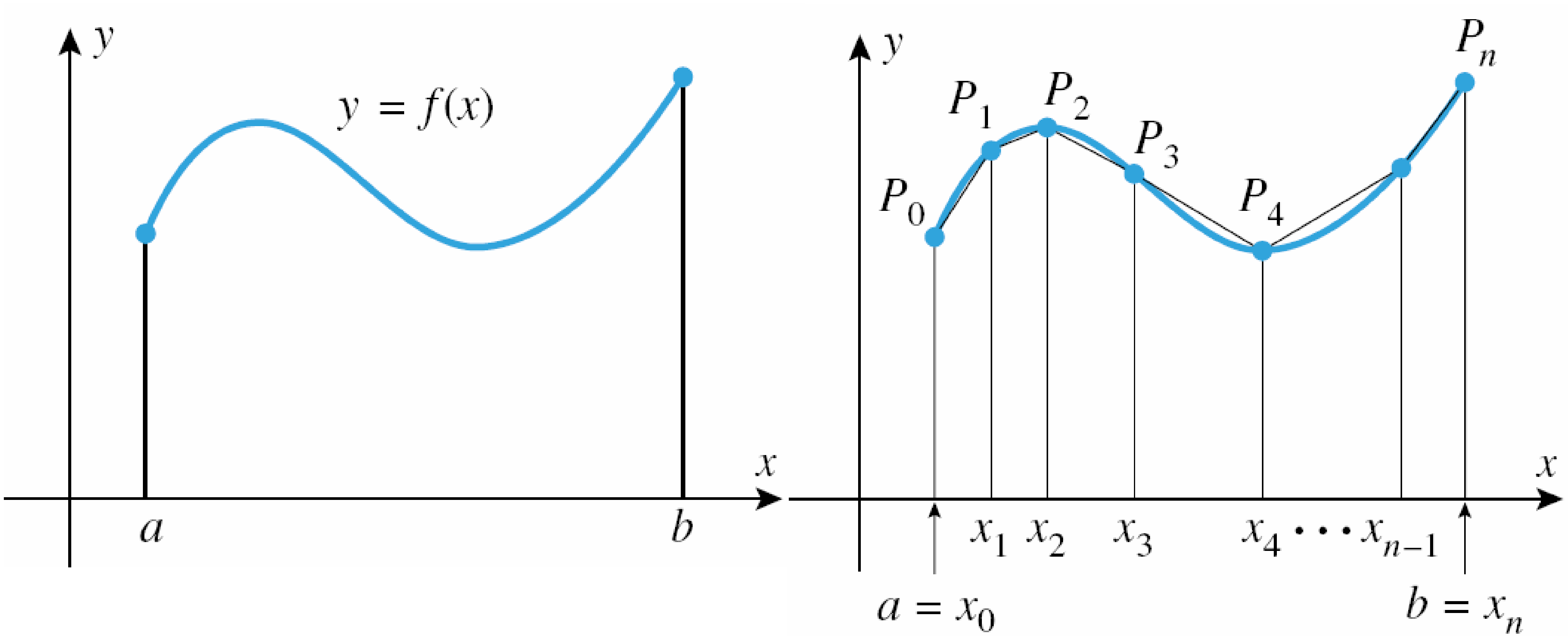
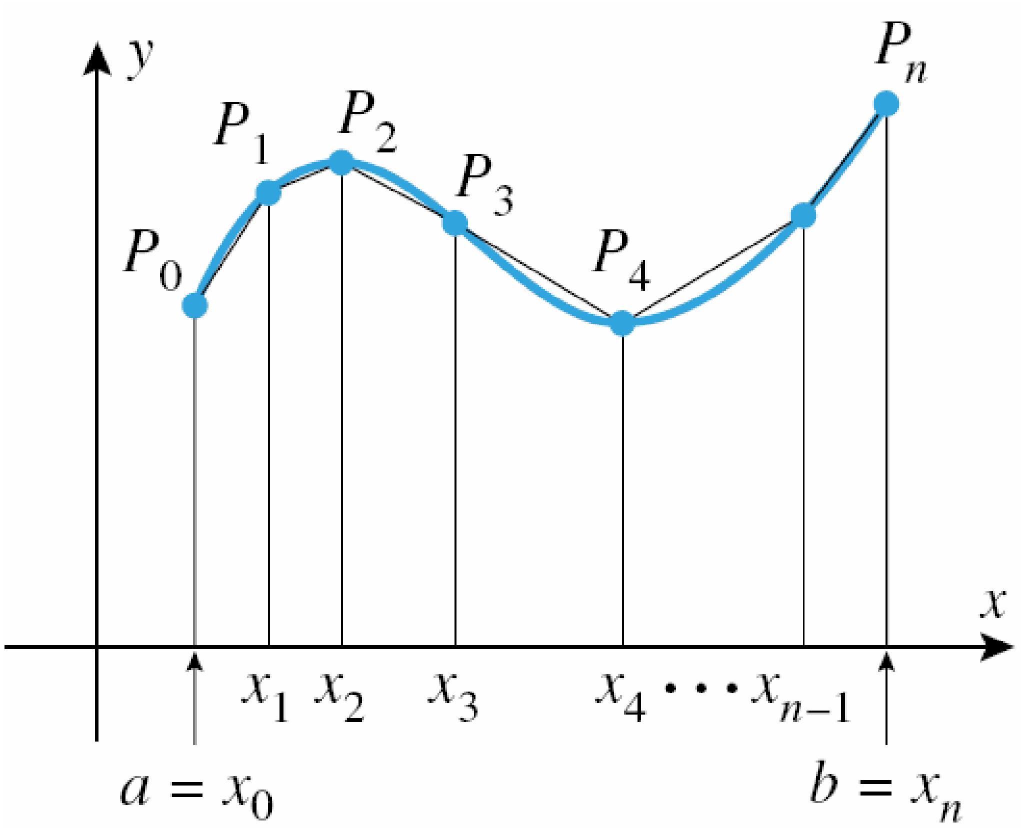
ความยาวส่วนโค้ง

