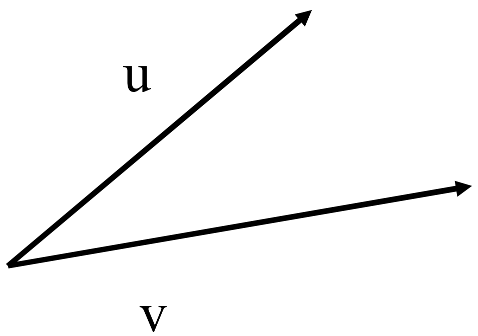
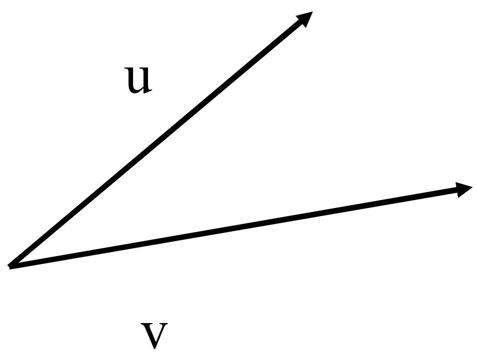
ผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์

(Scalar Product and Vector Product)

สำหรับจำนวนจริงเรามีการดำเนินการบวกและการคูณ (ลบและหาร คือ การผกผันของการบวกและคูณตามลำดับ) สำหรับในการดำเนินการด้านเวกเตอร์ นอกจากจะมีการบวก ซึ่งมีลักษณะเหมือนกันกับการบวกตัวเลขปกติแล้ว ยังมีการดำเนินการ*คล้าย*การคูณ แต่*แตกต่าง*จากการคูณของตัวเลข

แนวคิด





ผลคูณเชิงสเกลาร์ (หรือ ผลคูณจุด) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

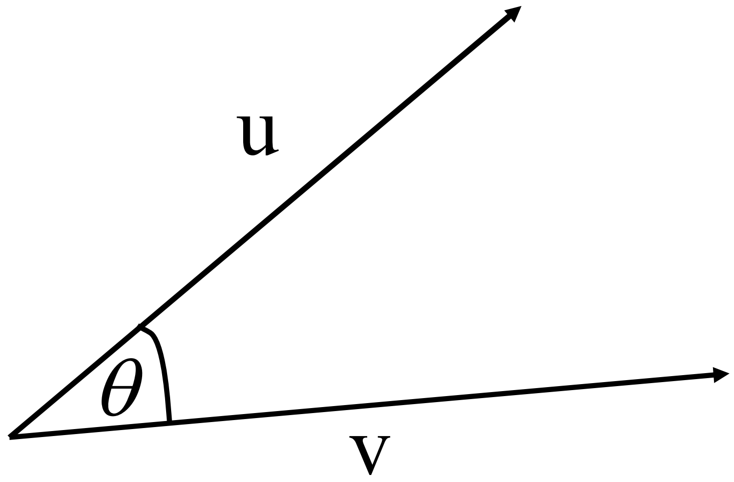
Scalar Product (or Dot Product)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ หมายถึง ขนาดของ*เงา*ของเวกเตอร์หนึ่งที่ทาบบนอีกเวกเตอร์หนึ่ง คูณกับขนาดของเวกเตอร์นั้น ที่ได้ชื่อว่า***ผลคูณเชิงสเกลาร์*** เพราะว่าผลลัพท์ที่ได้จากการคำนวณเป็นตัวเลข (สเกลาร์) และที่บางครั้งได้ชื่อว่า***ผลคูณจุด*** เพราะเรามักใช้สัญลักษณ์จุด (“.”) ในการสื่อว่าเป็นการคูณประเภทนี้

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (หรือ ผลคูณจุด) $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}$

