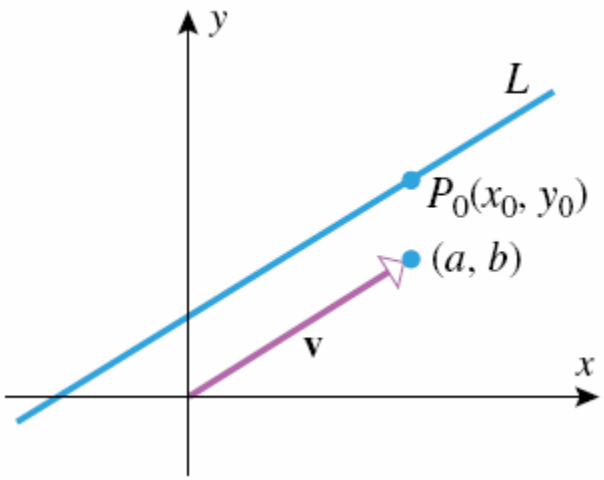
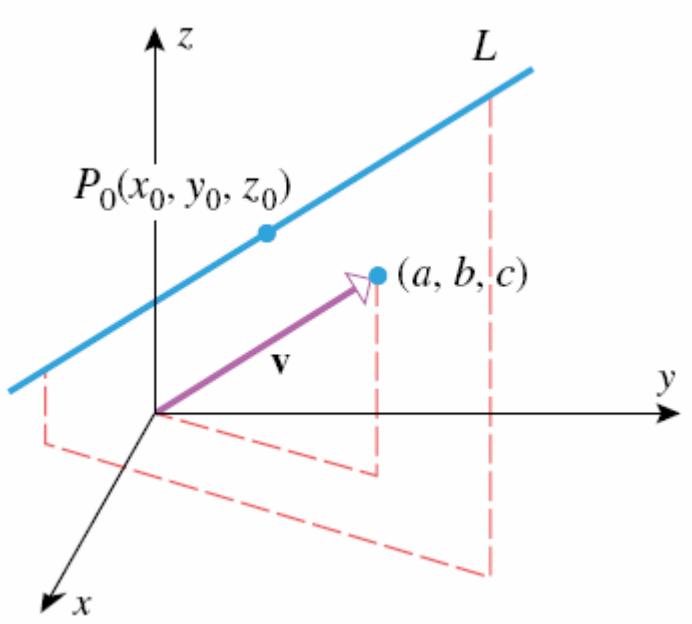
เส้นตรงและระนาบในสามมิติ

(Lines and Planes in Space)

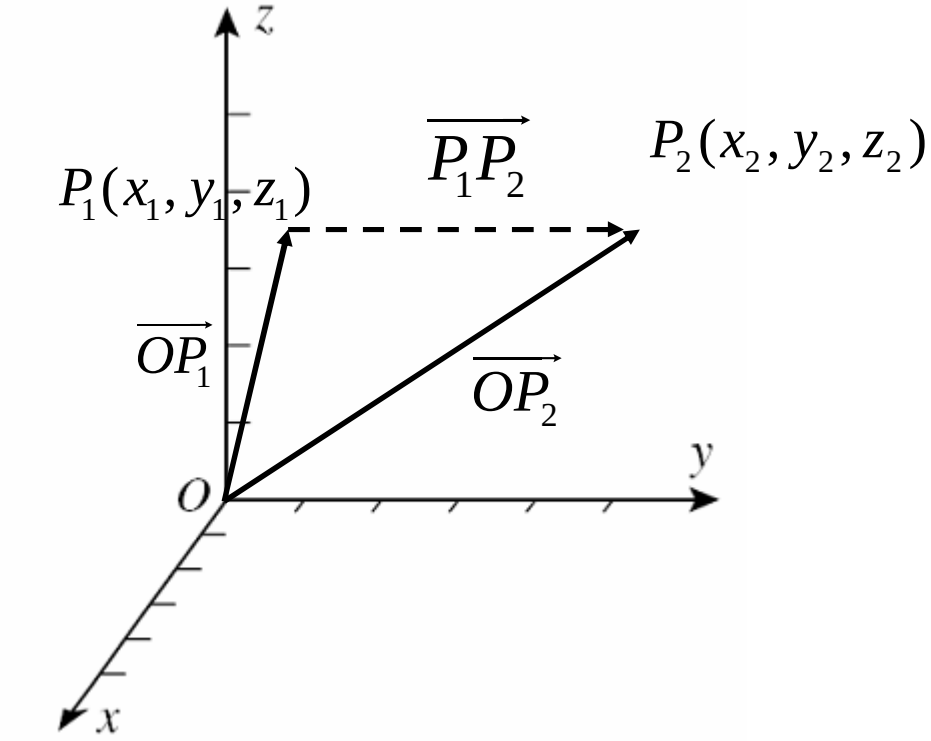
ในการคำนวณทางเรขาคณิตในระบบสามมิติมักจะเริ่มต้นด้วยการศึกษาเกี่ยวกับ***เส้นตรง***และ***ระนาบ*** โดยในการศึกษาเรื่องนี้จะใช้รากฐานความรู้ในเรื่อง***ผลคูณเชิงสเกลาร์***และ***ผลคูณเชิงเวกเตอร์***เป็นหลัก ความรู้ในเรื่องเส้นตรงและระนาบ สามารถนำไปประยุกต์เพื่อศึกษาเกี่ยวกับ**เส้นโค้ง**ในสามมิติต่อไป