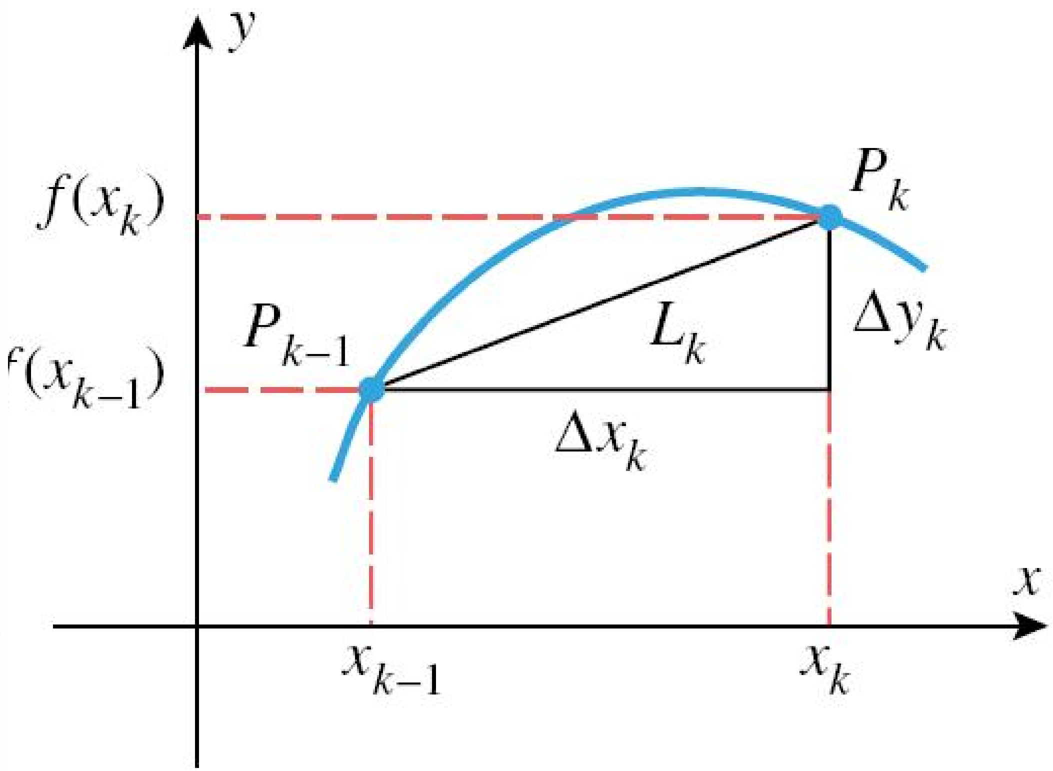
(Arc Length)

เนื้อหาในส่วนนี้เกี่ยวข้องกับการวัดความของเส้นโค้งที่ปรากฏในทั้ง 2 และ 3 มิติ

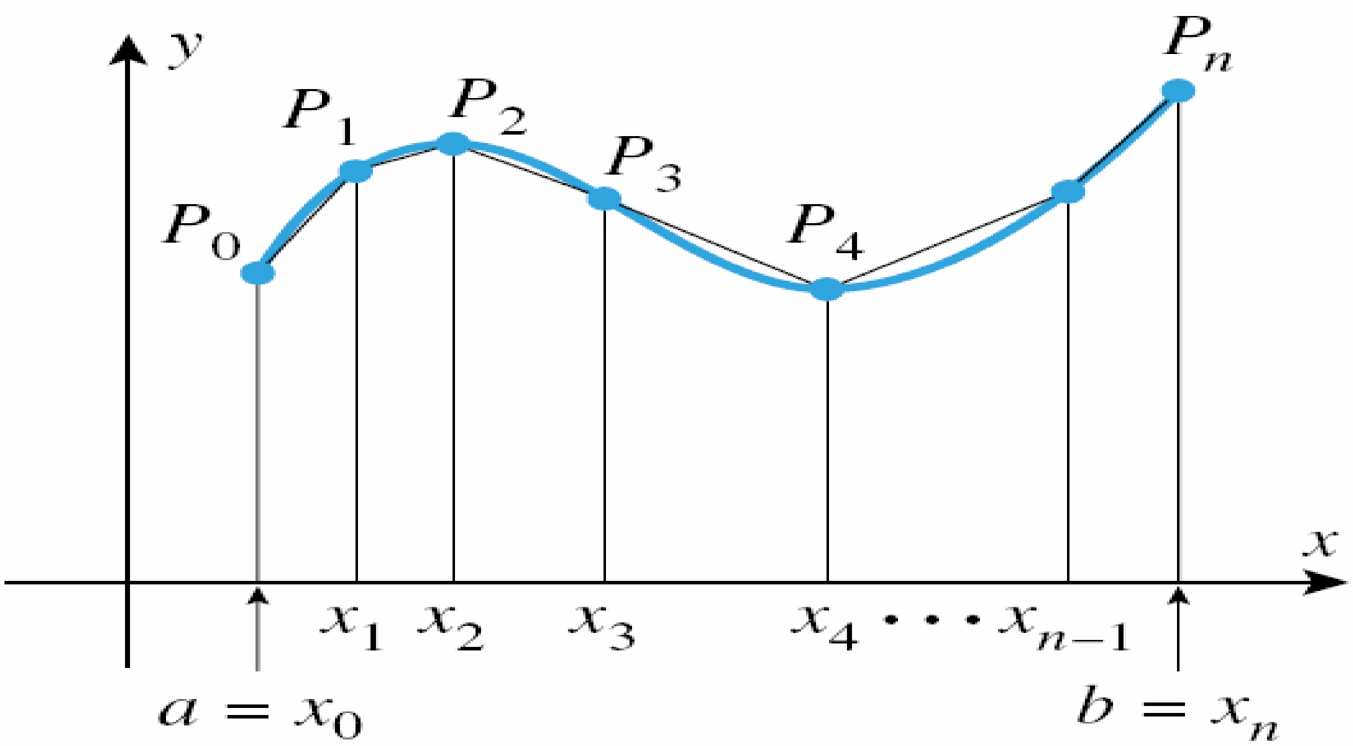


y
y = f(x)
x
a
b
y
P_n
P_1
P_2
P_3
P_0
P_4
x
x_1
x_2
x_3
x_4 · · · x_{n−1}
a = x_0
b = x_n





$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$



ความยาวรวมของส่วนของเส้นโค้งสามารถประมาณได้ด้วยผลรวมของความยาวเส้นตรงเล็กๆ

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

ในกรณีที่ฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันปรับเรียบ (smooth curve) บทช่วง $[x_{k-1}, x_k]$ เราสามารถใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (Mean Valued Theorem)

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(x_k^*)$$

หรือ
$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)\Delta x_k$$

บทนิยาม

ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบ (smooth function) บนช่วง $[a,b]$ ถ้าสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ทุกๆ x ที่อยู่ในช่วง $[a,b]$ และ อนุพันธ์ $f'(x)$ มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$

และเรียกเส้นโค้ง $y = f(x)$ ซึ่ง $f(x)$ เป็นฟังก์ชันปรับเรียบว่า เส้นโค้งปรับเรียบ (smooth curve)

จาก $$L \approx \sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

และ $$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(x_k^*)\Delta x_k$$

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k$$

$$L = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(x_k^*)]^2}\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