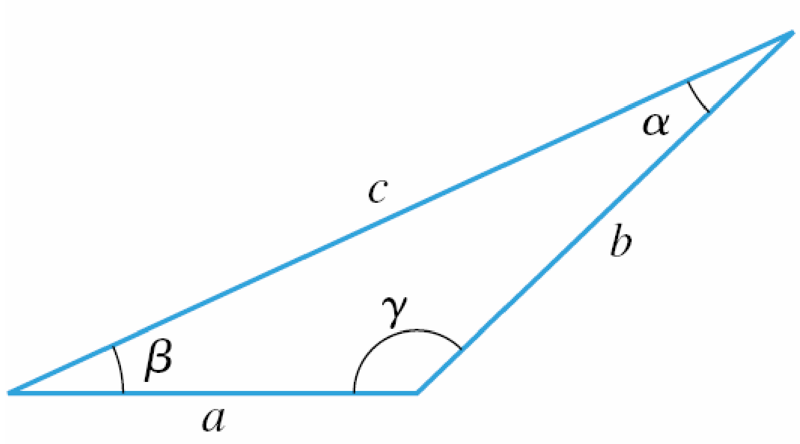
Scalar Product (or Dot Product)

$$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = |\mathrm{u}||\mathrm{v}| \cos \theta$$



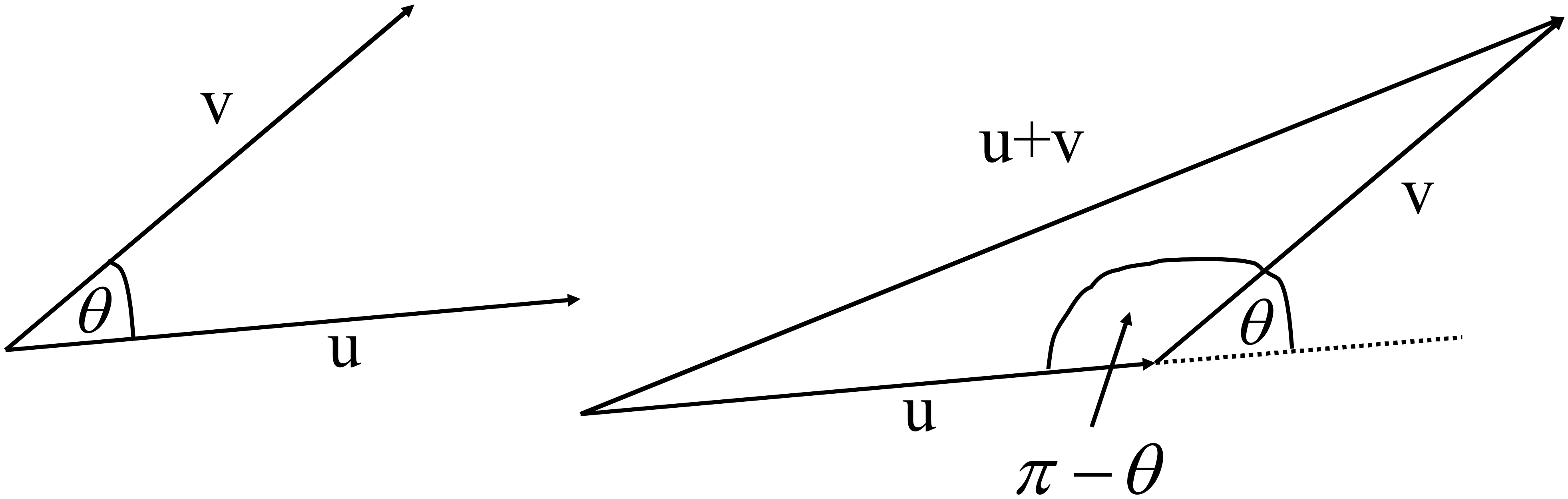
จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของ u และ v เมื่อ $u=<1,-3,4> v=<1,5,2>$

