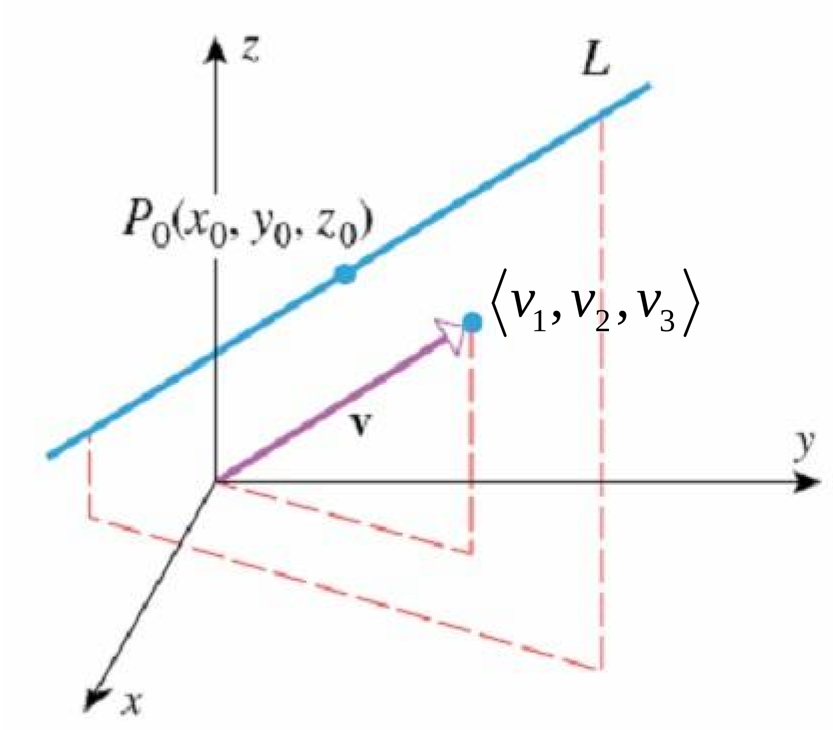
เส้นตรงและระนาบในสามมิติ

(Lines and Planes in Space)

ในการคำนวณทางเรขาคณิตในระบบสามมิติมักจะเริ่มต้นด้วยการศึกษาเกี่ยวกับ***เส้นตรง***และ***ระนาบ*** โดยในการศึกษาเรื่องนี้จะใช้รากฐานความรู้ในเรื่อง***ผลคูณเชิงสเกลาร์***และ***ผลคูณเชิงเวกเตอร์***เป็นหลัก ความรู้ในเรื่องเส้นตรงและระนาบ สามารถนำไปประยุกต์เพื่อศึกษาเกี่ยวกับ**เส้นโค้ง**ในสามมิติต่อไป



