก์ชันใดๆ ของ x, y และ $\frac{dy}{dx}$, x เป็นตัวแปรอิสระ, y เป็นตัวแปรไม่อิสระ และ $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{d^2x}$ เป็นอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x อันดับที่หนึ่ง และ ที่สองตามลำดับ

ตัวอย่างสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

- $F = m\frac{d^2y}{dt^2}$ กฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law)
- $F_{\text{สปริง}} = m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$ กฎของฮุก (Hooke's law)
- $F_{\text{แรงเสียดทาน}} = my'' = -by'$ สมการการเคลื่อนที่แบบการสั่น (vibration motion equation)
- $my''+by'+ky = F_{\text{ภายนอก}}(t)$ สมการการเคลื่อนที่แบบการสั่นชนิดมีแรงภายนอก (vibration motion equation with external force)
- $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{LC}q = \dfrac{1}{L}E(t)$ กฎของคีร์ชฮอฟฟ์ (Kirchhoff's loop law)

สมการเชิงเส้น

เราสามารถเขียน
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สอง ได้เป็น

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x),$$

เมื่อ $a_2(x) \neq 0$ และ $a_2,\ a_1,\ a_0,\ b$ เป็นฟังก์ชันของ

ตัวแปร x

เนื่องจาก $a_2(x) \neq 0$ เราสามารถหารสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สองดังกล่าวด้วย $a_2(x)$ และ เราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่สองได้เป็น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \qquad (3.7)$$

เมื่อ $p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $q(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_2(x)}$ และ $r(x) = \dfrac{b(x)}{a_2(x)}$

ถ้า $r(x) \equiv 0$ (นั่นคือ $r(x) = 0$ ทุกๆ ค่า x ที่อยู่ในช่วงที่พิจารณา) สมการ (3.7) จะสามารถถูกเขียนได้เป็น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.8}$$

และเราเรียกสมการนี้ว่า *สมการเอกพันธุ์*[11] (homogeneous equation) แต่ ถ้า $r(x) \neq 0$ เราเรียกสมการ (3.7) ว่า *สมการไม่เอกพันธุ์* (nonhomogeneous equation)

$$y'' + 3xy' + x^3y^2 = e^x$$

$$(\sin x)y'' + (\cos x)y' + \tan\sqrt{x} = 0$$

$$y'' + 3xy' + x^3y = e^x$$

$$y'' + 3xy' + x^3y = 0$$

$$y'' + 3y' + 5y = e^x$$

$$y'' + 3y' + 5y = 0$$

ทฤษฎีบทมูลฐานของสมการเอกพันธุ์ 3.2. *สำหรับสมการเอกพันธ์*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad (3.10)$$

ถ้า y_1 *และ* y_2 *เป็นผลเฉลยของ***สมการเอกพันธุ์เชิงเส้น***แล้ว ผลรวมเชิงเส้นของผลเฉลยทั้งสอง*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

เมื่อ c_1 *และ* c_2 *เป็นค่าคงตัวใดๆ ก็ยังคงเป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น (3.10) ด้วย*

ทฤษฎีบท 3.3. *ถ้า* y_1 *และ* y_2 *เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้น*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \qquad (3.11)$$

ซึ่งนิยามบนช่วง I *บางช่วง, โดย* $\dfrac{y_1}{y_2}$ *ไม่เป็นค่าคงตัวแล้ว ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3.3) บนช่วง* I *ต้องอยู่ในรูป*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

เมื่อ c_1 *และ* c_2 *เป็นค่าคงตัวใดๆ,* ***เท่านั้น***

สมการเอกพันธุ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว

สมการแคแรกเทอริสติก

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

ผลเฉลยหรือราก ของสมการแคแรกเทอริสติก

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $b^2 - 4ac > 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน**

- $b^2 - 4ac = 0$

  λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**

- $b^2 - 4ac < 0$

λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**

- $b^2 - 4ac > 0$

λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน**

เราสามารถสรุปได้ว่าในกรณีนี้ผลเฉลยทั่วไป ต้องอยู่ในรูป

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x},$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

- $b^2 - 4ac = 0$

λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**

ในกรณีนี้ ผลเฉลยของสมการคาแรกเทอริสติกคือ

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a}$$

โดยทฤษฎีบท 3.3 ทำให้เราได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x},$$