บทนิยาม

ถ้า $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งปรับเรียบแล้ว ความยาวของส่วนของเส้นโค้ง L ของเส้นโค้งดังกล่าวบนช่วง $[a,b]$ มีค่าเท่ากับ

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

ในทำนองกลับกัน

ถ้า $x = g(y)$ เป็นเส้นโค้งปรับเรียบแล้ว ความยาวของส่วนของเส้นโค้ง L ของเส้นโค้งดังกล่าวบนช่วง $y = c$ ถึง $y = d$ มีค่าเท่ากับ

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\, dy = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

จงหาความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้ง

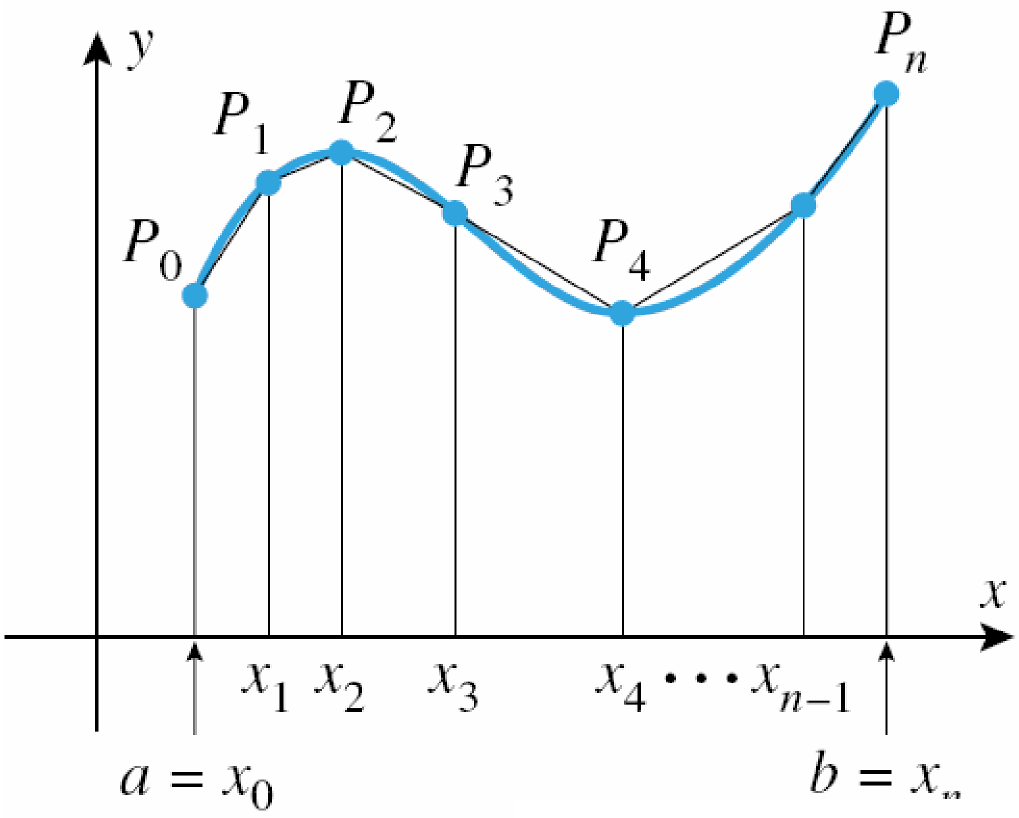
$$y = x^{3/2}$$

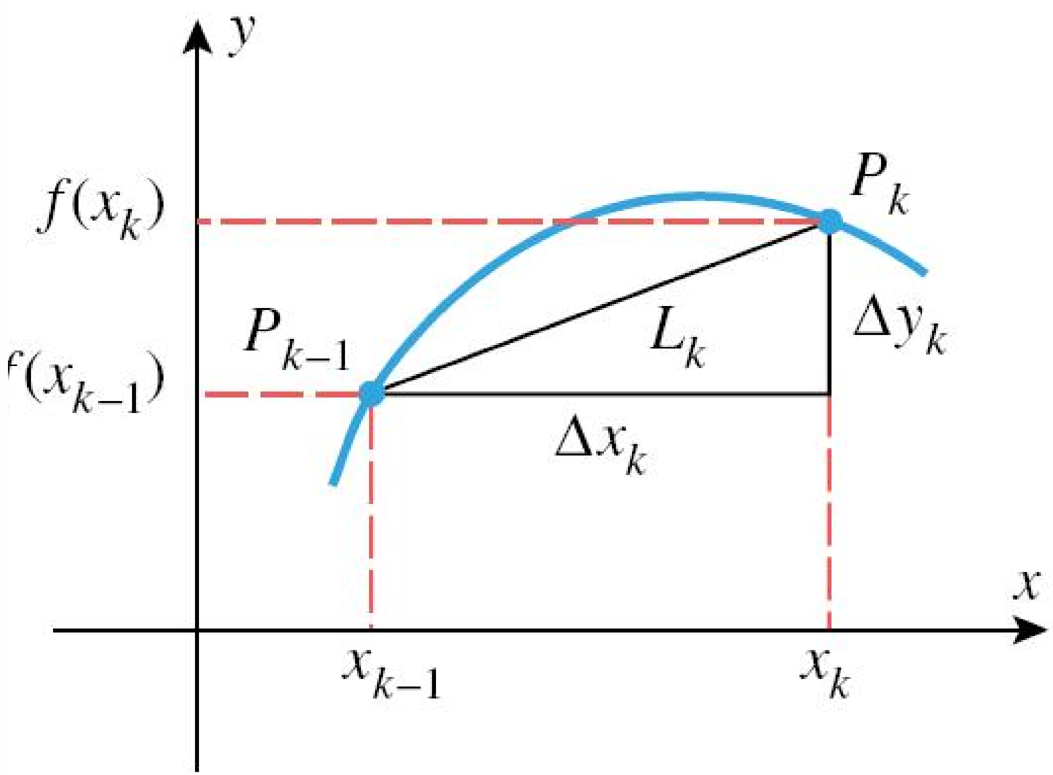
เมื่อพิจารณาจากจุด $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$ ไปยังจุด $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$

จงหาความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้ง

$$x = y^{2/3}$$

เมื่อพิจารณาจากจุด $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$ ไปยังจุด $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$





$$L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

$$\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}\right)^2}\,\Delta t_k$$

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}\right)^2}\ \Delta t_k$$

ใช้ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (Mean Valued Theorem)