ถ้า v เป็นเวกเตอร์ใดๆ ที่ขนานกับเส้นตรง L แล้ว

เวกเตอร์ v และเวกเตอร์ $\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$

<u>ขนานกัน</u>

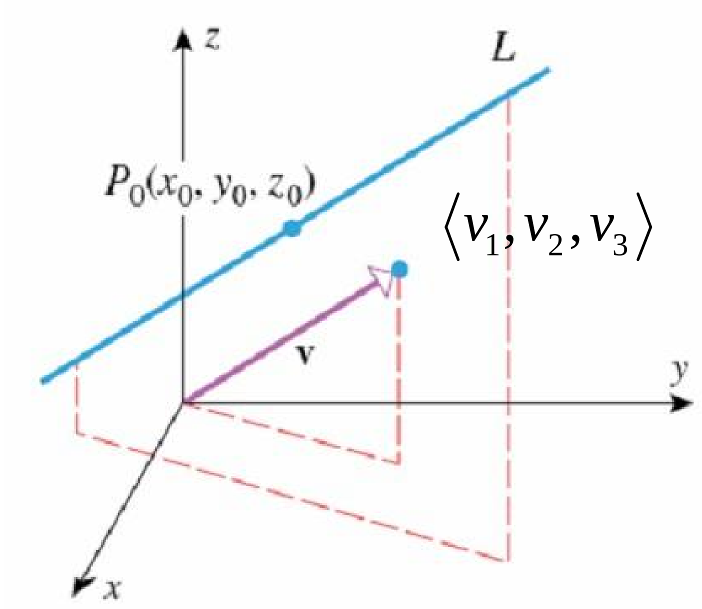
เราเรียกสมการทั้งสาม

$$x = x_0 + v_1 t$$
$$y = y_0 + v_2 t$$
$$z = z_0 + v_3 t$$

นี้ว่า

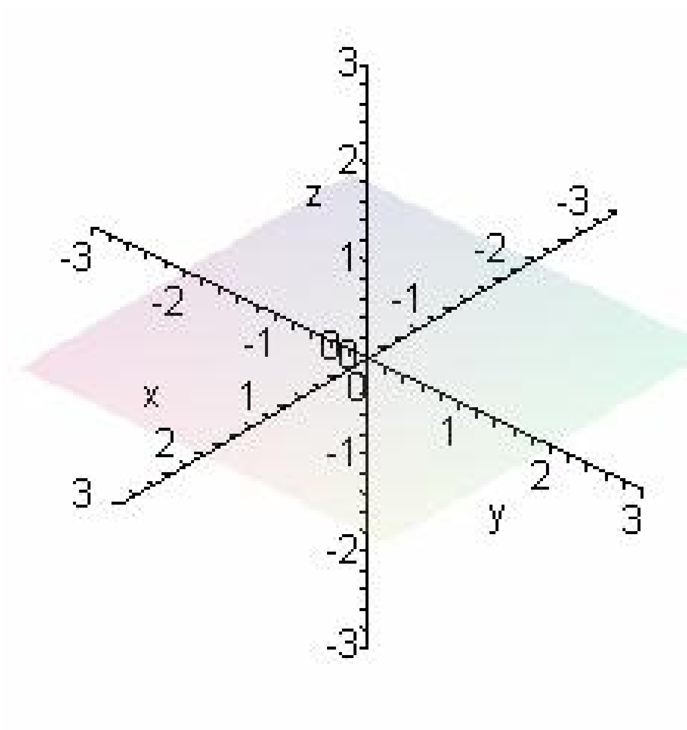
สมการอิงตัวแปรเสริมมาตรฐานสำหรับเส้นตรง

The standard parametric equation of the line.

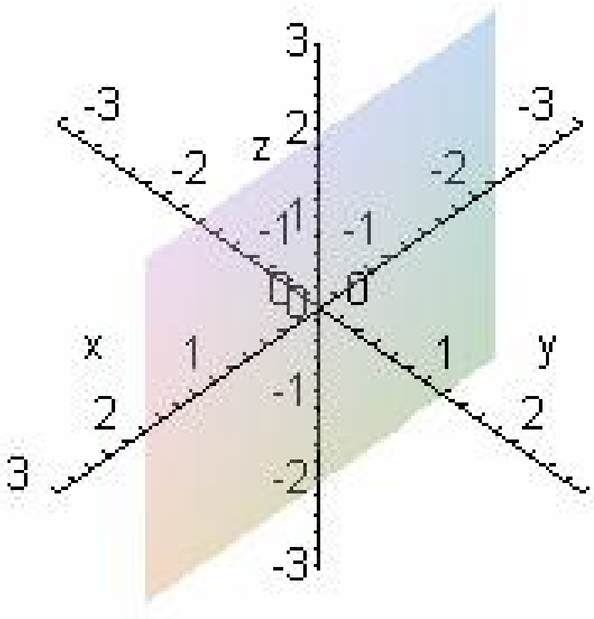


<u>หมายเหตุ</u> สมการอิงตัวแปรเสริมสำหรับเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $v=\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ เป็นไปได้***<u>หลายสมการ!!!</u>***

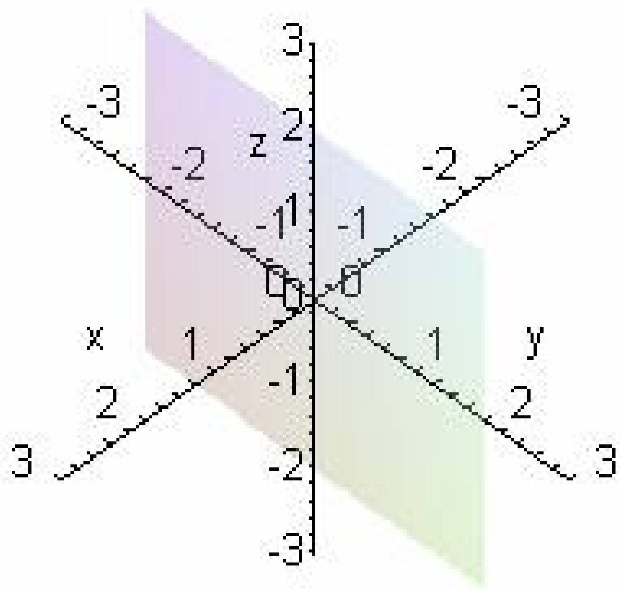
ระนาบในสามมิติ



ระนาบ *xy*



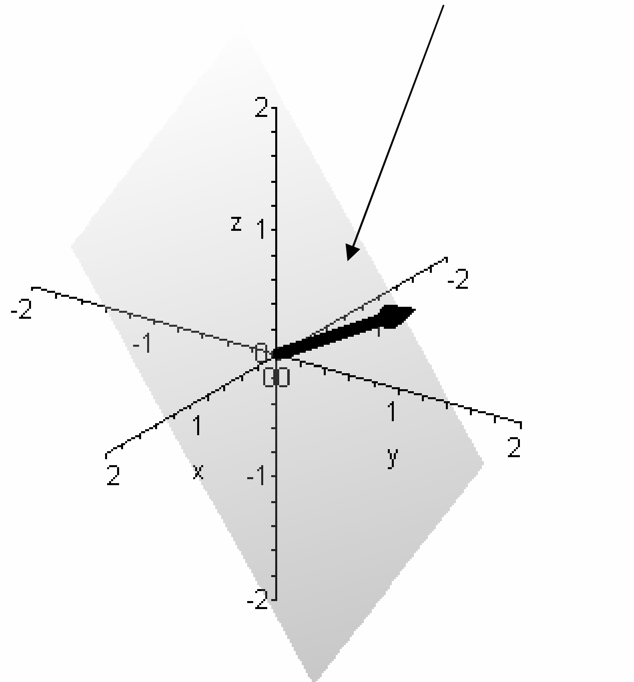
ระนาบ *xz*



ระนาบ *yz*

เรียกเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบว่า

<u>เวกเตอร์แนวฉาก</u> **<u>(normal vector)</u>**



และเวกเตอร์ดังกล่าวต้องตั้งฉากกับ normal vector <A,B,C>

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle \bullet \langle A, B, C \rangle = 0$$