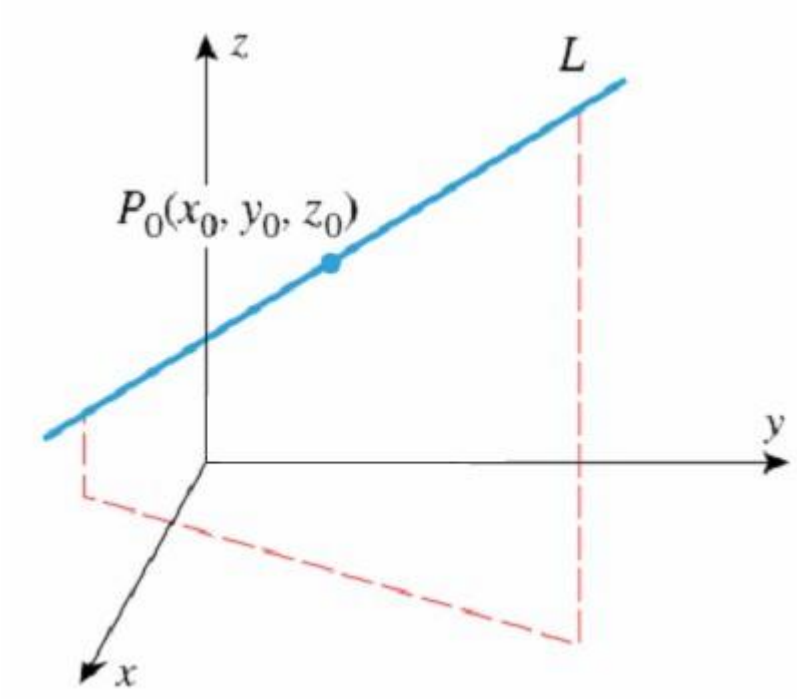

y
L
$P_0(x_0, y_0)$
(a, b)
v
x


z
L
$P_0(x_0, y_0, z_0)$
(a, b, c)
v
y
x

การหาเวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางเดียวกับทิศทางจากจุด P_1 ไปยังจุด P_2 และมีขนาดเท่ากันกับระยะทางระหว่างจุด P_1 และจุด P_2

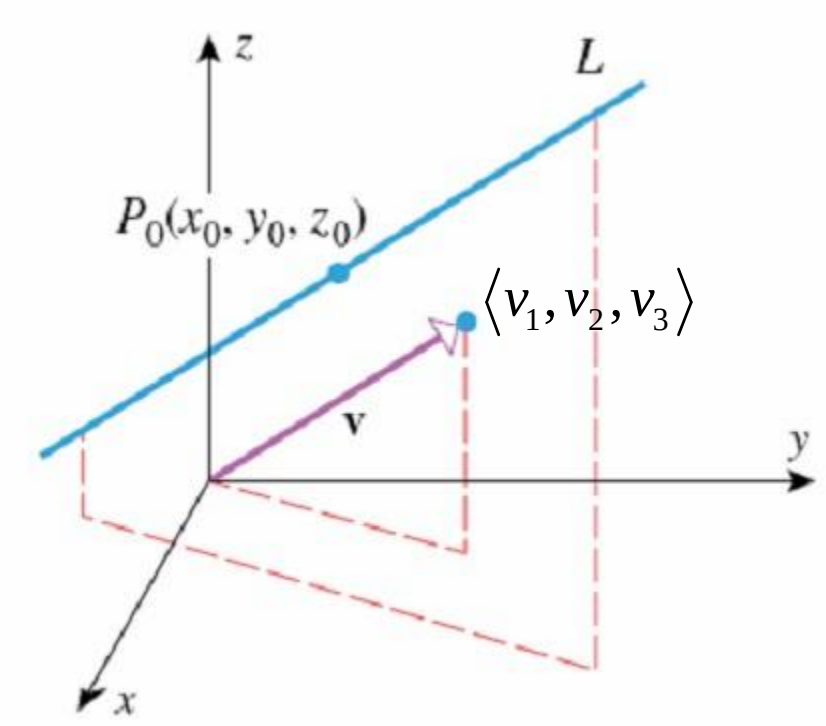
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathrm{i} + (y_2 - y_1)\mathrm{j} + (z_2 - z_1)\mathrm{k}$$





ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$
และ (x,y,z) เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง L

$(x-x_0)\mathrm{i}+(y-y_0)\mathrm{j}+(z-z_0)\mathrm{k}$ หรือ $\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0 \rangle$
เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรง L



ถ้า v เป็นเวกเตอร์ใดๆ ที่ขนานกับเส้นตรง L แล้ว

เวกเตอร์ v และเวกเตอร์ $\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$

ขนานกัน

เวกเตอร์ v และเวกเตอร์ $\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0 \rangle$ ขนานกัน

$$\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0 \rangle = t\mathbf{v}$$

$$\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0 \rangle = t < v_1, v_2, v_3 >$$

$$\left\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \right\rangle = t < v_1, v_2, v_3 >$$

เราเรียกสมการทั้งสาม

$$x = x_0 + v_1 t$$

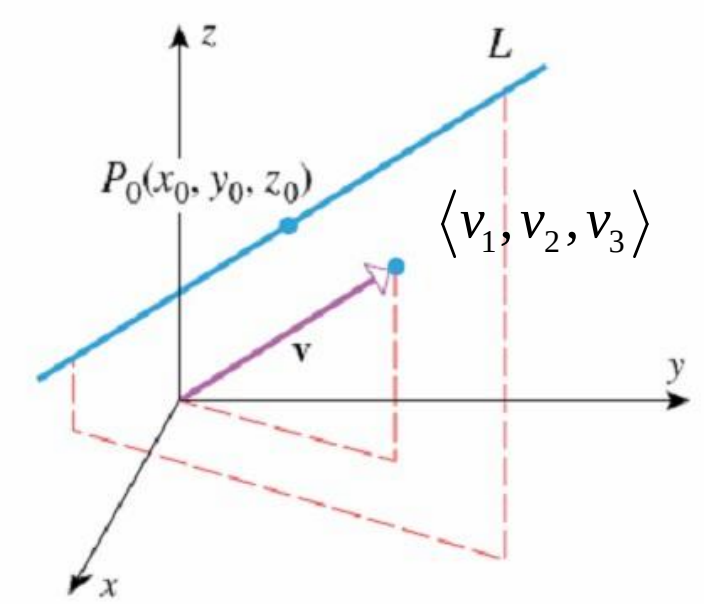
$$y = y_0 + v_2 t$$

$$z = z_0 + v_3 t$$

นี้ว่า

สมการอิงตัวแปรเสริมมาตรฐานสำหรับเส้นตรง

The standard parametric equation of the line.



<u>หมายเหตุ</u>

1. เพื่อความสะดวกจะเรียก

“สมการอิงตัวแปรเสริมมาตรฐานสำหรับเส้นตรง”

อย่างย่อว่า “สมการอิงตัวแปรเสริม”

<u>หมายเหตุ</u>

2. บางครั้งเพื่อความสะดวกจะเขียนสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x = x_0 + v_1 t \qquad y = y_0 + v_2 t \qquad z = z_0 + v_3 t$$

ในรูป

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$$

เมื่อ $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$

$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

t เป็นจำนวนจริงใดๆ

จงหาสมการอิงตัวแปรเสริม สำหรับเส้นตรงที่ผ่านจุด (-2,0,4) และขนานกับเวกเตอร์ <2,4,-2>

<u>หมายเหตุ</u> สมการอิงตัวแปรเสริมสำหรับเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(x_0,y_0,z_0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $v=\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ เป็นไปได้<u>***หลายสมการ!!!***</u>

จงหาสมการอิงตัวแปรเสริม สำหรับเส้นตรงที่ผ่านจุด (-3,2,-3) และจุด (1,-1,4)

หมายเหตุ สมการอิงตัวแปรเสริมสำหรับเส้นตรงที่ผ่านจุดจุดสองจุด เป็นไปได้***หลายสมการ!!!***

เส้นตรงและส่วนของเส้นตรง

(Line and Line Segment)

เส้นตรงและส่วนของเส้นตรงมีลักษณะคล้ายกัน แต่ต่างกันตรงที่

เส้นตรงมีความยาวไม่จำกัด

แต่

ส่วนของเส้นตรงมีความยาวจำกัด

<u>เส้นตรง</u>ที่ผ่านจุด (-3,2,-3) และจุด (1,-1,4)

ส่วนของเส้นตรงระหว่างจุด (-3,2,-3) และจุด (1,-1,4)

จงหาสมการอิงตัวแปรเสริม สำหรับ**ส่วนของเส้นตรง**ระหว่างจุด (-3,2,-3) และจุด (1,-1,4)