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}\right)^2}\ \Delta t_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x'(t_k^{\ *})\right)^2 + \left(y'(t_k^{\ *})\right)^2}\ \Delta t_k$$

$$L \approx \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}\right)^2}\ \Delta t_k$$

$$L = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(x'(t_k{}^{*})\right)^2 + \left(y'(t_k{}^{*})\right)^2}\ \Delta t_k$$

$$= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

บทนิยาม

ถ้าเส้นโค้งในสองมิติ $(x, y), \quad x = x(t), y = y(t)$ เป็นเส้นโค้งปรับเรียบแล้ว ความยาวของส่วนของเส้นโค้ง L ของเส้นโค้งดังกล่าวบนช่วง $[a,b]$ มีค่าเท่ากับ

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

บทนิยาม

ถ้าเส้นโค้งในสามมิติ (x, y, z), $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ เป็นเส้นโค้งปรับเรียบแล้ว ความยาวของส่วนของเส้นโค้ง L ของเส้นโค้งดังกล่าวบนช่วง $[a,b]$ มีค่าเท่ากับ

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

จงหาความยาวส่วนโค้ง

$$x = \frac{t^2}{2}, y = t^2 + 1, 0 \leq t \leq 1$$

จงหาความยาวส่วนโค้ง

$$x = \cos 2t, y = \sin 2t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

จงหาความยาวส่วนโค้ง

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

จาก $t = 0$ ถึง $t = \pi$

จงหาความยาวส่วนโค้ง

$$x = 2t,\ y = \ln t,\ z = 4\sqrt{t}\ (1 \le t \le 4)$$

ถ้าพิจารณาส่วนโค้งในลักษณะของเวกเตอร์

(2 มิติ) (3 มิติ)

$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ หรือ $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \qquad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \qquad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \qquad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \qquad L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$\Downarrow$$

$$L = \int_a^b \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| dt$$

บทนิยาม

ถ้า C เป็นกราฟของเวกเตอร์ฟังก์ชันปรับเรียบ $\mathbf{r}(t)$ (ทั้งใน 2 และ 3 มิติ) แล้ว ความยาวของส่วนของเส้นโค้ง L ของเส้นโค้งดังกล่าวจาก $t = a$ ถึง $t = b$ มีค่าเท่ากับ

$$L = \int_a^b \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

แบบฝึกหัด

จงหาความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้ง

1. $y = 3x^{3/2} - 1$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 1$

2. $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$ จาก $y = 0$ ถึง $y = 1$

3. $y = (x^6 + 8)/(16x^2)$ จาก $x = 2$ ถึง $x = 3$

4. $x = \frac{1}{8}y^4 + \frac{1}{4}y^{-2}$ จาก $y = 1$ ถึง $y = 4$

แบบฝึกหัด

จงหาความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้ง

5. $x = \frac{1}{3}t^3, \; y = \frac{1}{2}t^2 \quad (0 \le t \le 1)$

6. $x = (1+t)^2, \; y = (1+t)^3 \quad (0 \le t \le 1)$

7. $x = \cos t + t \sin t, \; y = \sin t - t \cos t$

   $(0 \le t \le \pi)$

แบบฝึกหัด

จงหาความยาวส่วนโค้งของเส้นโค้ง

8. $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ z = 2 \quad 0 \le t \le \pi/2$

9. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}\sqrt{6}t^2\mathbf{k};\ 1 \le t \le 3$

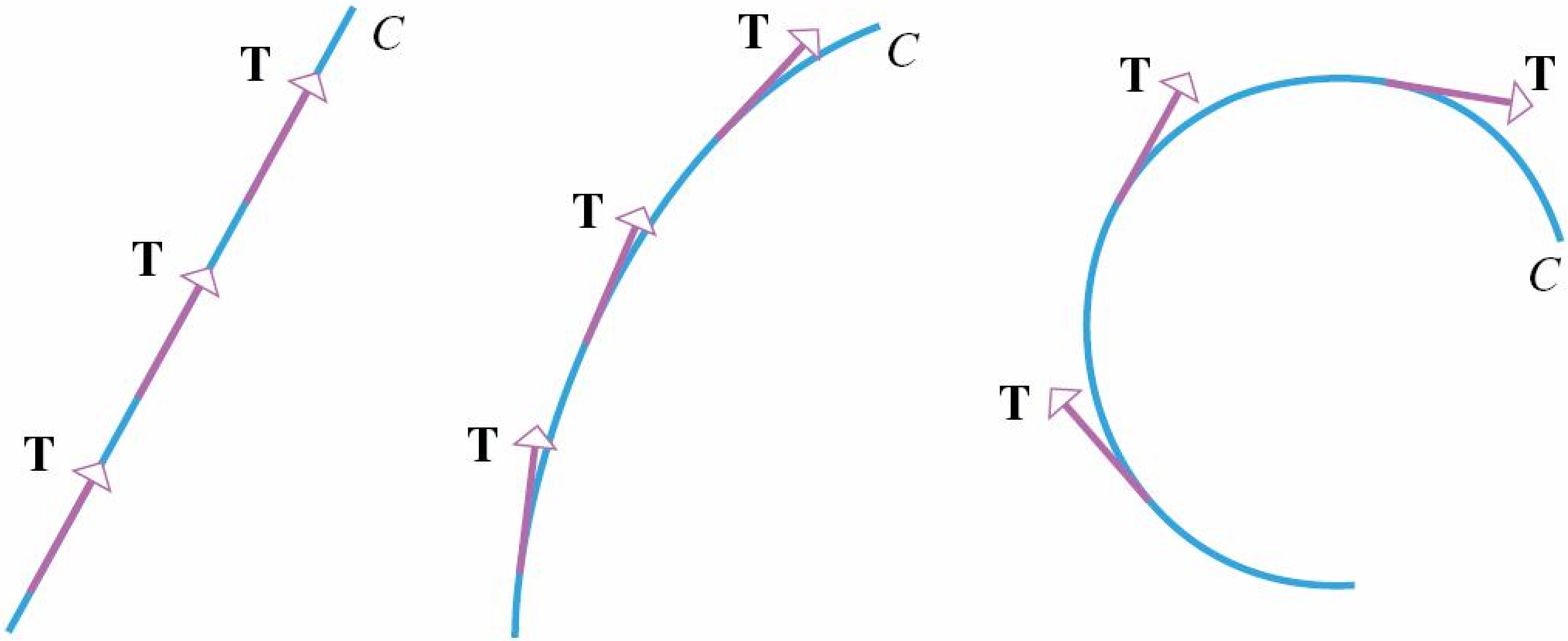
10. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (\cos t + t\sin t)\mathbf{j} + (\sin t - t\cos t)\mathbf{k};$