พิจารณาสามเหลี่ยม



กฎของ sine $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

กฎของ cosine $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



$$|\mathrm{u}+\mathrm{v}|^2 = |\mathrm{u}|^2 + |\mathrm{v}|^2 - 2|\mathrm{u}||\mathrm{v}|\cos(\pi-\theta)$$

$$|\mathrm{u}+\mathrm{v}|^2 = |\mathrm{u}|^2 + |\mathrm{v}|^2 + 2|\mathrm{u}||\mathrm{v}|\cos(\theta)$$

$$2|\mathrm{u}||\mathrm{v}|\cos(\theta) = |\mathrm{u}+\mathrm{v}|^2 - (|\mathrm{u}|^2 + |\mathrm{v}|^2)$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ (หรือ ผลคูณจุด) $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}$

Scalar Product (or Dot Product)

$$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = |\mathrm{u}||\mathrm{v}|\cos\theta$$

และถ้า u=<u_1,u_2,u_3> และ v=<v_1,v_2,v_3> แล้ว

$$\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของ u และ v เมื่อ $u=<1,-3,4>v=<1,5,2>$

ทฤษฎีบทของผลคูณเชิงสเกลาร์

ถ้า u,v และ w เป็นเวกเตอร์ และ α เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้ว

(1) $\mathrm{u} \cdot \mathrm{v} = \mathrm{v} \cdot \mathrm{u}$

(2) $\mathrm{u} \cdot (\mathrm{v}+\mathrm{w}) = \mathrm{u} \cdot \mathrm{v} + \mathrm{u} \cdot \mathrm{w}$

(3) $\alpha(\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}) = (\alpha \mathrm{u}) \cdot \mathrm{v} = \mathrm{u} \cdot (\alpha \mathrm{v})$