หมายเหตุ สมการอิงตัวแปรเสริมสำหรับส่วนของเส้นตรงเป็นไปได้***หลายสมการ!!!***

เส้นตรงสองเส้นต่อไปนี้ขนานกันหรือไม่

L_1 : $x=3-2t$, $y=4+t$, $z=6-t$

L_2 : $x=5-2t$, $y=-2+2t$, $z=7-2t$

เส้นตรงสองเส้นต่อไปนี้ขนานกันหรือไม่

L_1 : $x=5+3t$, $y=4-2t$, $z=-2-3t$

L_2 : $x=-1+9t$, $y=5-6t$, $z=3-9t$

เส้นตรงสองเส้นต่อไปนี้ขนานกันหรือไม่

L_1 : $x=3-2t$, $y=4+t$, $z=6-t$

L_2 : $x=5+2t$, $y=-2-2t$, $z=7+2t$

จงหาจุดตัดระหว่างเส้นตรง

L_1 : $x=1+2t$, $y=2-t$, $z=4-2t$

L_2 : $x=9+t$, $y=5+3t$, $z=-4-t$

จงหาจุดตัดระหว่างเส้นตรง

L_1 : $x=4t, y=1-2t, z=2+2t$

L_2 : $x=1+t, y=1-t, z=-1+4t$

จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของ**เส้นตรง**ที่ผ่านจุด (3,-3,-1) และขนานกับเวกเตอร์ i+j+k

จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของ**เส้นตรง**ที่ผ่านจุด (1,2,-1) และจุด (-1,0,1)

จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของ**เส้นตรง**ที่ผ่านจุด (3,-2,-1) และขนานกับเส้นตรง $x=1+2t$, $y=2-t$, $z=3t$

จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของ**เส้นตรง**ที่ผ่านจุด (1,1,1) และขนานกับแกน x

จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของ**เส้นตรง**ที่ผ่านจุด (2,3,0) และตั้งฉากกับเวกเตอร์ <1,2,3> และ เวกเตอร์ <3,4,5>

จงหาจุดตัดระหว่างเส้นตรง

L_1 : $x=1+2t, y=2+3t, z=3+4t$

L_2 : $x=2+t, y=4+2t, z=-1-4t$

จงหาจุดตัดระหว่างเส้นตรง

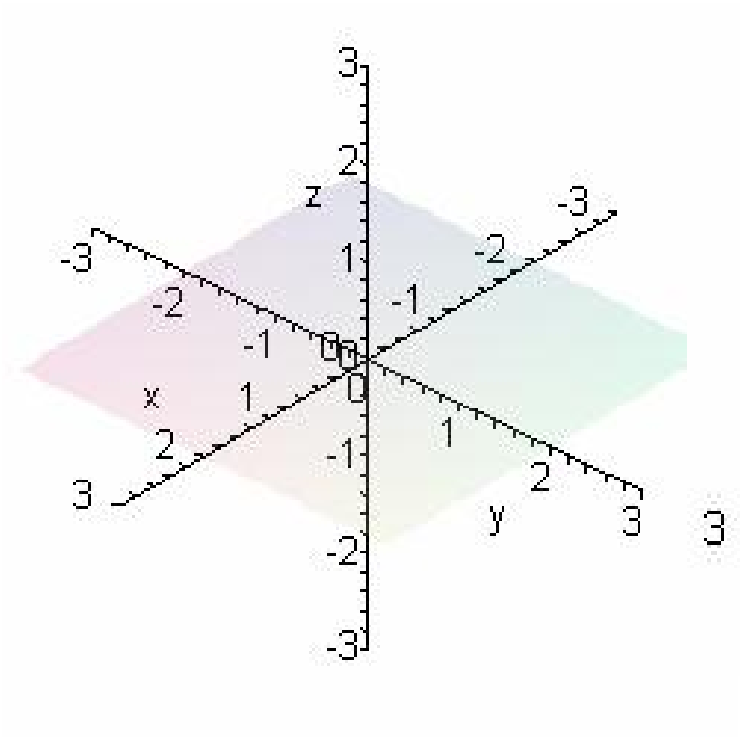
L_1 : $x=1+2t, y=2+3t, z=3+4t$

L_2 : $x=2+t, y=4+2t, z=-2-4t$

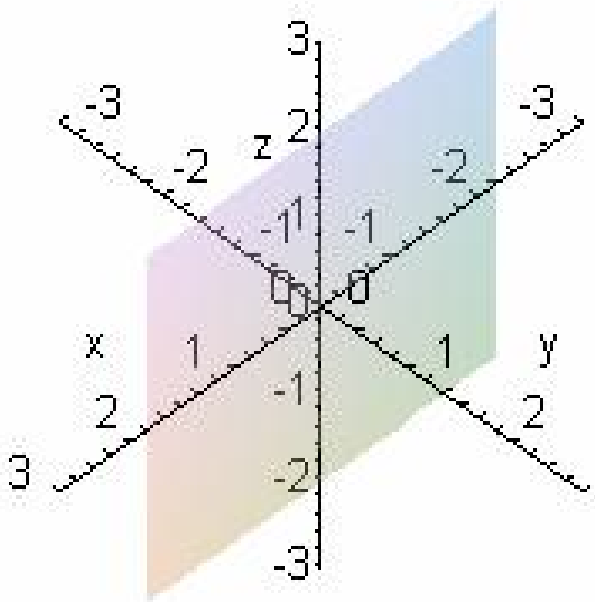
จุด (3,5,7) อยู่บนเส้นตรง

L_1 : $x=1+2t, y=2+3t, z=3+4t$ หรือไม่?