- $b^2 - 4ac < 0$

λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**

กรณีเกิดขึ้นเมื่อ $b^2 - 4ac < 0$ ทำให้เราได้รากของสมการ

แคแรกเทอริสติกเป็น

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

ดังนั้น ถ้าให้

$$r = -\frac{b}{2a}, \quad s = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{และ} \quad i = \sqrt{-1}$$

เราสามารถเขียนรากของสมการได้เป็น

$$\lambda_1 = r + is, \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = r - is$$

ถ้าให้ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ และ เขียนผลเฉลยทั่วไปได้ในรูป

$$y = e^{rx}\left[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)\right]$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$4y'' + 20y' + 24y = 0$$

$$y'' + y' = 0$$

$$y'' = 4y$$

$$4y'' + 20y' + 25y = 0$$

$$y'' = 4y' - 7y$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y'' + 4y' + 5y = 0, y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$y'' + 4y' + 2y = 0, y(0) = -1, \quad y'(0) = 2 + 3\sqrt{2}$$

$$y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 2, \quad y'(0) = 25/3$$

สรุป

ในการหาผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์เชิงเส้นอันดับที่สองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.22}$$

เมื่อ a, b และ c เป็นค่าคงตัว เราจะพิจารณาสมการแคแรกเทอริสติก

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{3.23}$$

ผลเฉลยหรือราก ของสมการแคแรกเทอริสติก (3.23) ประกอบด้วย

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{และ} \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

เราพบว่าค่า λ_1 และ λ_2 จะเป็นไปได้ 3 กรณี เมื่อแบ่งตามเครื่องหมายของค่าดิสคริมิแนนต์ $b^2 - 4ac$ นั่นคือ

- $b^2 - 4ac > 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงใดๆ ที่แตกต่างกัน**

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

- $b^2 - 4ac = 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนจริงที่เหมือนกัน**

  ถ้า $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

- $b^2 - 4ac < 0$: λ_1 และ λ_2 จะเป็น**จำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นสังยุคเชิงซ้อนซึ่งกันและกัน**

  ถ้า $\lambda_1 = r + is$ และ $\lambda_2 = r - is$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ (3.22) คือ

$$y = e^{rx}\left[c_1 \cos(sx) + c_2 \sin(sx)\right]$$

  เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นจำนวนจริงใดๆ

สมการไม่เอกพันธ์

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษา การหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธ์เชิงเส้น

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x),$$

เมื่อ p และ q เป็นฟังก์ชันของ x และ $r(x) \neq 0$

ในการหาผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.28) เราจำเป็นต้องใช้**สมการเอกพันธุ์**

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

เราเรียกสมการว่า*สมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง กับสมการไม่เอกพันธุ์*

สมมติว่า

เรามี y_p เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = r(x)$$

ให้ y_{p_2} เป็นผลเฉลยใดๆ ของสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น

$$y_{p_2}'' + p(x)y_{p_2}' + q(x)y_{p_2} = r(x)$$

พบว่า

$$
\begin{aligned}
& (y_{p_2} - y_p)'' + p(x)(y_{p_2} - y_p)' + q(x)(y_{p_2} - y_p) \\
= \quad & \left(y''_{p_2} + p(x)y'_{p_2} + q(x)y_{p_2}\right) - \left(y''_p + p(x)y'_p + q(x)y_p\right) \\
= \quad & r(x) - r(x) \\
= \quad & 0
\end{aligned}
$$

แสดงว่า $y_{p_2} - y_p$ เป็น*ผลเฉลยทั่วไป*ของสมการเอกพันธุ์

$$y_h = y_{p_2} - y_p$$

กล่าวได้ว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น คือ

$$y = y_h + y_p$$

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

1. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

2. หาผลเฉลยเฉพาะ y_p ผลเฉลยหนึ่งของสมการไม่เอกพันธุ์

3. ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์คือ

$$y = y_h + y_p$$

ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

พิจารณาสมการ $$y'' + 4y = 2e^{3x}$$

$$\frac{2}{13}e^{3x}$$

ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยเฉพาะ y_p โดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

$$ay'' + by' + cy = r(x)$$

1. ตรวจสอบว่า $r(x)$ เป็นหนึ่งในรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1 หรือไม่? ถ้าใช่ จะดำเนินการหาผลเฉลยต่อ