(4) $\mathrm{v} \cdot \mathrm{v} = |\mathrm{v}|^2$

(5) $|\mathrm{v}| = \sqrt{\mathrm{v} \cdot \mathrm{v}}$

(6) $\mathbf{0} \cdot \mathrm{v} = 0$

(7) $\cos\theta = \dfrac{\mathrm{u} \cdot \mathrm{v}}{|\mathrm{u}||\mathrm{v}|}$

$(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$ **จริงหรือไม่?**

จงหาค่าต่อไปนี้

(1) $i \cdot i =$, $i \cdot j =$, $i \cdot k =$

(2) $j \cdot i =$, $j \cdot j =$, $j \cdot k =$

(3) $k \cdot i =$, $k \cdot j =$, $k \cdot k =$

จงหามุมระหว่าง u และ v เมื่อ $u=<1,-3,4>$ $v=<1,5,2>$

ให้ u=<1,-3,4> v=<1,5,2>

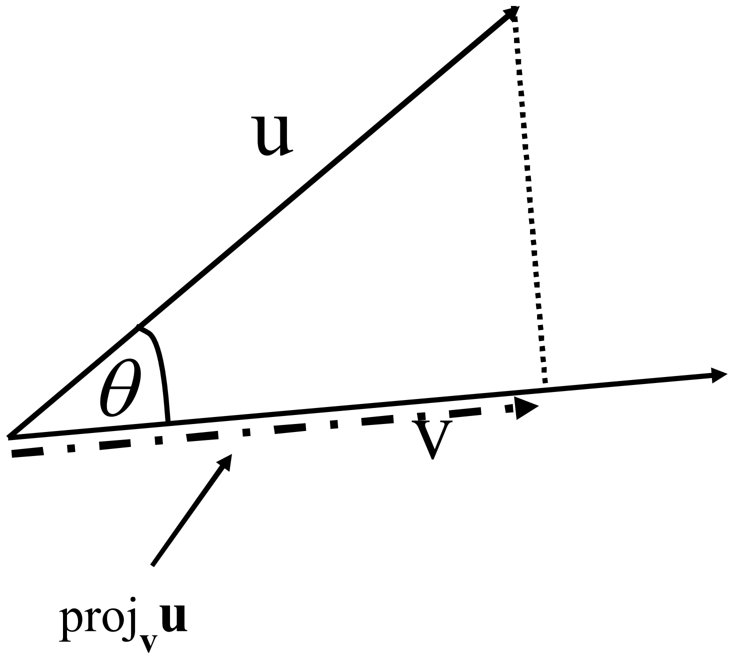
จงหา $|u|, |v|, u \cdot v$

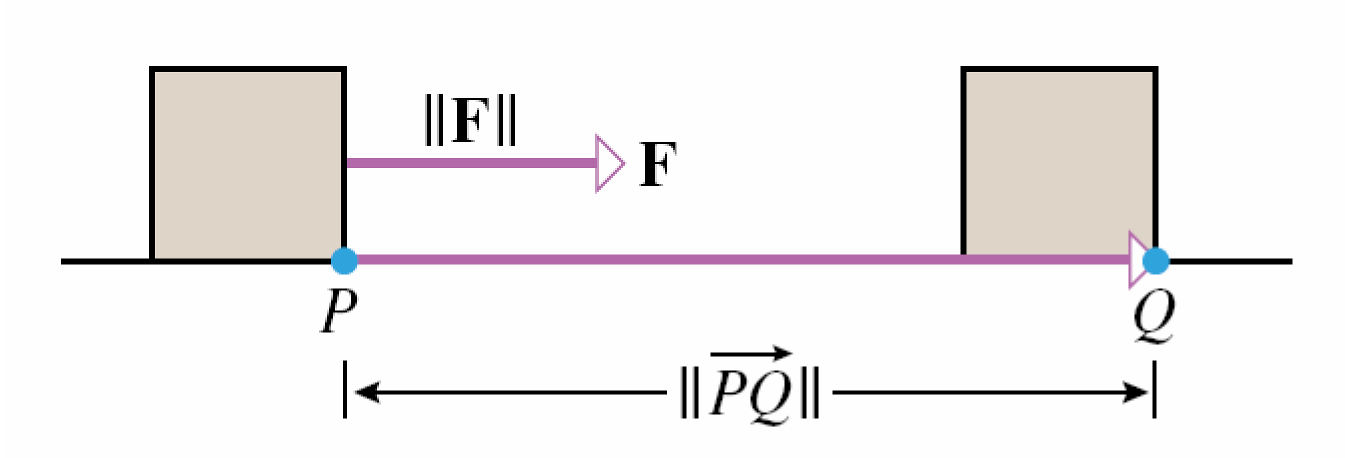
โคไซน์ของมุมระหว่าง u,v

