



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี  
ข้อสอบกลางภาค ภาคการศึกษาที่ 3/2547

รหัสวิชา 103105

ชื่อวิชา CALCULUS III

สอบวันเสาร์ ที่ 20 เดือน กุมภาพันธ์ พ.ศ 2549

เวลา 12.00-14.00 น.

ชื่อ – สกุล..... เลขประจำตัว..... เลขที่นั่งสอบ.....

คำชี้แจง :

1. ข้อสอบมีจำนวน 15 หน้า 40 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน รวมคะแนนทั้งสิ้น 40 คะแนน
2. ข้อสอบแต่ละข้อจะมีตัวเลือก 5 ตัวเลือก จงเลือกตัวเลือกที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียวเพื่อระบยลงในกระดาษคำตอบ การทำลายคำตอบมากกว่า 1 คำตอบในข้อนั้นจะถือว่า ข้อนั้นตอบไม่ถูกต้อง
3. ดินสอนที่จะใช้ระบยต้องเป็นดินสอนที่มีระดับความเข้มเทียบเท่าหรือมากกว่า 2B
4. นักศึกษาสามารถทดลองในข้อสอบได้
5. ให้นักศึกษาเขียน ชื่อ – สกุล, เลขประจำตัว และ เลขที่นั่งสอบ ลงในข้อสอบหน้าแรก พว从容ทั้งเขียนชื่อ – สกุล, เลขประจำตัว และ เลขที่นั่งสอบ พว从容ทั้งระบายน้ำทั้งสองข้างของกระดาษคำตอบให้เรียบร้อย
6. **ไม่อนุญาตให้นำเอกสารและเครื่องคำนวนใดๆ เข้าห้องสอบนอกจากบัตรประจำตัวนักศึกษา**
7. ห้ามนำข้อสอบออกจากห้องสอบโดยเด็ดขาด

ห้ามเปิดข้อสอบก่อนได้รับอนุญาต

อาจารย์ผู้สอน.....(ลงชื่อ)

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 1-2

$$f(x, y) = xe^x + y + \sin y$$

1. จุดใดต่อไปนี้เป็นหนึ่งในจำนวนจุดวิกฤตทั้งหมดของฟังก์ชัน  $f(x, y)$

1.)  $(-1, 7\pi)$

2.)  $(-1, \frac{\pi}{2})$

3.)  $(0, 0)$

4.)  $(1, \frac{\pi}{2})$

5.)  $(1, \pi)$

2. จงหาค่าดิสคริมิแนนต์ (discriminant) ของ  $f$  ที่จุดวิกฤต

(นั่นคือหาค่า  $D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$  เมื่อ  $(a, b)$  คือจุดวิกฤตของฟังก์ชัน  $f$ )

1.)  $-2$

2.)  $-1$

3.)  $0$

4.)  $1$

5.)  $\pi$

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 3-6

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

3. สามารถหาจุดวิกฤตจากฟังก์ชัน  $f(x, y)$  ได้กี่จุด

1.)  $2$

2.)  $3$

3.)  $4$

4.)  $5$

5.)  $6$

4. ให้  $D(x, y)$  เป็นดิสคริมิแนนต์ (discriminant) ของ  $f(x, y)$  ( $D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$ )  
จงหาค่า  $D(0.5, 0.5)$
- 1.) -9
  - 2.) -4
  - 3.) 0
  - 4.) 9
  - 5.) 36
5. ข้อใดเป็นค่า สูงสุด สัมพัทธ์ของ  $f(x, y)$
- 1.) -1
  - 2.) 0
  - 3.) 6
  - 4.) 27
  - 5.) ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง
6. ข้อใดเป็นค่า ต่ำสุด สัมพัทธ์ของ  $f(x, y)$
- 1.) -1
  - 2.) 0
  - 3.) 6
  - 4.) 27
  - 5.) ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง

7. ค่าของ  $\int_2^3 \int_1^2 \left( \frac{x^3}{2} - \frac{y^2}{3} \right) dx dy$  คือ

1.)  $-\frac{287}{72}$

2.)  $-\frac{17}{72}$

3.)  $-\frac{7}{72}$

4.)  $\frac{17}{72}$

5.)  $\frac{287}{72}$

8. ค่าของ  $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{y-x} dx dy$  คือ

1.) 1

2.) 2

3.) 4

4.) 6

5.) 8

9. ค่าของ  $\int_0^{\ln 2} \int_0^1 xy e^{xy^2} dy dx$  คือ

1.)  $\frac{1-\ln 2}{2}$

2.)  $\frac{\ln 2}{2}$

3.)  $\frac{\ln 2-1}{2}$

4.)  $\ln 2-2$

5.)  $\frac{\ln 2-2}{2}$

10. ค่าของ  $\int_0^1 \int_y^{y^2} xy \ dx \ dy$  คือ

1.)  $-\frac{1}{24}$

2.)  $-\frac{1}{12}$

3.)  $-\frac{1}{4}$

4.)  $\frac{1}{2}$

5.)  $\frac{1}{12}$

11. ค่าของ  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\tan x}^1 \frac{1}{1+y^2} dy \ dx$  คือ