$0 \le t \le \pi$

ความโค้ง

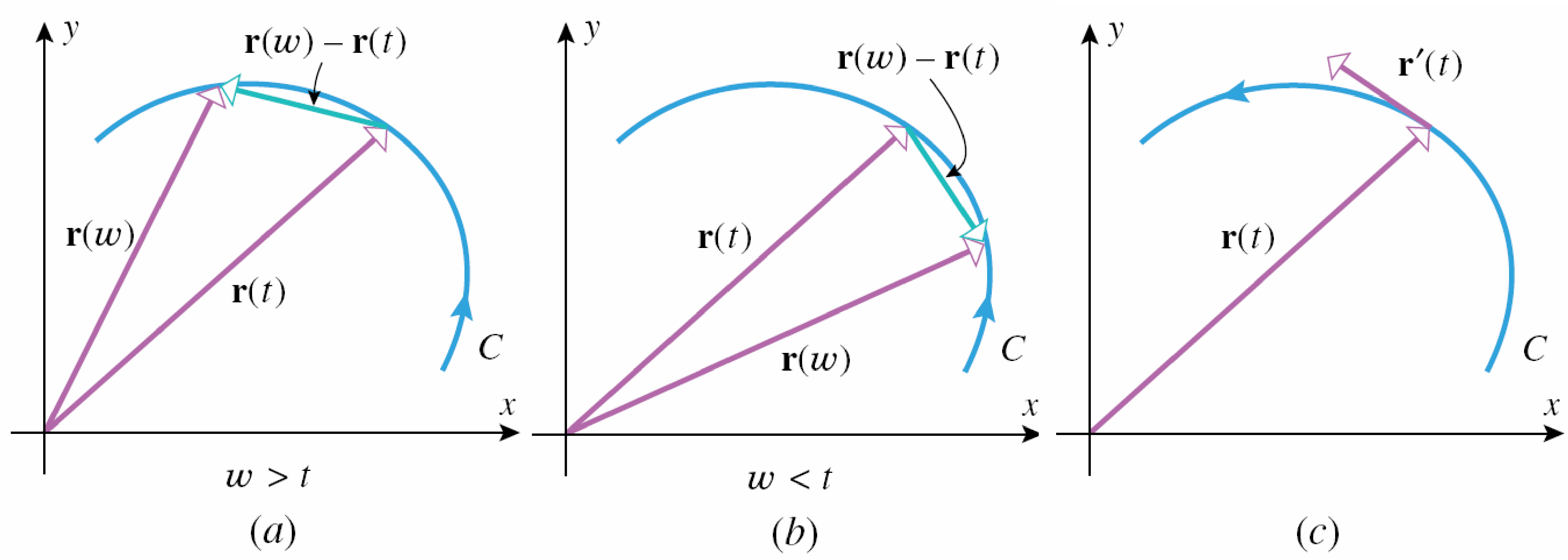
(Curvature)

เนื้อหาในส่วนนี้เกี่ยวข้องกับการวัดความโค้ง(ในเชิงตัวเลข) ของเส้นโค้ง ทั้งใน 2 มิติและ 3 มิติ โดยความรู้ในเรื่องนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในงานทางเรขาคณิต หรือ ใช้ศึกษาการเคลื่อนในของวัตถุในวิถีแนวโค้ง



C
T
T
T
T
C
T
T
T
T
T
C

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{w \to t} \frac{\mathbf{r}(w) - \mathbf{r}(t)}{w - t}$$

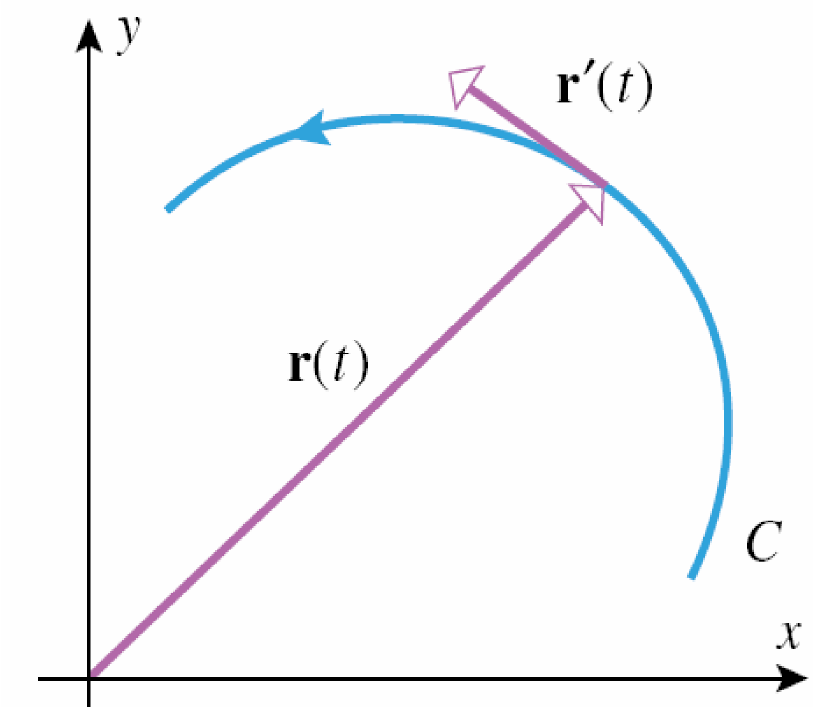


ถ้าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ สามารถหาอนุพันธ์ที่จุด t ใดบนโดเมนแล้ว