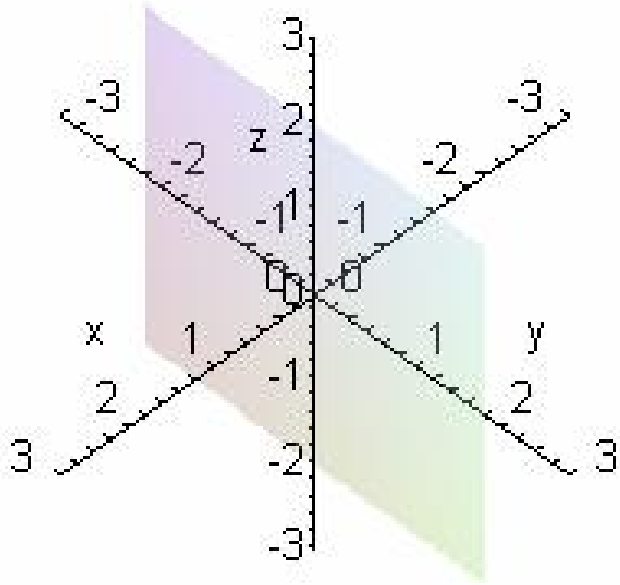
ระนาบในสามมิติ



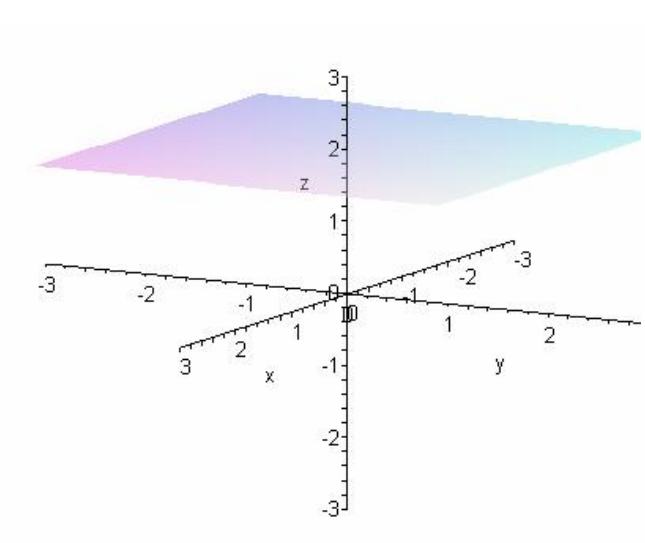
ระนาบ xy



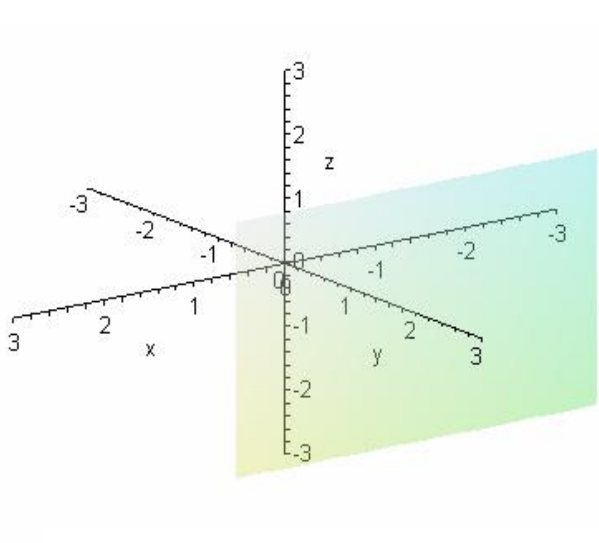
ระนาบ xz



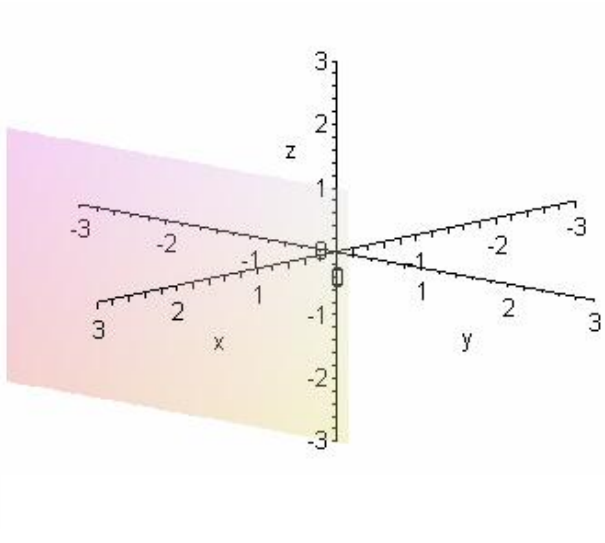
ระนาบ yz