1.) 1

2.)  $\frac{\pi}{4}$

3.)  $\frac{\pi}{16}$

4.)  $\frac{\pi^2}{32}$

5.)  $\left(\frac{\pi}{16}\right)^2$

12. ค่าของ  $\int_0^{\pi/3} \int_{\tan x}^{\cos x} \frac{\tan x}{y^2} dy \ dx$  คือ

1.)  $\frac{\pi}{3}$

2.)  $\frac{\pi-1}{3}$

3.)  $\frac{\pi-2}{3}$

4.)  $\frac{\pi-3}{3}$

5.)  $\frac{\pi-6}{3}$

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 13-15

พิจารณาอินทิกรัล  $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(x^2) dx dy$

โดยทฤษฎีบทของ Fubini เรายารับว่า

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(x^2) dx dy = \int_a^b \int_{g_1}^{g_2} \sin(x^2) dy dx$$

13.  $g_1 + g_2$  มีค่าเท่ากับ

- 1.)  $\frac{y}{2}$
- 2.)  $\frac{y}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- 3.)  $2x$
- 4.)  $2x + \frac{\pi}{2}$
- 5.) ไม่มีข้อถูก

14.  $a + b$  มีค่าเท่ากับ

- 1.)  $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
- 2.)  $\sqrt{\pi}$
- 3.)  $\frac{\pi}{2}$
- 4.)  $\pi$
- 5.) ไม่มีข้อถูก

15. ค่าของ  $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(x^2) dx dy$  คือ

- 1.) -2
- 2.) -1
- 3.) 0
- 4.) 1
- 5.) 0

16. จงหาปริมาตรของรูปทรงที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว  $x = 0, x = 3, y = 0, y = 2, z = 0, x + 2z = 4$

- 1.) 7.5 ลูกบาศก์หน่วย
- 2.) 10 ลูกบาศก์หน่วย
- 3.) 15 ลูกบาศก์หน่วย
- 4.) 16.5 ลูกบาศก์หน่วย
- 5.) 30 ลูกบาศก์หน่วย

17. หาปริมาตรของรูปทรงที่ปิดล้อมด้วยพื้นผิว  $x = -1, x = 2, y = 1, y = 3, y - z = 4, x + z = 4$

- 1.) 27 ลูกบาศก์หน่วย
- 2.) 33 ลูกบาศก์หน่วย
- 3.) 36 ลูกบาศก์หน่วย
- 4.) 48 ลูกบาศก์หน่วย
- 5.) 54 ลูกบาศก์หน่วย

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 18-19

พิจารณาทรงตัน  $G$  ซึ่งอยู่ใน อ็อกตาแคน (octant) ที่หนึ่ง และถูกปิดล้อมด้วยระนาบ

$$x = 0, x = 4, y = 0, z = 0 \text{ และผิวโค้ง } z = 9 - y^2$$

18. พื้นที่ของบริเวณภาคชาย  $R$  ของทรงตัน  $G$  บนระนาบ  $xy$  คือ

- 1.) 6 ตารางหน่วย
- 2.) 12 ตารางหน่วย
- 3.) 18 ตารางหน่วย
- 4.) 36 ตารางหน่วย
- 5.) 72 ตารางหน่วย

19. ปริมาตรของทรงตัน  $G$  มีค่าเท่ากับ

- 1.) 6 ลูกบาศก์หน่วย
- 2.) 12 ลูกบาศก์หน่วย
- 3.) 18 ลูกบาศก์หน่วย
- 4.) 36 ลูกบาศก์หน่วย
- 5.) 72 ลูกบาศก์หน่วย

จะใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 20-22

พิจารณาทรงตัน  $G$  ซึ่งอยู่ใน อ็อกตาแคน (octant) ที่หนึ่ง และถูกปิดล้อมด้วยระนาบ  $6x + 3y + z = 6$

20. บริเวณภาพฉาย  $R$  ของทรงตัน  $G$  บนระนาบ  $xy$  คือ

- 1.)  $0 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq 2$
- 2.)  $0 \leq x \leq 1 - \frac{y}{2}, 0 \leq y \leq 2$
- 3.)  $0 \leq x \leq 2 - 2y, 0 \leq y \leq 1$
- 4.)  $0 \leq y \leq 2 - 2x, 0 \leq x \leq 1$
- 5.) มีข้อถูกมากกว่า 1 ข้อ