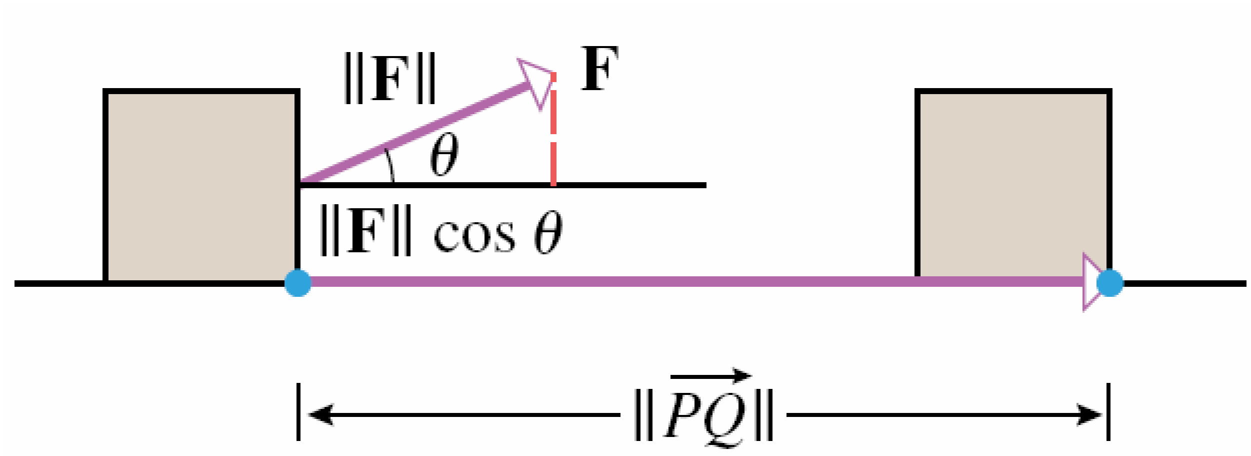
ส่วนประกอบสเกลาร์ของ u ในทิศทางของ v

เวกเตอร์ภาพฉายของเวกเตอร์ u บนเวกเตอร์ v

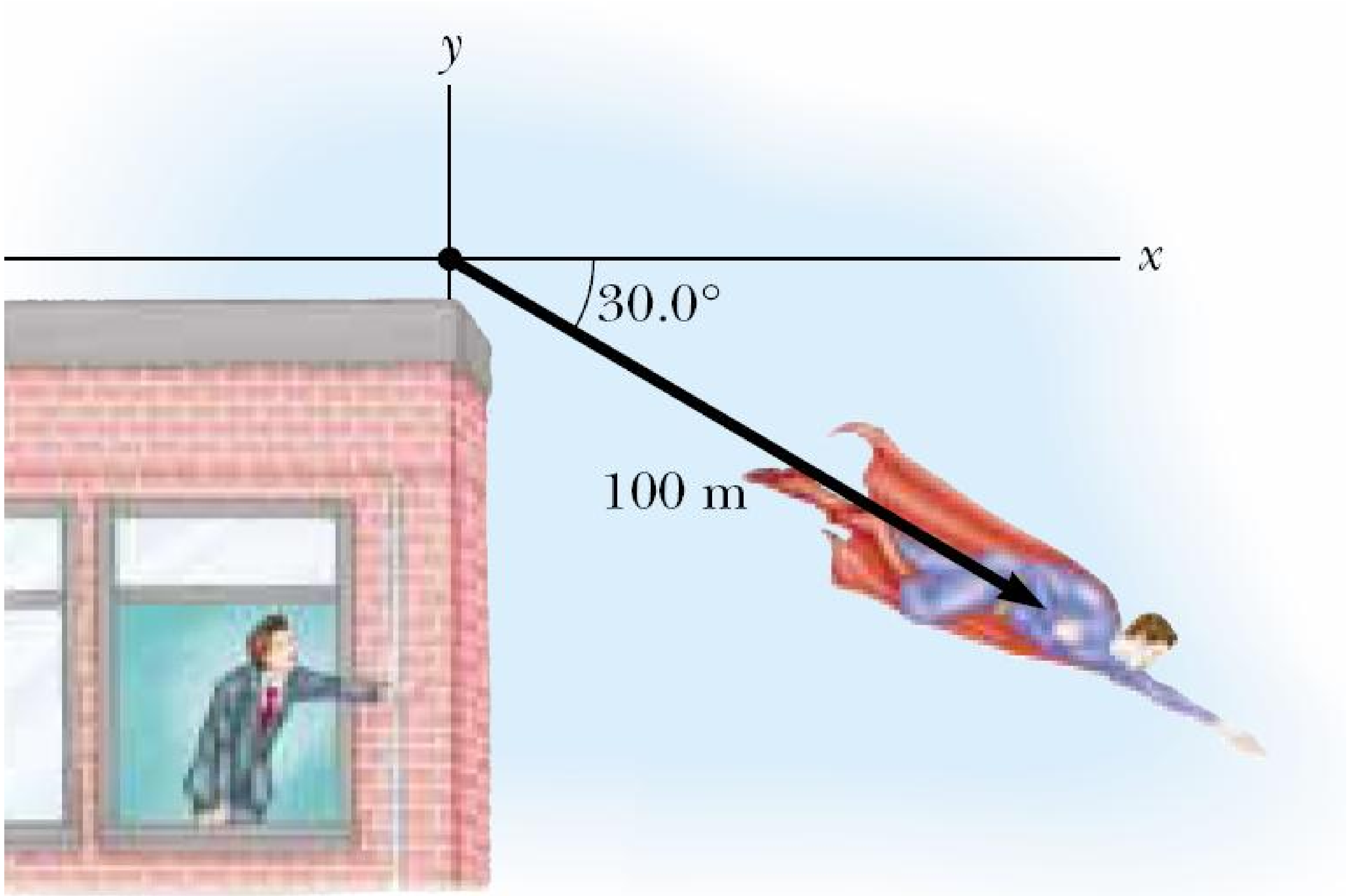
Projection of **u** on **v**



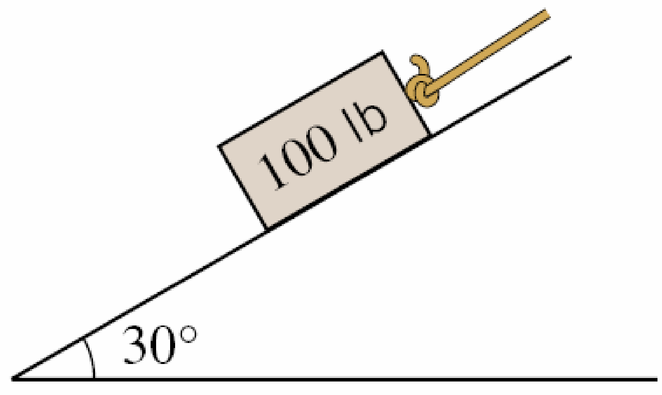




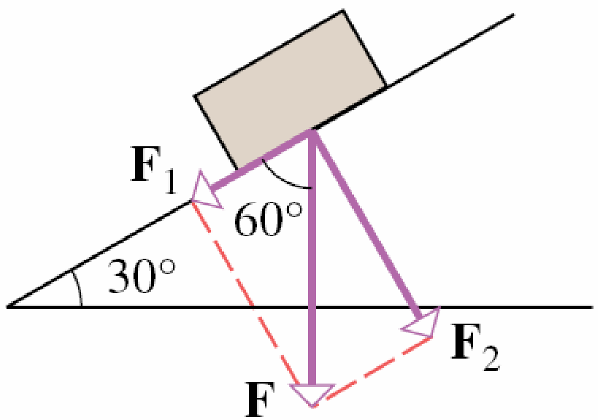
(b)



y
x
30.0°
100 m



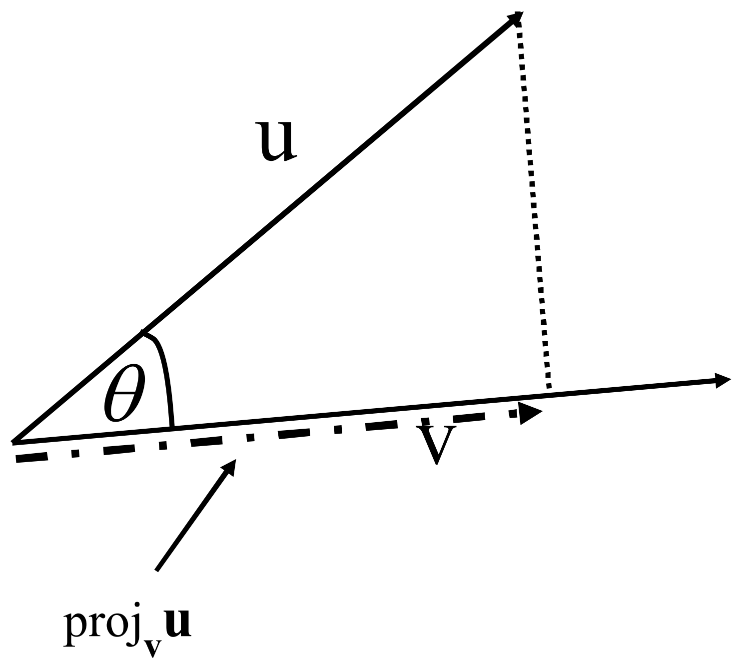
(*a*)