ดังนั้นสมการระนาบคือ

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$$

หรือ

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

หรือ

$$Ax + By + Cz = D$$

เมื่อ $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

ฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ และ เส้นโค้งใน 3 มิติ

(Vector-Valued Functions and Space Curves)

จากแนวคิดเรื่องเวกเตอร์ และ สมการอิงตัวแปรเสริมสำหรับเส้นตรงใน 3 มิติ เราสามารถขยายแนวความคิดไปสู่ ***สมการอิงตัวแปรเสริมสำหรับเส้นโค้ง***และ***สมการอิงตัวแปรเสริมในรูปแบบเวกเตอร์*** ซึ่งสามารถนำความรู้นี้ไปใช้อธิบายปรากฏการณ์หลายๆ อย่างในฟิสิกส์และวิศวกรรมได้

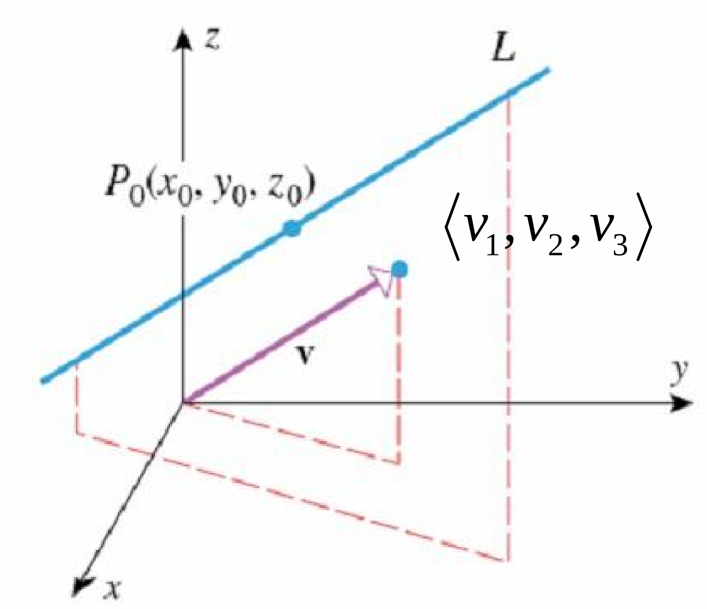
สมการอิงตัวแปรเสริมมาตรฐานสำหรับเส้นตรง

The standard parametric equation of the line.