$r(x)$	ค่า y_p ที่จะกำหนดให้เป็น
$ae^{\lambda x}$	$Ae^{\lambda x}$
$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0$
$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)e^{\lambda x}$	$(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)e^{\lambda x}$
$a\cos(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$	$A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\cos(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\sin(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)$	$\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)$
$a\cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{\lambda x}$
$b\sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))e^{\lambda x}$
$[a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)]e^{\lambda x}$	$[A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)]e^{\lambda x}$
$\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]e^{\lambda x}$
$\mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]e^{\lambda x}$
$[\mathbf{A_n}(x)\cos(\omega x) + \mathbf{B_n}(x)\sin(\omega x)]e^{\lambda x}$	$[\mathcal{A}_n(x)\cos(\omega x) + \mathcal{B}_n(x)\sin(\omega x)]e^{\lambda x}$

2. หาผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = 0$$

3. พิจารณา $r(x)$ แล้วเลือกผลเฉลย y_p ให้อยู่ในรูปทางขวาของตาราง 3.1 **แต่**

- ถ้า y_p ไม่มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ สามารถใช้ y_p ได้เลย

- ถ้า y_p **มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป** y_h **ของสมการเอกพันธุ์** ให้เอาค่า x คูณกับ y_p ที่เลือกมา

- ถ้า y_p ใหม่ ที่ได้จากการคูณด้วย x ยัง**มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป** y_h **ของสมการเอกพันธุ์** ให้ให้เอาค่า x คูณซ้ำไปเรื่อยๆ จนกว่า y_p ใหม่ที่ได้ ไม่มีพจน์ที่มีรูปแบบซ้ำกับพจน์ที่ปรากฏในผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์

4. แทนค่า y_p ลงในสมการไม่เอกพันธุ์ เพื่อเทียบหาสัมประสิทธิ์

หมายเหตุ สำหรับกรณีที่ $r(x)$ ไม่ได้เป็นหนึ่งในรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1 **แต่อยู่ในรูปผลรวม(หรือผลต่าง)**ของฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1 เช่น ถ้า $r(x)$ อยู่ในรูปผลรวมของฟังก์ชัน $r_1(x)$ และ $r_2(x)$

$$ay'' + by' + cy = r_1(x) + r_2(x), \qquad (3.32)$$

โดยที่ $r_1(x)$ และ $r_2(x)$ มีรูปแบบฟังก์ชันที่ปรากฏทางซ้ายของตาราง 3.1

โดย *ขั้นตอนวิธีการหาผลเฉลยโดยระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์*

เราสามารถแยกหาค่าผลเฉลยเฉพาะ y_{p_1} จากสมการไม่เอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = r_1(x)$$

และผลเฉลยเฉพาะ y_{p_2} จากสมการไม่เอกพันธุ์

$$ay'' + by' + cy = r_2(x)$$

ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ (3.32) จะอยู่ในรูป[14]

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2}$$

จงหารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' + 2y' - 3y = r(x),$$

เมื่อ $r(x)$ มีค่าเป็น

1. $7\cos(3x)$
2. $5e^{-3x}$
3. $x^2\cos(\pi x)$
4. $2xe^x\sin x - e^x\cos x$
5. $x^2e^x + 3xe^x$
6. $\tan x$

จงหารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' = r(x)$$

เมื่อ $r(x)$ มีค่าเป็น

1. 1
2. $3x^2$
3. x^2e^x

จงหารูปแบบของผลเฉลยเฉพาะ y_p ของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 2y' + y = r(x)$$

เมื่อ $r(x)$ มีค่าเป็น

1. e^x

2. xe^x

3. $e^x \sin x$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 3y' + 2y = 4e^{-5x}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 2y' + y = 5e^x$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' + 2y' = 2x^2 + 5x$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y''+9y = 18x-5e^{x}+12\cos(3x),$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้น

$$y'' + 2y' = 2x + 5,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y'' = 6x, \quad y(0) = 3, \; y'(0) = -1$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 4y = \cos x - \sin x$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' + 4y = \cos x - \sin x$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x}$$

จงหาผลเฉลยของปัญหาค่าตั้งต้นต่อไปนี้

$$y''+4y = x^2+3e^x, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 2$$

ในการหาผลเฉลยเฉพาะของสมการไม่เอกพันธุ์ ระเบียบวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ มีขีดจำกัดในการใช้คือ

- ต้องเป็นสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น*ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว*
- ฟังก์ชัน $r(x)$ ต้องเป็นไปตามตาราง 3.1 เท่านั้น