21. พื้นที่ของบริเวณ  $R$  มีค่าเท่ากับ

- 1.)  $\frac{1}{3}$  ตารางหน่วย
- 2.)  $\frac{2}{3}$  ตารางหน่วย
- 3.) 1 ตารางหน่วย
- 4.)  $\frac{4}{3}$  ตารางหน่วย
- 5.) 2 ตารางหน่วย

22. ปริมาตรของทรงตัน  $G$  มีค่าเท่ากับ

- 1.)  $\frac{1}{3}$  ลูกบาศก์หน่วย
- 2.)  $\frac{2}{3}$  ลูกบาศก์หน่วย
- 3.) 1 ลูกบาศก์หน่วย
- 4.)  $\frac{4}{3}$  ลูกบาศก์หน่วย
- 5.) 2 ลูกบาศก์หน่วย

จะใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 23-25

พิจารณาทรงตัน  $G$  ซึ่งถูกปิดล้อมด้วยผิวโค้ง  $4x^2 + 4y^2 = 9$  ระหว่าง  $x+z=16$  และระหว่าง  $z=0$

23. ถ้าจุด  $(\alpha, \beta, \gamma)$  เป็นจุดใดๆ บนพื้นผิวของทรงตัน  $G$  ซึ่งถูกพิจารณาในระบบพิกัดจาก  $(x, y, z)$  ค่า  $\gamma$  จะมีค่าสูงที่สุดเท่ากับ

- 1.)  $\frac{19}{2}$
- 2.) 13
- 3.) 16
- 4.)  $\frac{35}{2}$
- 5.) 19

ถ้าจะหาปริมาตรของทรงตัน  $G$  โดยการหาค่าอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงข้าม พบว่า

$$\text{ปริมาตรของทรงตัน } G = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r, \theta) r dr d\theta$$

24.  $r_1 + r_2$  มีค่าเท่ากับ

- 1.) 2
- 2.)  $\frac{3}{2}$
- 3.) 3
- 4.) 6
- 5.) 9

25. ปริมาตรของทรงตัน  $G$  มีค่าเท่ากับ

- 1.)  $9\pi$  ลูกบาศก์หน่วย
- 2.)  $18\pi$  ลูกบาศก์หน่วย
- 3.)  $36\pi$  ลูกบาศก์หน่วย
- 4.)  $72\pi$  ลูกบาศก์หน่วย
- 5.)  $144\pi$  ลูกบาศก์หน่วย

จะใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 26-27

พิจารณาค่าอินทิกรัล

$$\Omega = \iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dA$$

เมื่อ  $R$  คือบริเวณในจตุภาค (quadrant) ที่ 1 และอยู่ภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด  $(1,0)$  และมีรัศมีเท่ากับ 1

26. เมื่อพิจารณาค่าอินทิกรัล  $\Omega$  ในระบบพิกัดเชิงข้าว จะได้ว่า

1.)  $\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r dr d\theta$

2.)  $\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin\theta} dr d\theta$

3.)  $\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} dr d\theta$

4.)  $\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\sin\theta} \frac{1}{r} dr d\theta$

5.)  $\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \frac{1}{r} dr d\theta$

27.  $\Omega$  มีค่าเท่ากับ

1.) 1

2.) 2

3.)  $\frac{\pi}{2}$

4.)  $\pi + 1$

5.)  $\pi$

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 28-29

เมื่อประยุกต์ใช้การหาค่าปริพันธ์สองชั้นในพิกัดเชิงข้าวหาพื้นที่ซึ่งอยู่ในจตุภาคที่ 1 โดยอยู่ภายนอกวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด  $(0,0)$  มีรัศมีเท่ากับ 1 และอยู่ภายนอกวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด  $(0,1)$  และมีรัศมีเท่ากับ 1 พบร่วม

$$\text{พื้นที่} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r, \theta) r dr d\theta$$

28.  $\theta_1 + \theta_2$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

- 1.)  $\frac{\pi}{6}$  Rad
- 2.)  $\frac{\pi}{4}$  Rad
- 3.)  $\frac{\pi}{3}$  Rad
- 4.)  $\frac{\pi}{2}$  Rad
- 5.)  $\frac{2\pi}{3}$  Rad

29. พื้นที่ดังกล่าวมีค่าเท่าใด

- 1.)  $\frac{\pi}{8}$  ตารางหน่วย
- 2.)  $\frac{\pi}{6}$  ตารางหน่วย
- 3.)  $\frac{\pi}{4}$  ตารางหน่วย
- 4.)  $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{6}$  ตารางหน่วย
- 5.)  $\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}$  ตารางหน่วย

30. ค่าของ  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin 2\theta} r dr d\theta$  คือ

- 1.)  $\frac{\pi}{48}$
- 2.)  $\frac{\pi}{24}$
- 3.)  $\frac{\pi}{12}$
- 4.)  $\frac{\pi}{8}$
- 5.)  $\frac{\pi}{12} - \frac{1}{8}$