(*b*)

เวกเตอร์ภาพฉายของเวกเตอร์ u บนเวกเตอร์ v

Projection of **u** on **v**



เวกเตอร์ภาพฉายของเวกเตอร์ u บนเวกเตอร์ v

เมื่อ $u=<1,-3,4>$ $v=<1,5,2>$

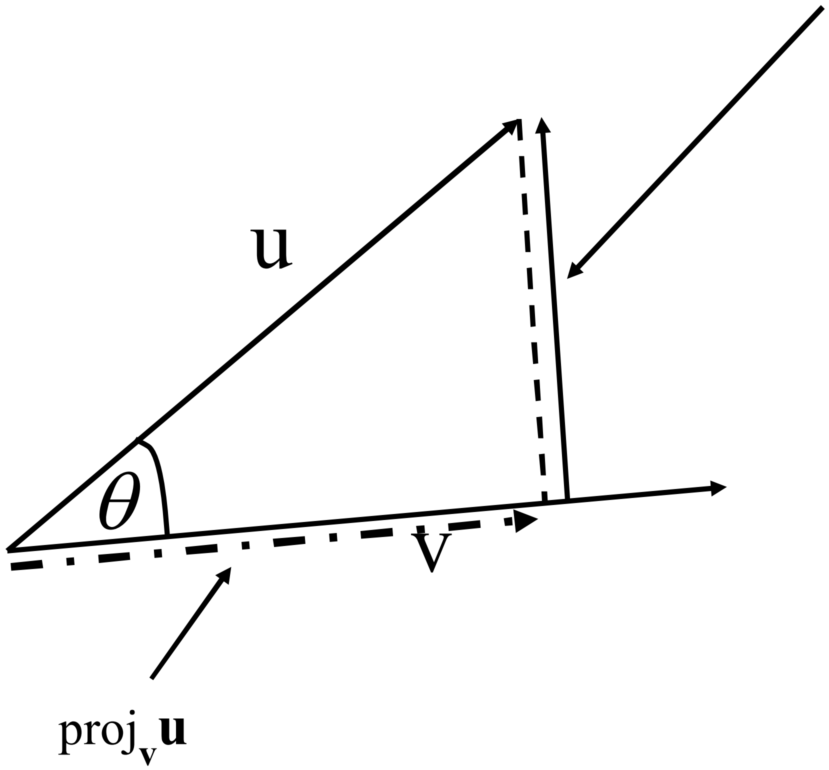
$$\text{Proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} =$$

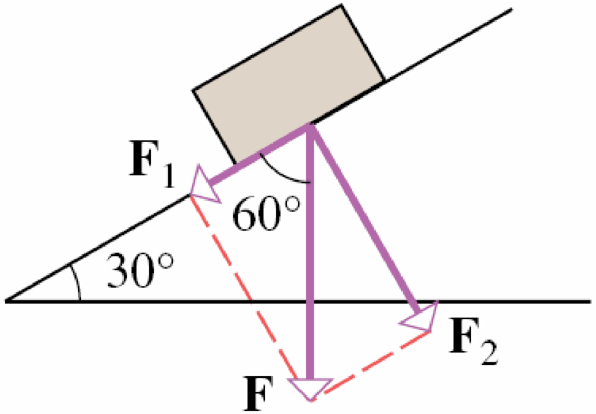
เวกเตอร์ภาพฉายของเวกเตอร์ v บนเวกเตอร์ u