$$x = x_0 + v_1 t$$

$$y = y_0 + v_2 t$$

$$z = z_0 + v_3 t \qquad t \in (-\infty, \infty)$$

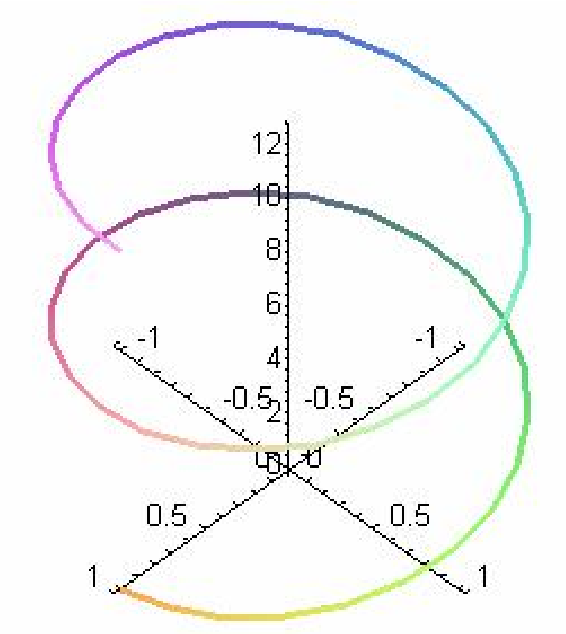


สมการอิงตัวแปรเสริมสำหรับเส้นโค้ง

The parametric equation of the curves

$$x = f(t) \qquad y = g(t) \qquad z = h(t)$$

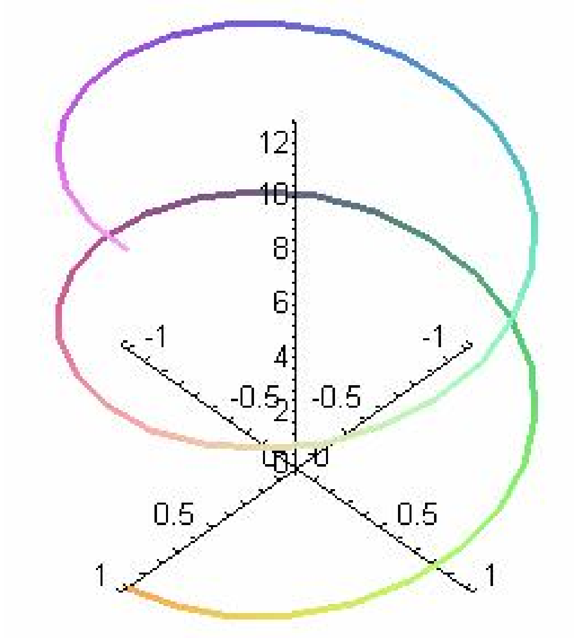
$t \in I$ โดยที่ I เป็นช่วงที่พิจารณา



จุด $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t)), \quad t \in I$

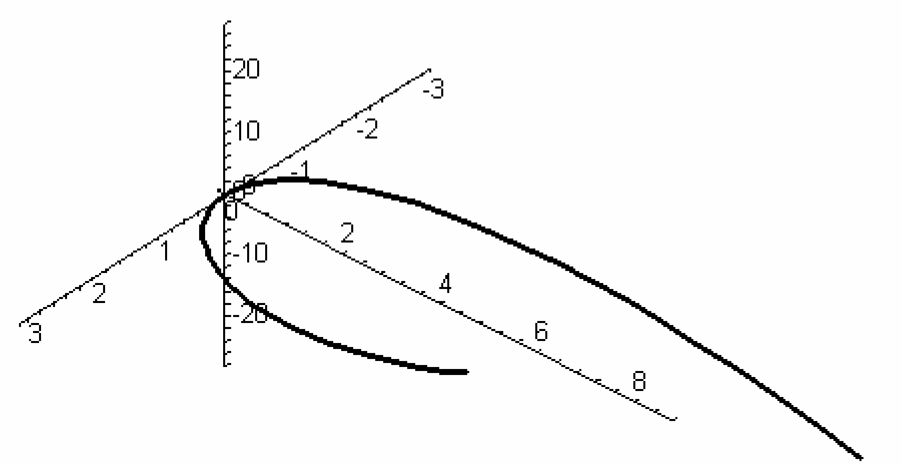
ทำให้เกิดเส้นโค้งในสามมิติเช่น

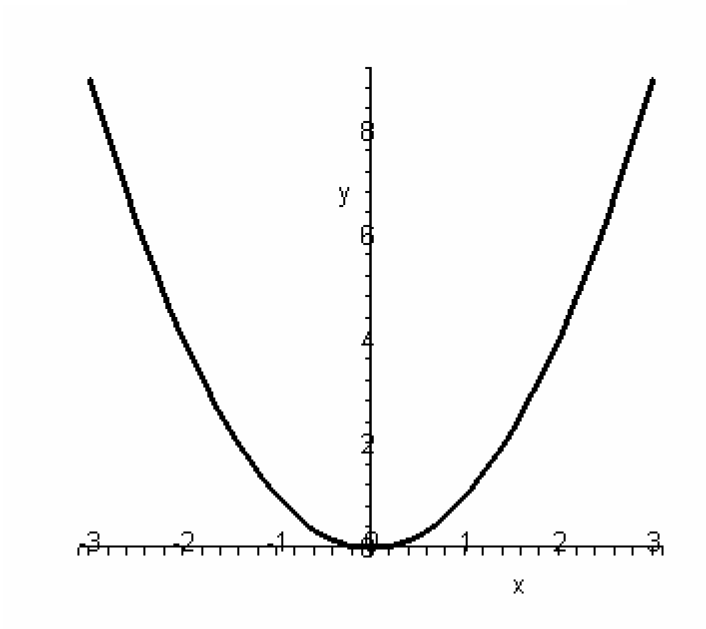
$$(x, y, z) = (\cos(t), \sin(t), t), \quad t \in I$$

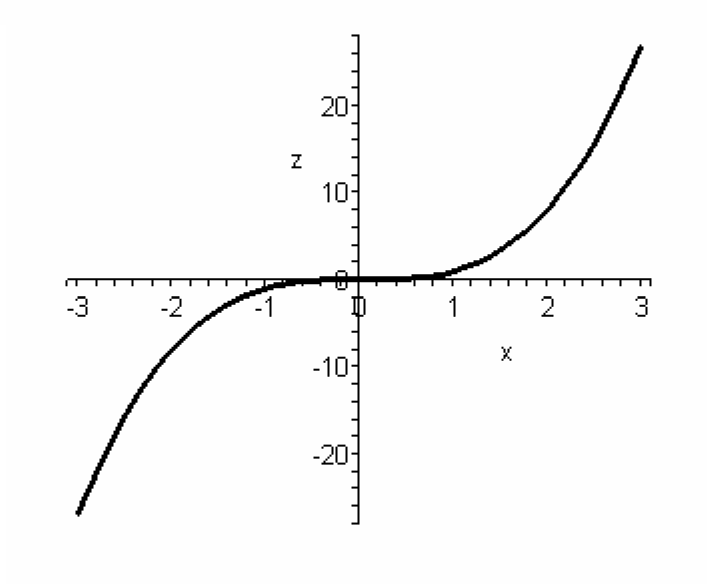


สมการเกลียว หรือ เฮลิกซ์ (helix)