31. จงหาค่าปริพันธ์  $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$

- 1.) 8
- 2.) 9
- 3.) 10
- 4.) 11
- 5.) 12

32. จงหาค่าปริพันธ์  $\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} \int_0^{\ln z} e^y dy dz dx$

- 1.)  $-\frac{3}{4}$
- 2.)  $-\frac{1}{4}$
- 3.) 1
- 4.)  $\frac{1}{4}$
- 5.)  $\frac{3}{4}$

ຈິງໃຫ້ຂໍ້ມູນຕ່ວງໄປນີ້ຕອບຄໍາຖາມຂ້ອງ 33-35

ພິຈາრນາທຽບຕັນຮູບປົກສອນທີ່ຈຸດ  $(0,0,0)$ ,  $(0,1,0)$ ,  $(1,1,0)$  ແລະ  $(0,1,1)$  ຈຶ່ງກ່າວຄໍາອືນທິກຣລຂອງ  
ພັກສະນ  $f(x, y, z) = x$  ບນທຽບຕັນດັ່ງກ່າວ

$$\Omega = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{h_1}^{h_2} \int_{g_1}^{g_2} f(x, y, z) dz dy dx$$

33.  $g_1 + g_2$  ມີຄໍາເທິກັນ

- 1.)  $x + y$
- 2.)  $x - y$
- 3.)  $y - x$
- 4.)  $x - y + 1$
- 5.)  $y - x + 1$

34.  $h_1 + h_2$  ມີຄໍາເທິກັນ

- 1.)  $2 - x$
- 2.)  $1 - x$
- 3.)  $x$
- 4.)  $x + 1$
- 5.)  $1$

35.  $\Omega$  ມີຄໍາເທິກັນ

- 1.)  $-\frac{1}{8}$
- 2.)  $0$
- 3.)  $\frac{1}{30}$
- 4.)  $\frac{1}{24}$
- 5.)  $\frac{1}{8}$

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 36-37

พิจารณาทรงตันซึ่งลูกกล้มรอบด้วยสมการ  $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$  และสมการ  $z = 2$

36. ปริมาตรของทรงตันดังกล่าวคือ (พิจารณาในพิกัดทรงกระบอก)

$$1.) V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 dz \ r dr d\theta \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$2.) V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{r}{3}}^2 dz \ r dr d\theta \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$3.) V = \int_0^{2\pi} \int_0^6 \int_{\frac{r}{3}}^2 dz \ r dr d\theta \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$4.) V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^2 dz \ r dr d\theta \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$5.) V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{\frac{r}{\sqrt{3}}}^{2\sqrt{3}} dz \ r dr d\theta \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

37. ปริมาตรของทรงตันดังกล่าวคือ (พิจารณาในพิกัดทรงกลม)

$$1.) V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$2.) V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^2 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$3.) V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\sec \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

$$4.) V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{2\sec \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

5.) ไม่มีข้อถูก

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถามข้อ 38-39

พิจารณาค่าอินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดฉาก

$$\Omega = \int_{-3}^0 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dz dy dx$$

38. อินทิกรัลในระบบพิกัดทรงกระบอกที่เทียบเท่ากับค่าอินทิกรัลดังกล่าวคือ

$$1.) \quad \Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_r^{\sqrt{18-r^2}} \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} dz \ r dr d\theta$$

$$2.) \quad \Omega = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^3 \int_r^{\sqrt{18-r^2}} \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} dz \ r dr d\theta$$

$$3.) \quad \Omega = \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_r^{\sqrt{18-r^2}} \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} dz \ r dr d\theta$$

$$4.) \quad \Omega = \int_{\pi}^{3\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \int_r^{\sqrt{18-r^2}} \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} dz \ r dr d\theta$$

$$5.) \quad \Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_r^{\sqrt{18-r^2}} \frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} dz \ r dr d\theta$$

39. อินทิกรัลในระบบพิกัดทรงกลมที่เทียบเท่ากับค่าอินทิกรัลดังกล่าวคือ

$$1.) \quad \Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^2 \sin^2 \theta d\rho d\phi d\theta$$

$$2.) \quad \Omega = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^3 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$3.) \quad \Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^2 \sin \phi \cos \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$4.) \quad \Omega = \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^3 \sin \phi \cos \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$5.) \quad \Omega = \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{3\sqrt{2}} \rho^2 \sin \phi \cos \phi d\rho d\phi d\theta$$

40. จงหาค่าอินทิกรัล  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^5 \cos^2 \phi \sin \phi \ d\rho \ d\phi \ d\theta$

1.)  $\frac{32}{9}\pi$

2.)  $\frac{64}{9}\pi$

3.)  $\frac{72}{9}\pi$

4.)  $32\pi$

5.)  $64\pi$