การแปรผันของตัวแปรเสริม

พิจารณาสมการไม่เอกพันธุ์เชิงเส้น

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x) \qquad (3.37)$$

สมมติว่าเราทราบผลเฉลยทั่วไป y_h ของสมการเอกพันธุ์ที่เกี่ยวข้อง

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

โดย y_h อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของของผลเฉลย y_1 และ y_2

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

แนวความคิดในการหาผลเฉลยเฉพาะ เราจะสมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ y_p มีรูปแบบคล้ายกับผลเฉลยทั่วไป y_h

เปลี่ยนค่าคงตัวใดๆ c_1 และ c_2 เป็น*ฟังก์ชันที่ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว* $u(x)$ และ $v(x)$ ตามลำดับ[15]

$$y_p = u(x)y_1 + v(x)y_2$$

สำหรับการหาค่า $u(x)$ และ $v(x)$ เราจะเริ่มจาก

1. พิจารณาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ y_p

$$y_p' = uy_1' + u'y_1 + vy_2' + v'y_2$$

$$y_p' = uy_1' + u'y_1 + vy_2' + v'y_2$$

เพิ่มเงื่อนไขให้ $u'y_1 + v'y_2 = 0$

ดังนั้นทำให้ได้ว่า $y_p' = uy_1' + vy_2'$

และ อนุพันธ์อันดับสองของ y_p คือ

$$y_p'' = uy_1'' + u'y_1' + vy_2'' + v'y_2'$$

2. แทนค่า y_p, y_p' และ y_p'' ลงในสมการ

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x)$$

$$a_2\left(uy_1'' + u'y_1' + vy_2'' + v'y_2'\right) + a_1\left(uy_1' + vy_2'\right) + a_0\left(uy_1 + vy_2\right) = r(x)$$

$$u\underbrace{\left(a_2y_1'' + a_1y_1' + a_0y_1\right)}_{=0 \text{ เพราะ } y_1 \text{ เป็นผลเฉลยทั่วไป}} + v\underbrace{\left(a_2y_2'' + a_1y_2' + a_0y_2\right)}_{=0 \text{ เพราะ } y_2 \text{ เป็นผลเฉลยทั่วไป}} + a_2(u'y_1' + v'y_2') = r(x)$$

$$a_2(u'y_1' + v'y_2') = r(x)$$

ดังนั้นเราได้

$$u'y_1' + v'y_2' = \frac{r(x)}{a_2(x)}$$

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

$$u'y_1' + v'y_2' = \frac{r(x)}{a_2(x)}$$

ซึ่งมีผลเฉลยของระบบสมการคือ

$$u' = -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}, \quad \text{และ} \quad v' = \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')},$$

เมื่อ $\bar{r} = \dfrac{r(x)}{a_2(x)}$

หาค่า u และ v ได้โดย

$$u(x) = \int -\frac{y_2\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx$$

$$v(x) = \int \frac{y_1\bar{r}}{(y_1y_2' - y_2y_1')}dx$$

ได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ คือ

$$\begin{aligned} y &= y_h + y_p \\ &= c_1y_1 + c_2y_2 + u(x)y_1 + v(x)y_2, \end{aligned}$$

การแปรผันของตัวแปรเสริม

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$\frac{y''}{2} + 3y' + 4y = e^{3x}$$

$y_1 =$ $y_2 =$

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

$$u'y_1' + v'y_2' = \frac{r(x)}{a_2(x)}$$

การแปรผันของตัวแปรเสริม

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์

$$\frac{y''}{2} + 3y' + 4y = e^{3x}$$

$y_1 =$ $\qquad\qquad$ $y_2 =$

$y'_1 =$ $\qquad\qquad$ $y'_2 =$

$y_1 y_2' - y_2 y_1' =$

$\bar{r} =$

หาค่า u และ v ได้โดย

$$u(x) = \int -\frac{y_2 \bar{r}}{(y_1 y_2' - y_2 y_1')} dx \quad =$$

$$v(x) = \int \frac{y_1 \bar{r}}{(y_1 y_2' - y_2 y_1')} dx \quad =$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y = \csc x$$

$y_1 =$ $y_2 =$

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

$$u'y_1' + v'y_2' = \frac{r(x)}{a_2(x)}$$

จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ

$$y'' + y = \tan x$$

$y_1 =$ $y_2 =$

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

$$u'y_1' + v'y_2' = \frac{r(x)}{a_2(x)}$$