$$(x, y, z) = (t, t^2, t^3), \quad t \in I$$





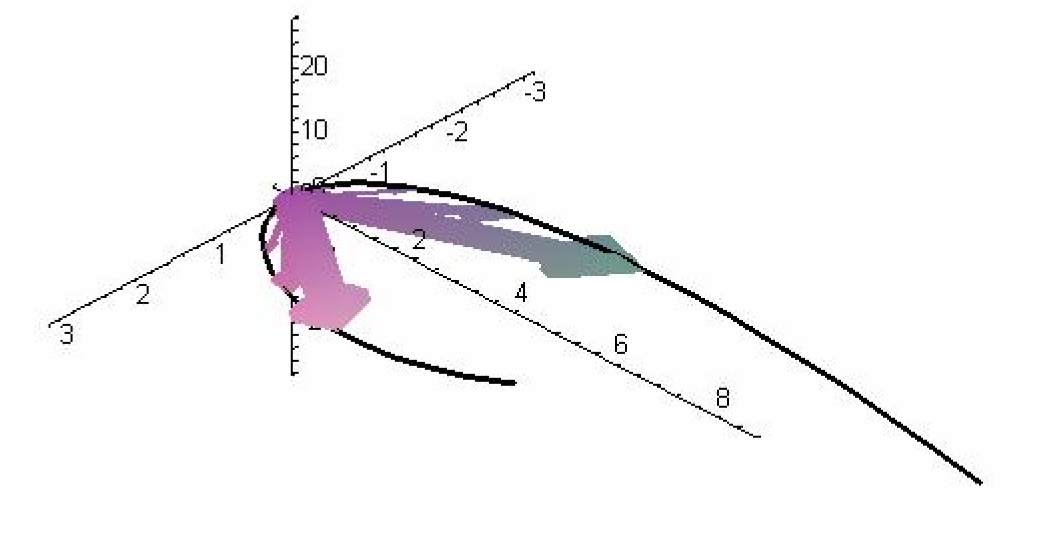


เราสามารถสร้างเวกเตอร์บอกเส้นทางการเคลื่อนที่ของจุด

$$(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t)), \quad t \in I$$

ได้คือ $\quad \mathrm{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle, \quad t \in I$

หรือ $\quad \mathrm{r}(t) = f(t)\mathrm{i} + g(t)\mathrm{j} + h(t)\mathrm{k}, \quad t \in I$



ถ้าฟังก์ชัน $f(t), g(t), h(t)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $t = t_0$

เวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ มีความต่อเนื่องที่จุด $t = t_0$ ด้วย

$$\lim_{t \to t_0} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f(t)\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t \to t_0} g(t)\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{t \to t_0} h(t)\right)\mathbf{k}$$

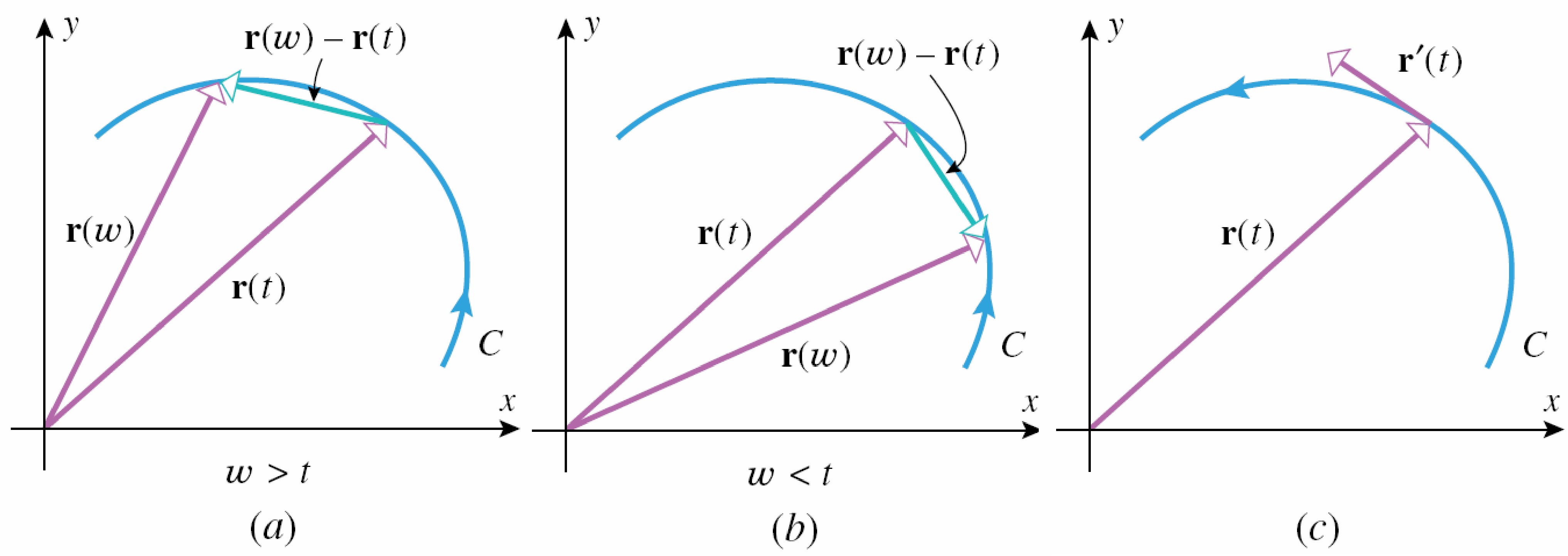
จงหาค่าลิมิตของ $\mathrm{r}(t)=\cos(t)\mathrm{i}+\sin(t)\,\mathrm{j}+t\mathrm{k}$

ณ จุด $t=\dfrac{\pi}{4}$

ถ้าฟังก์ชัน $f(t), g(t), h(t)$ สามารถหาอนุพันธ์ที่จุด $t = t_0$ เวกเตอร์ $\mathrm{r}(t)$ สามารถหาอนุพันธ์ที่จุด $t = t_0$ ด้วย

$$\mathrm{r}'(t_0) = \frac{d\mathrm{r}}{dt}(t_0) = \frac{df}{dt}(t_0)\mathrm{i} + \frac{dg}{dt}(t_0)\mathrm{j} + \frac{dh}{dt}(t_0)\mathrm{k}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{w \to t} \frac{\mathbf{r}(w) - \mathbf{r}(t)}{w - t}$$