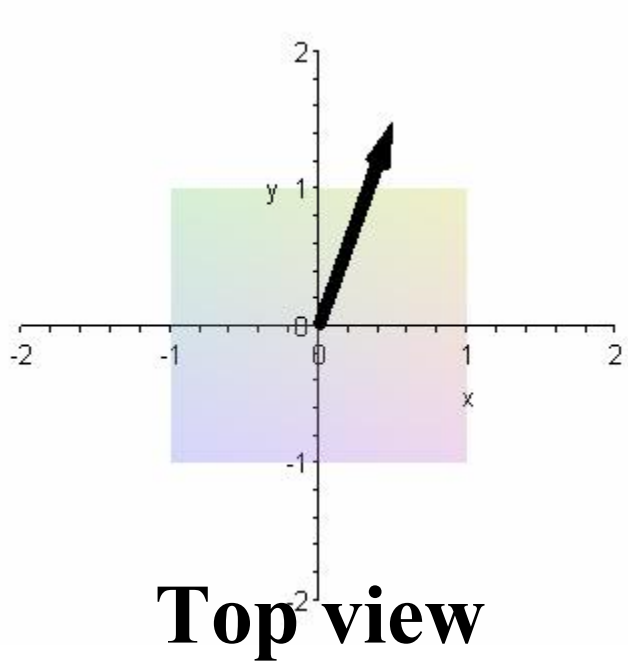
ระนาบ $z=2$



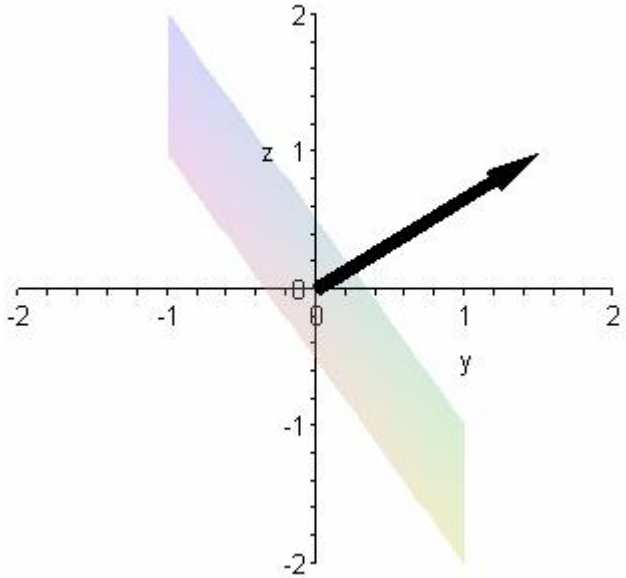
ระนาบ $y=2$



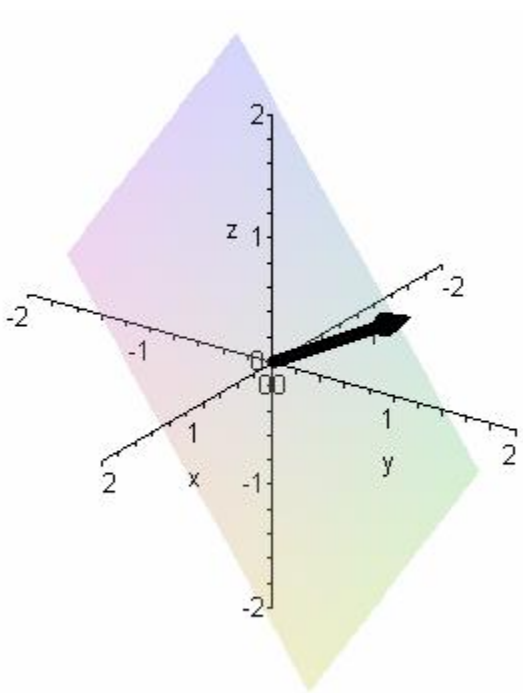
ระนาบ $x=2$

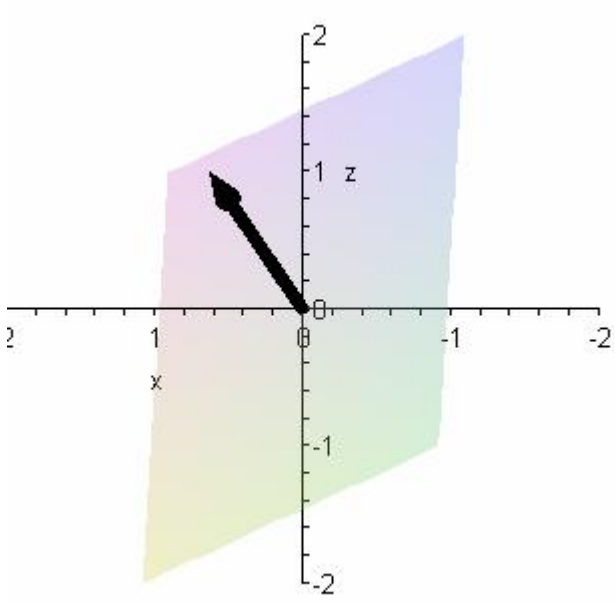


Top view