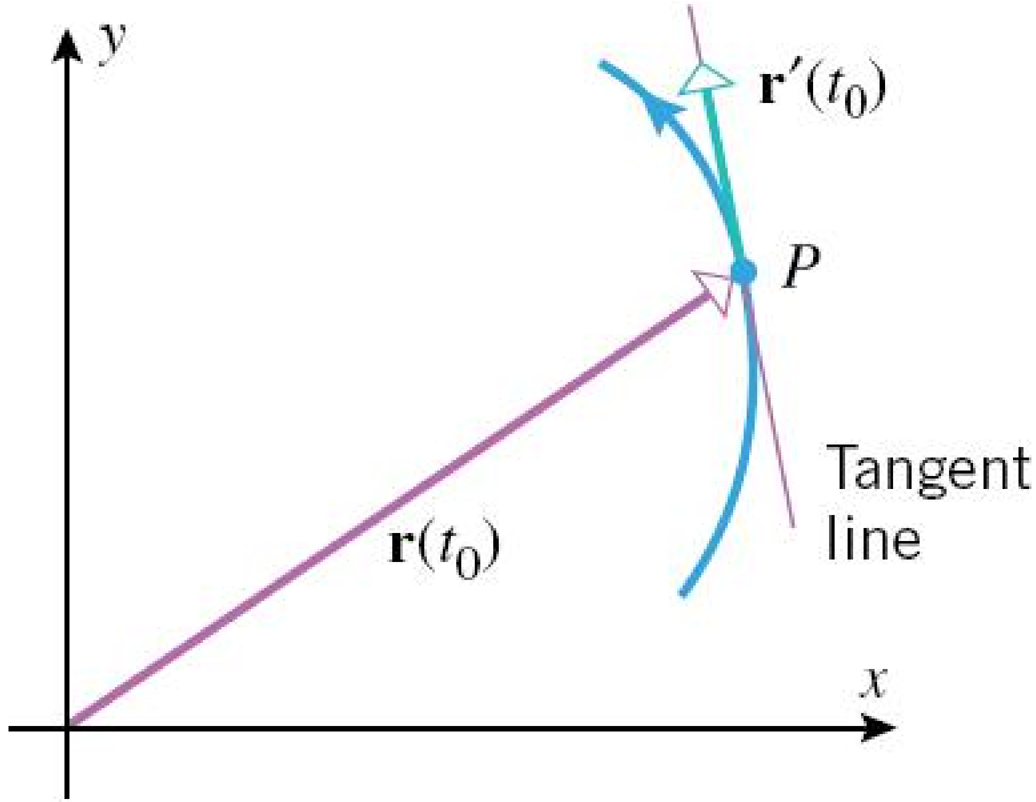
$$\mathbf{r}'(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)=\frac{df}{dt}(t)\mathbf{i}+\frac{dg}{dt}(t)\mathbf{j}+\frac{dh}{dt}(t)\mathbf{k}$$

และมีความหมายในเชิงเรขาคณิต คือ

เป็นเวกเตอร์ ซึ่ง**<u>ขนาน</u>**กับเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งดังกล่าว ณ จุด t



ถ้าเวกเตอร์ $\mathrm{r}(t)$ สามารถหาอนุพันธ์ที่จุด t_0 บนโดเมนแล้ว และ $\mathrm{r}'(t_0) \neq \vec{0}$ เราเรียก $\mathrm{r}'(t_0)$ ว่า เวกเตอร์สัมผัส (tangent vector) $\mathrm{r}(t)$ ที่จุด $\mathrm{r}(t_0)$

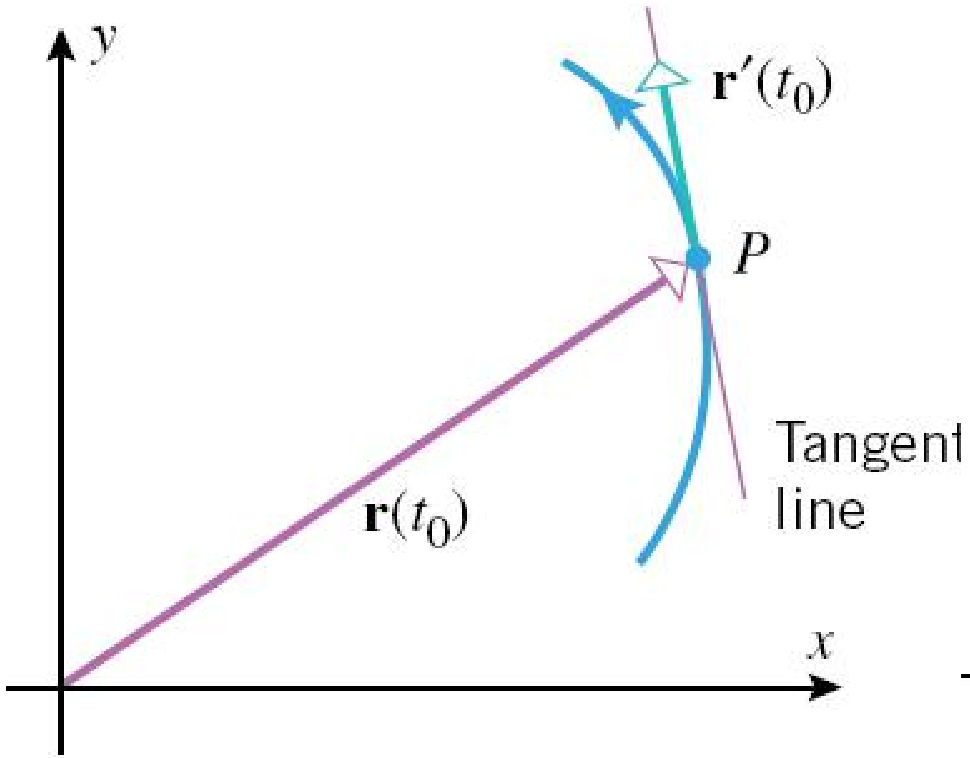


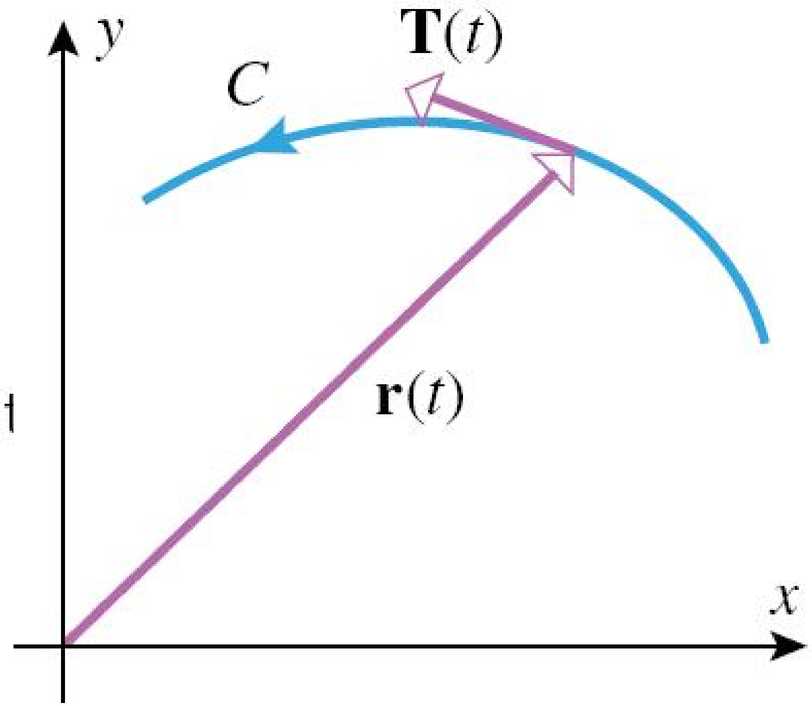
ถ้าเวกเตอร์ $\mathrm{r}(t)$ สามารถหาอนุพันธ์ที่ทุกจุด t บนโดเมนแล้ว และ

$\mathrm{r}'(t) \neq \vec{0}$ เราเรียก $T(t)$ ว่า เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย

(unit tangent vector)

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$





เราพบว่าฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ที่มีความยาวคงตัวมีคุณสมบัติคือ

$$\frac{d\,\mathrm{r}}{dt}\bullet\mathrm{r}=\mathrm{r}\bullet\frac{d\,\mathrm{r}}{dt}=0$$

นั่นแสดงให้เห็นว่า ถ้า**ฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ที่มีความยาวคงตัว** ฟังก์ชันดังกล่าวและอนุพันธ์ของฟังก์ชันต้อง**ตั้งฉาก**กัน

ดังนั้น $\mathrm{T}(t)$ ตั้งฉากกับ $\mathrm{T}'(t)$

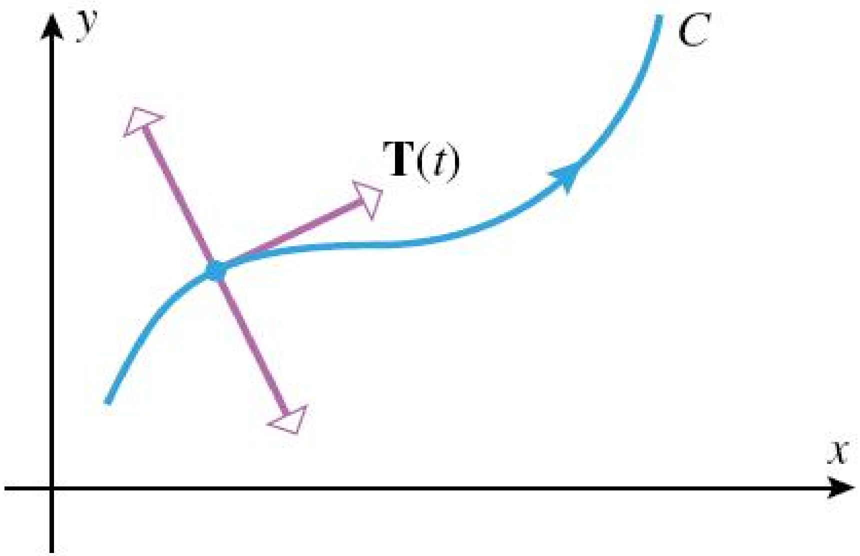
ถ้า $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$ ให้

$$\boxed{\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}}$$

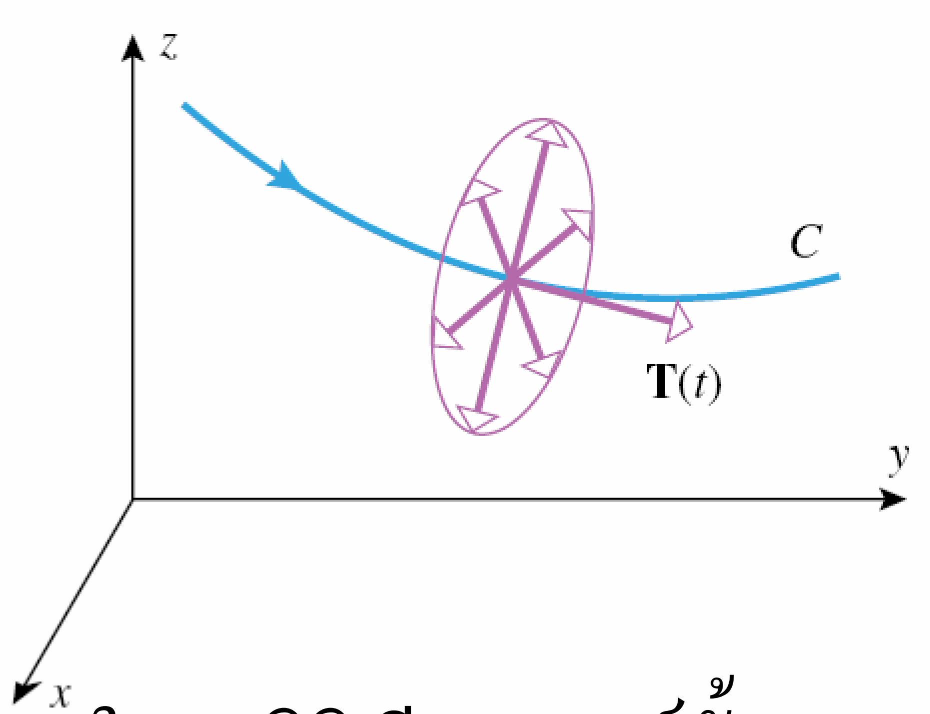
ดังนั้น $\left|\mathrm{N}(t)\right| = 1$ และ $\mathrm{N}(t)$ ตั้งฉากกับ $\mathrm{T}(t)$

เรียก $\mathrm{N}(t)$ ว่า เวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย

(unit normal vector)



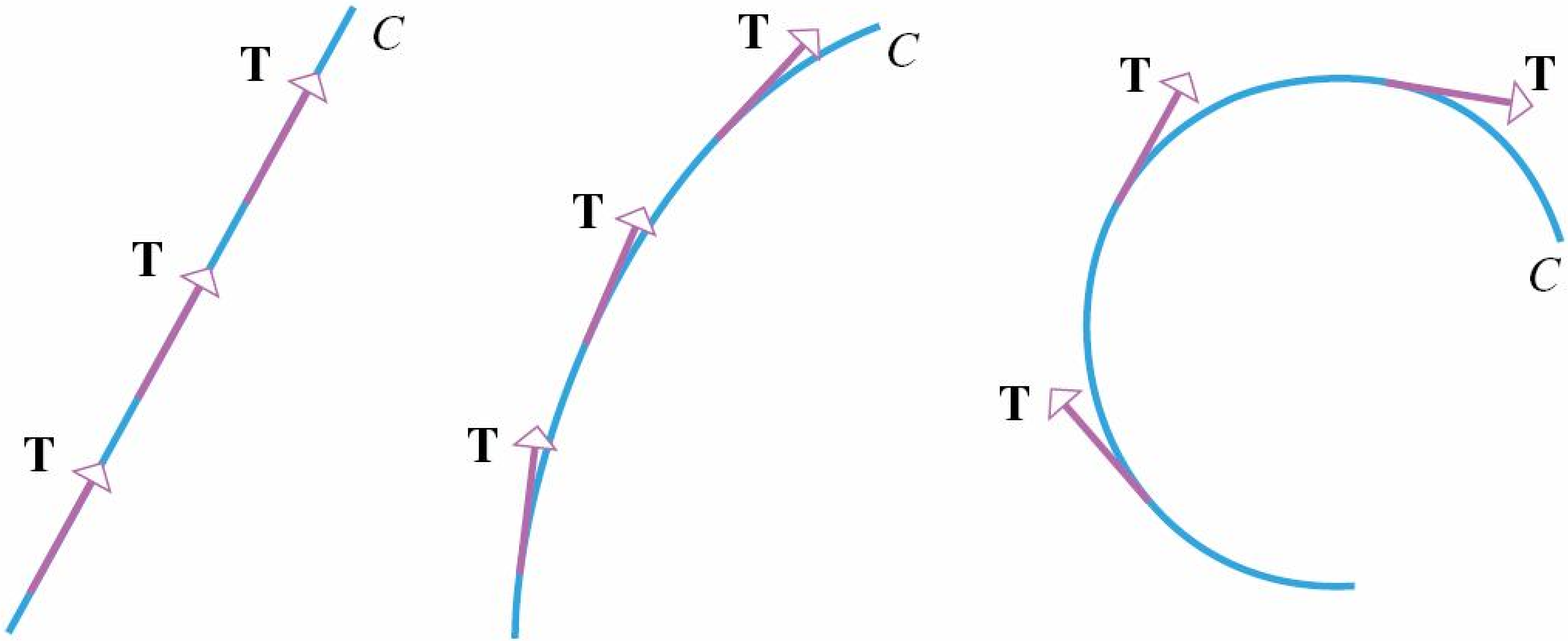
ใน 2 มิติ มีเวกเตอร์ตั้งฉาก
กับ T(t) แค่ 2 เวกเตอร์