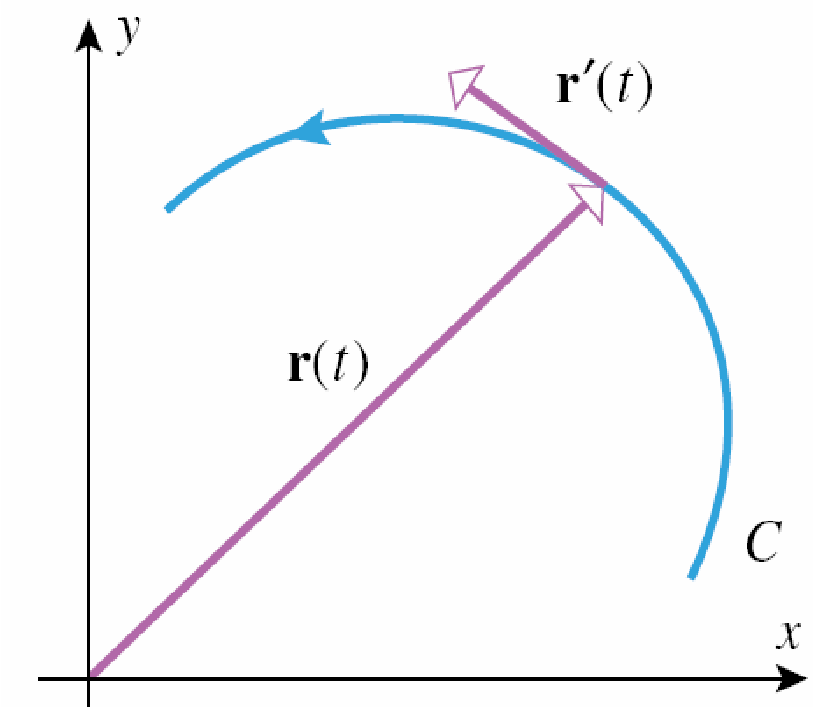


ถ้าเวกเตอร์ $\mathbf{r}(t)$ สามารถหาอนุพันธ์ที่จุด t ใดบนโดเมนแล้ว

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) = \frac{df}{dt}(t)\mathbf{i} + \frac{dg}{dt}(t)\mathbf{j} + \frac{dh}{dt}(t)\mathbf{k}$$

และมีความหมายในเชิงเรขาคณิต คือ

เป็นเวกเตอร์ ซึ่ง**ขนาน**กับเส้นสัมผัสกับเส้นโค้งดังกล่าว ณ จุด t



ความหมายของอนุพันธ์ของ **r**(t) ในเชิงฟิสิกส์

ถ้าให้ **r**(t) แทนตำแหน่งของวัตถุ ที่เคลื่อนที่ไปในสามมิติ แล้ว

1. $\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$ หมายถึง **<u>ความเร็ว</u>** (velocity)ของวัตถุนั้น มักใช้สัญลักษณ์ **v**(t)

2. $|\mathbf{v}(t)| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\right|$ หมายถึง **<u>อัตราเร็ว</u>** (speed)ของวัตถุ มักใช้สัญลักษณ์ $s(t)$

3. $\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$ หมายถึง **<u>ทิศทางการเคลื่อนที่</u>**ของวัตถุ

ความหมายของอนุพันธ์ของ $\mathbf{r}(t)$ ในเชิงฟิสิกส์

ถ้าให้ $\mathrm{r}(t)$ แทนตำแหน่งของวัตถุ ที่เคลื่อนที่ไปในสามมิติ แล้ว

4. $\dfrac{d^2\mathrm{r}}{dt^2}(t) = \dfrac{d\mathrm{v}}{dt}(t)$ หมายถึง <u>**ความเร่ง**</u> (acceleration)ของวัตถุนั้น มักใช้สัญลักษณ์ $\mathbf{a}(t)$

5. $|\mathrm{a}(t)| = \left|\dfrac{d\mathrm{v}}{dt}(t)\right| = \left|\dfrac{d^2\mathrm{r}}{dt^2}(t)\right|$ หมายถึง <u>**อัตราเร่ง**</u> ของวัตถุ

6. $\dfrac{d\mathrm{a}}{dt}(t) = \dfrac{d^3\mathrm{r}}{dt^3}(t)$ เรียกว่า Jerk (Jerk - การกระตุก)

ให้ r(t) แทนตำแหน่งของวัตถุที่เวลา t ใดๆ

จงหาความเร็ว, อัตราเร็ว,ความเร่ง และอัตราเร่งของวัตถุดังกล่าว

1. $\mathrm{r}(t) = (1-t)\mathrm{i} + \dfrac{t^2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{j} + \dfrac{e}{\sqrt{t}}\mathrm{k}$

2. $\mathrm{r}(t) = (\dfrac{1}{t})\mathrm{i} + \ln(t+1)\mathrm{j} + (\tan^{-1} t)\mathrm{k}$

3. $\mathrm{r}(t) = \cos(t^3)\mathrm{i} + \sin(t^3)\mathrm{j} + t^3\mathrm{k}$

ให้ r(t) แทนตำแหน่งของวัตถุที่เวลา t ใดๆ

จงหาตำแหน่งและความเร็วของวัตถุดังกล่าว ณ เวลา t ที่กำหนด

1. $\mathrm{r}(t) = (2\cos t)\mathrm{i} + (3\sin t)\mathrm{j} + 4t\mathrm{k}, \quad t = \dfrac{\pi}{2}$