Front view

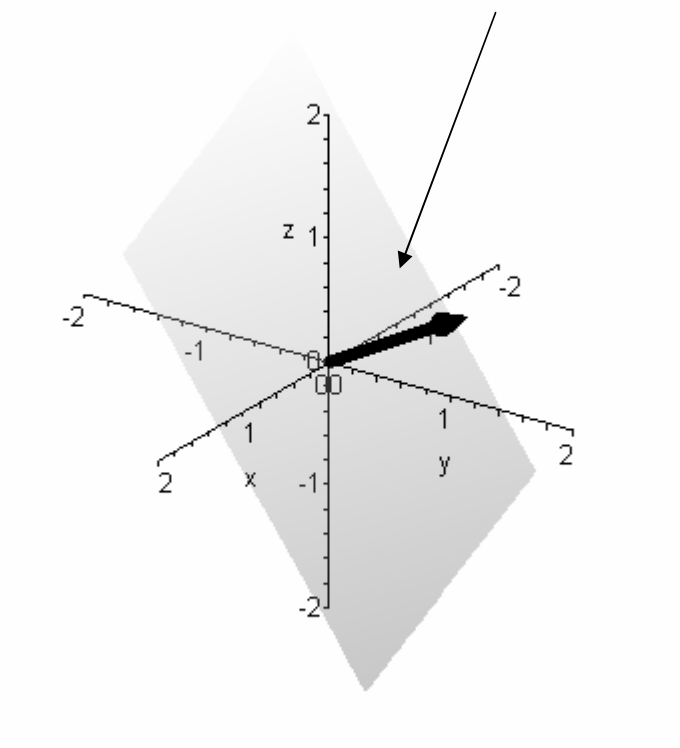


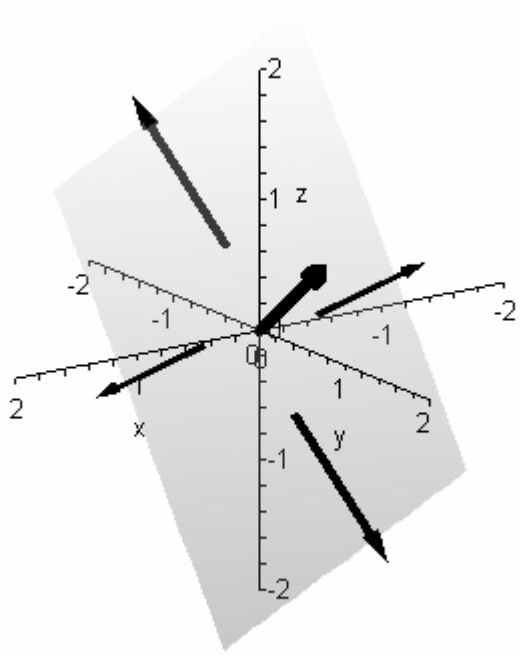


Side view

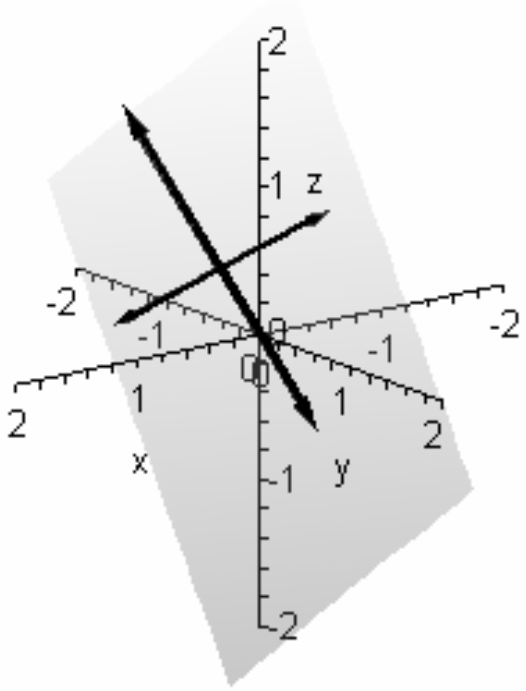
เรียกเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบว่า