ใน 3 มิติ มีเวกเตอร์ตั้งฉาก
กับ T(t) เป็นจำนวนอนันต์

กำหนดให้ $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$

จงหา $\mathrm{T}(t)$ และ $\mathrm{N}(t)$



C
T
T
T
T
C
T
T
T
T
C
T

บทนิยาม

ถ้า C เป็นกราฟของเวกเตอร์ฟังก์ชันปรับเรียบ $\mathbf{r}(t)$ (ทั้งใน 2 และ 3 มิติ) โดยสามารถหาค่า $\mathrm{T}'(t)$ และ $\mathrm{r}''(t)$ ได้ และ $\mathrm{r}'(t) \neq 0$ เรานิยาม ความโค้ง (curvature) ดังนี้

$$\boxed{\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}}$$

<u>**หมายเหตุ**</u> κ อ่านว่า แคปปา (kappa)

เราเรียก $\rho = \dfrac{1}{\kappa(t_0)}$

ว่า รัศมีความโค้ง (radius of curvature) ณ $t = t_0$

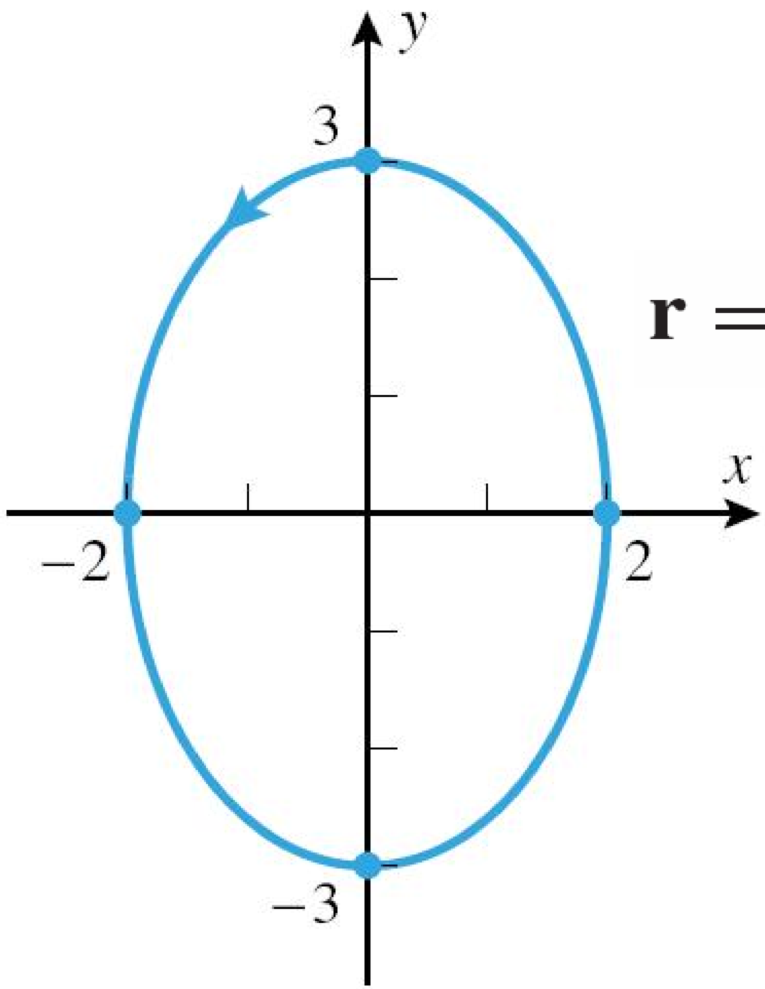
<u>หมายเหตุ</u> ρ อ่านว่า โร (rho)

จงหาค่า $\kappa(t)$ เมื่อกำหนดให้

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = ct \quad a > 0$$

จงหาค่าความโค้ง (curvature) และรัศมีความโค้ง เมื่อกำหนดให้

$$\mathbf{r} = 2\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$



$\boxed{\mathbf{r} = 2\cos t\mathbf{i} + 3\sin t\mathbf{j}}$

สรุป

$$\mathbf{r}'(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)=\frac{df}{dt}(t)\mathbf{i}+\frac{dg}{dt}(t)\mathbf{j}+\frac{dh}{dt}(t)\mathbf{k}$$ (tangent vector)

$$\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$$ (unit tangent vector)

$$\mathbf{N}(t)=\frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$ (unit normal vector)

$$\kappa(t)=\frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}$$ (curvature)

$$\rho=\frac{1}{\kappa(t_0)}$$ (radius curvature)

แบบฝึกหัด

จงหาค่าความโค้งเมื่อกำหนดให้

1. $\mathbf{r}(t) = e^{3t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j}$

2. $x = 1 - t^3, \ y = t - t^2$

3. $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

4. $x = \cosh t, \ y = \sinh t, \ z = t$

แบบฝึกหัด

จงหาค่าความโค้งและรัศมีความโค้ง ณ เวลา t ที่กำหนด

1. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 4\sin t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k};\ \ t = \pi/2$

2. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k};\ \ t = 0$

3. $x = e^t\cos t,\ y = e^t\sin t,\ z = e^t;\ \ t = 0$

4. $x = \sin t,\ y = \cos t,\ z = \frac{1}{2}t^2;\ \ t = 0$