2. $\mathrm{r}(t) = e^{-t}\mathrm{i} + (2\cos 3t)\mathrm{j} + (2\sin 3t)\mathrm{k}, \quad t = 0$

ให้ $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + \vec{j} + 9t^2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่

อัตราเร็วของอนุภาค ณ $t = 2$ คือข้อใด

(1) $2\sqrt{13}$ (2) $10\sqrt{13}$

(3) $12\sqrt{13}$ (4) $13\sqrt{13}$

(5) $18\sqrt{13}$

ให้ $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + \vec{j} + 9t^2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่

ความเร่งของอนุภาค ณ $t = 2$ คือข้อใด

(1) $2\vec{i}$

(2) $2\vec{j}$

(3) $18\vec{k}$

(4) $2\vec{i} + 36\vec{j}$

(5) $2\vec{i} - 9\vec{k}$

ให้ $\vec{r}(t) = 2t\vec{i} + \vec{j} + 9t^2\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่ง ของอนุภาคที่กำลังเคลื่อนที่

เวกเตอร์ตำแหน่งจะตั้งฉากกับความเร่ง ณ t ในข้อใด

(1)	–3	(2)	–2
(3)	–1	(4)	0
(5)	1		

กฎการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์

1. ถ้า **C** เป็นเวกเตอร์ที่คงตัวแล้ว

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = \mathbf{0}$$

เวกเตอร์ 0

2. ถ้า α เป็นค่าคงตัวใดๆ แล้ว

$$\frac{d}{dt}[\alpha \mathbf{r}(t)] = \alpha \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)$$

3. ถ้า $f(t)$ เป็นฟังก์ชันของ t แล้ว

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\mathbf{r}(t) \right] = f(t)\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) + \mathbf{r}(t)\frac{df}{dt}(t)$$

เวกเตอร์

ฟังก์ชันของ t (ไม่ใช่เวกเตอร์)

4. อนุพันธ์ของผลบวกเวกเตอร์ = ผลบวกของเวกเตอร์อนุพันธ์

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)+\mathbf{s}(t)] = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) + \frac{d\mathbf{s}}{dt}(t)$$

5. อนุพันธ์ของผลต่างเวกเตอร์ = ผลต่างของเวกเตอร์อนุพันธ์

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)-\mathbf{s}(t)] = \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) - \frac{d\mathbf{s}}{dt}(t)$$

6. อนุพันธ์ของผลคูณเชิงสเกลาร์ (dot product)

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{s}(t)\right] = \underbrace{\mathbf{r}(t)\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt}(t)+\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\cdot\mathbf{s}(t)}_{\text{สเกลาร์ (ฟังก์ชันของ } t\text{)}}$$

เวกเตอร์

7. อนุพันธ์ของผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product)

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{s}(t)\right]=\mathbf{r}(t)\times\frac{d\mathbf{s}}{dt}(t)+\frac{d\mathbf{r}}{dt}(t)\times\mathbf{s}(t)$$

ห้ามสลับตำแหน่ง

ห้ามสลับตำแหน่ง

เวกเตอร์

8. กฎลูกโซ่ (chain rule)

$$\frac{d}{dt}\left[\mathrm{r}(u)\right]=\frac{d\mathrm{r}}{du}(u)\cdot\frac{du}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\left(t^2\mathrm{i}\right)\times\left(t^4\,\mathrm{j}\right)\right]$$ มีค่าเท่าใด

(1) $6t^5\mathrm{i}$

(2) $-6t^5\,\mathrm{j}$

(3) $6t^5\,\mathrm{j}$

(4) $-6t^5\mathrm{k}$

(5) $6t^5\mathrm{k}$

กำหนดให้ $u(t) = \mathrm{i} + t^4\mathrm{j} - e\mathrm{k}$

และ $v(t) = e\mathrm{i} + \frac{1}{t^3}\mathrm{j} - 2\mathrm{k}$

$\frac{d}{dt}\left[u(t) \bullet v(t)\right]$ มีค่าเท่าใด

(1) 1 (2) 2

(3) 3 (4) 4

(5) e

ให้ $\mathrm{u} = <u_1(t), u_2(t), u_3(t)>$, $\mathrm{v} = <v_1(t), v_2(t), v_3(t)>$, $\mathrm{w} = <w_1(t), w_2(t), w_3(t)>$ จงหา

$$\frac{d\ \mathrm{u}\bullet(\mathrm{v}\times\mathrm{w})}{dt}$$

จงแสดงว่า $\dfrac{d\ \mathrm{r}(t)\times \mathrm{r}'(t)}{dt} = \mathrm{r}(t)\times \mathrm{r}''(t)$

ฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ที่มีความยาวคงตัว

$|\mathrm{r}(t)| = \mathrm{c}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

$|\mathrm{r}(t)| =$

ฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ใดต่อไปนี้มีความยาวเป็นค่าคงตัว

(1) $\mathrm{r}(t)=\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}$

(2) $\mathrm{r}(t)=(\cos t)\mathrm{i}+(\sin t)\mathrm{j}+\mathrm{k}$

(3) $\mathrm{r}(t)=e\mathrm{i}+\sin\left(t^3\right)\mathrm{j}+\cos\left(t^3\right)\mathrm{k}$

(4) $\mathrm{r}(t)=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+5}}\mathrm{i}+\dfrac{1}{\sqrt{t^2+5}}\mathrm{j}+\dfrac{2}{\sqrt{t^2+5}}\mathrm{k}$