***<u>เวกเตอร์แนวฉาก</u>* <u>(normal vector)</u>**





สังเกตว่าเวกเตอร์ในแนวระนาบ
จะตั้งฉากกับ normal vector ที่
ตั้งฉากกับระนาบเสมอ



ถ้าจุด (x_0,y_0,z_0) อยู่บนระนาบ เราสร้างเวกเตอร์ใดๆ ที่อยู่บนระนาบได้ดังนี้

$$\langle x-x_0, y-y_0, z-z_0 \rangle$$

หรือ $$(x-x_0)\mathrm{i}+(y-y_0)\mathrm{j}+(z-z_0)\mathrm{k}$$

โดยที่ (x,y,z) เป็นจุดใดๆ บนระนาบ

และเวกเตอร์ดังกล่าวต้องตั้งฉากกับ normal vector <A,B,C>

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle \bullet \langle A, B, C \rangle = 0$$

ดังนั้นสมการระนาบคือ

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 + Cz - Cz_0 = 0$$

หรือ

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0$$

หรือ

$$Ax + By + Cz = D$$

เมื่อ $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด (-3,0,7) และตั้งฉากกับเวกเตอร์ <5,2,-1>

จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบ $3x+4y-5z=6$

หมายเหตุ เวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับระนาบมี***หลาย***เวกเตอร์

จุด (2,5,4) อยู่บนระนาบ $3x+4y-5z=6$ หรือไม่?

จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด (1,2,-1),(2,3,1) และ (3,-1,2)

เส้นตรง L : $x=3+2t, y=4-6t, z=-3+10t$ ตั้งฉากกับระนาบ $x-3y+5z=12$ หรือไม่?

เส้นตรง L : $x=x_0+v_1t, y=y_0+v_2t, z=z_0+v_3t$ ***<u>ตั้งฉาก</u>***กับระนาบ $Ax+By+Cz=D$ หรือไม่?

ให้ดูว่า เวกเตอร์ $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ ***<u>ขนาน</u>***กับเวกเตอร์ $\langle A,B,C\rangle$ หรือไม่?

เส้นตรง L : $x=3+8t, y=4+5t, z=-3-t$ ขนานกับระนาบ $x-3y+5z=12$ หรือไม่?

เส้นตรง L : $x=x_0+v_1t, y=y_0+v_2t, z=z_0+v_3t$ ***ขนาน***กับระนาบ $Ax+By+Cz=D$ หรือไม่?

ให้ดูว่า เวกเตอร์ $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$ ***ตั้งฉาก***กับเวกเตอร์ $\langle A,B,C\rangle$ หรือไม่?

เนื่องจากเส้นตรง L : $x=3+8t, y=4+5t, z=-3-t$

ไม่ขนานกับระนาบ $x-3y+5z=12$ เส้นตรงดังกล่าว ตัดกับระนาบ ณ จุดใด?

ระนาบ $3x-4y+5z=0$ ขนานกับระนาบ $-6x+8y-10z-4=0$ หรือไม่?

ระนาบ $A_1x+B_1y+C_1z=D_1$ ***ขนาน***กับระนาบ $A_2x+B_2y+C_2z=D_2$ หรือไม่?

ให้ดูว่า เวกเตอร์ $\langle A_1, B_1, C_1\rangle$ ***ขนาน***กับเวกเตอร์ $\langle A_2, B_2, C_2\rangle$ หรือไม่?

ระนาบ $2x-4y+4z=7$ ขนานกับระนาบ $6x+2y-3z=2$ หรือไม่?

เราพบว่าถ้าระนาบ $A_1x+B_1y+C_1z=D_1$ ***<u>ไม่ขนาน</u>***กันระนาบ $A_2x+B_2y+C_2z=D_2$ ระนาบทั้งสองก็จะตัดกันเป็นเส้นตรง และเส้นตรงดังกล่าวจะ***<u>ขนาน</u>***กับเวกเตอร์

$$<A_1, B_1, C_1> \text{x} <A_2, B_2, C_2>$$

และนอกจากนี้ทำให้เราได้มุมระหว่างระนาบโดยปริยายคือ

$$\theta = \arccos\left(\frac{<A_1, B_1, C_1> \bullet <A_2, B_2, C_2>}{\left|<A_1, B_1, C_1>\right|\left|<A_2, B_2, C_2>\right|}\right)$$

หรือ

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\left|<A_1, B_1, C_1> \times <A_2, B_2, C_2>\right|}{\left|<A_1, B_1, C_1>\right|\left|<A_2, B_2, C_2>\right|}\right)$$

จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ $2x-4y+4z=7$ และระนาบ $6x+2y-3z=2$ และมุมระหว่างระนาบทั้งสอง

เวกเตอร์แนวฉาก (normal vector) ของระนาบทั้งสองคือ

$$< 2, -4, 4 > \qquad\qquad < 6, 2, -3 >$$

จงหาจุดตัดระหว่างเส้นตรง

L_1 : $x=t, y=2-t, z=1+t$

L_2 : $x=2+2t, y=3+t, z=6+5t$

และระนาบที่เกิดจากเส้นตรงเหล่านี้