(5) ถูกทุกข้อ

เราพบว่าฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ที่มีความยาวคงตัวมีคุณสมบัติคือ

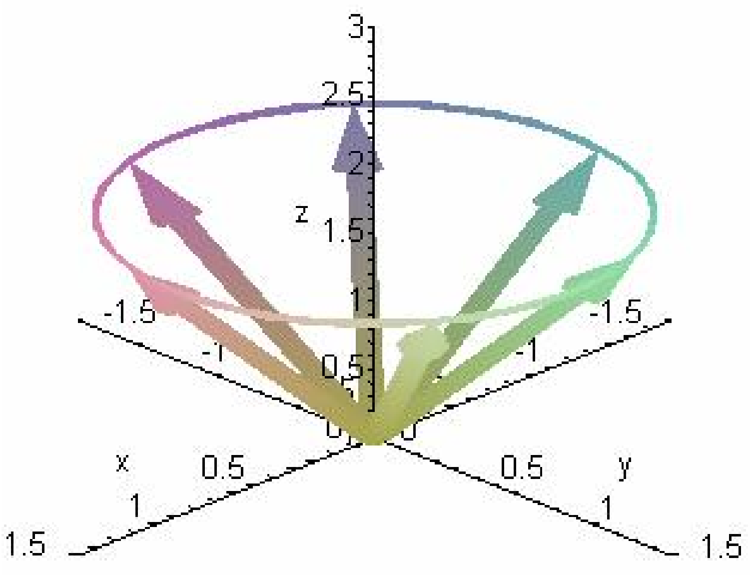
$$\frac{d\,\mathrm{r}}{dt}\bullet\mathrm{r}=\mathrm{r}\bullet\frac{d\,\mathrm{r}}{dt}=0$$

นั่นแสดงให้เห็นว่า ถ้า<u>**ฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ที่มีความยาวคงตัว**</u>
ฟังก์ชันดังกล่าวและอนุพันธ์ของฟังก์ชันต้อง<u>**ตั้งฉาก**</u>กัน

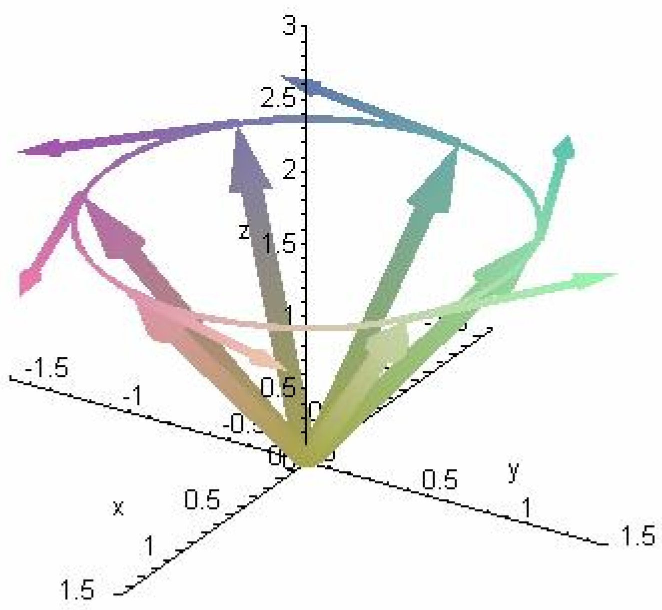
จงแสดงว่าฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์

$$\mathrm{r}(t) = (\sin t)\mathrm{i} + (\cos t)\mathrm{j} + \sqrt{e}\mathrm{k}$$

มีความยาวคงตัว



z
x
y



z
x
y

ให้ $\mathrm{r}(t)=(\cos 2t)\mathrm{i}+(\sin 2t)\mathrm{j}+2\mathrm{k}$

เวกเตอร์ใดตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\mathrm{r}'(t)$

(1) $\mathrm{s}(t)=(\sin 2t)\mathrm{i}+(\cos 2t)\mathrm{j}$

(2) $\mathrm{s}(t)=-(\sin 2t)\mathrm{i}+(\cos 2t)\mathrm{j}$

(3) $\mathrm{s}(t)=-(2\sin 2t)\mathrm{i}+(2\cos 2t)\mathrm{j}$

(4) $\mathrm{s}(t)=(\cos 2t)\mathrm{i}+(\sin 2t)\mathrm{j}+2\mathrm{k}$

(5) $\mathrm{s}(t)=(2\cos 2t)\mathrm{i}\text{-}(2\sin 2t)\mathrm{j}\text{-}\mathrm{k}$

ให้ r(t) ฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์ จงหา $\left|\mathrm{r}(t)\times \mathrm{r}'(t)\right|$

เมื่อ $|\mathrm{r}(t)|=2$ สำหรับทุกๆ ค่า t

$$\mathrm{r}'(t)=(\sin t)\mathbf{i}+(\cos t)\,\mathbf{j}+\sqrt{3}\mathbf{k}$$

ให้ r(t) แทนตำแหน่งของวัตถุที่เวลา t ใดๆ

$$\mathrm{r}(t) = 2\ln(t+1)\mathrm{i} + t^2\mathrm{j} + \frac{t^2}{2}\mathrm{k}$$

จงหาความเร็ว, อัตราเร็ว,ความเร่ง,อัตราเร่งและทิศทางการเคลื่อนที่ของวัตถุดังกล่าว เมื่อ t=1