$$\text{Proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v} =$$

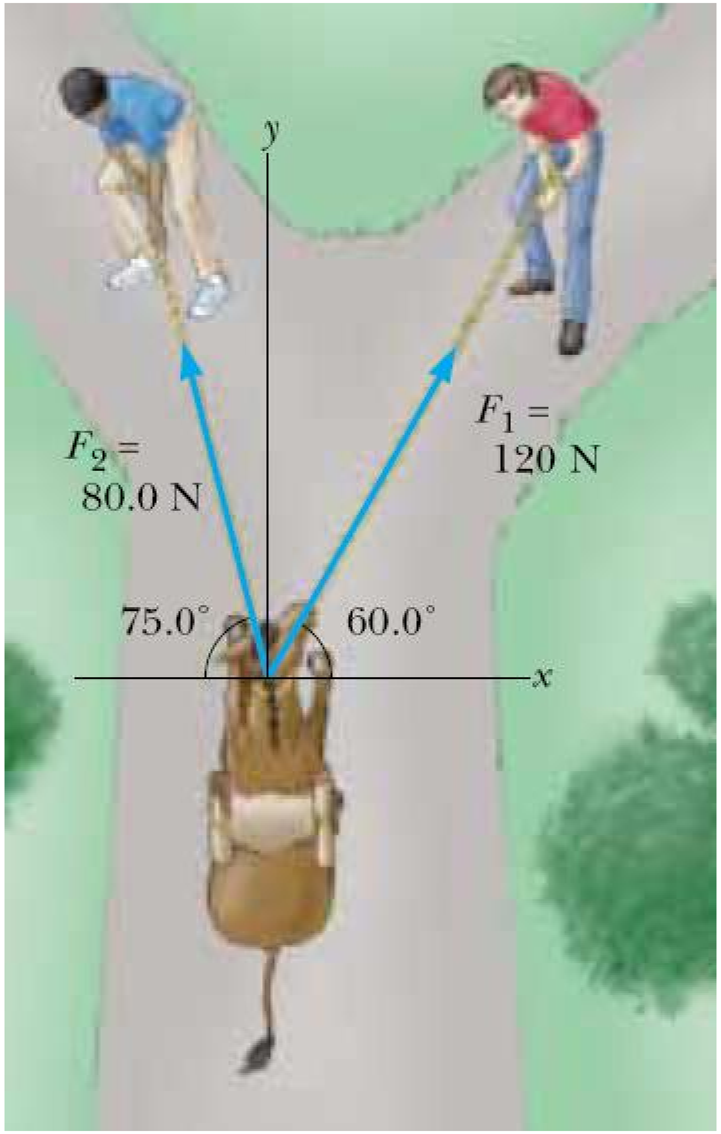
เวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับเวกเตอร์ภาพฉาย

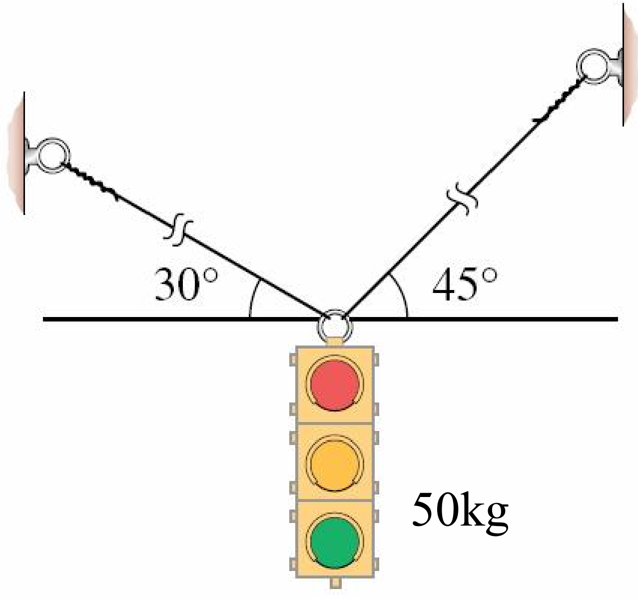
(เวกเตอร์ส่วนประกอบของเวกเตอร์ u ซึ่งตั้งฉากกับเวกเตอร์ v)





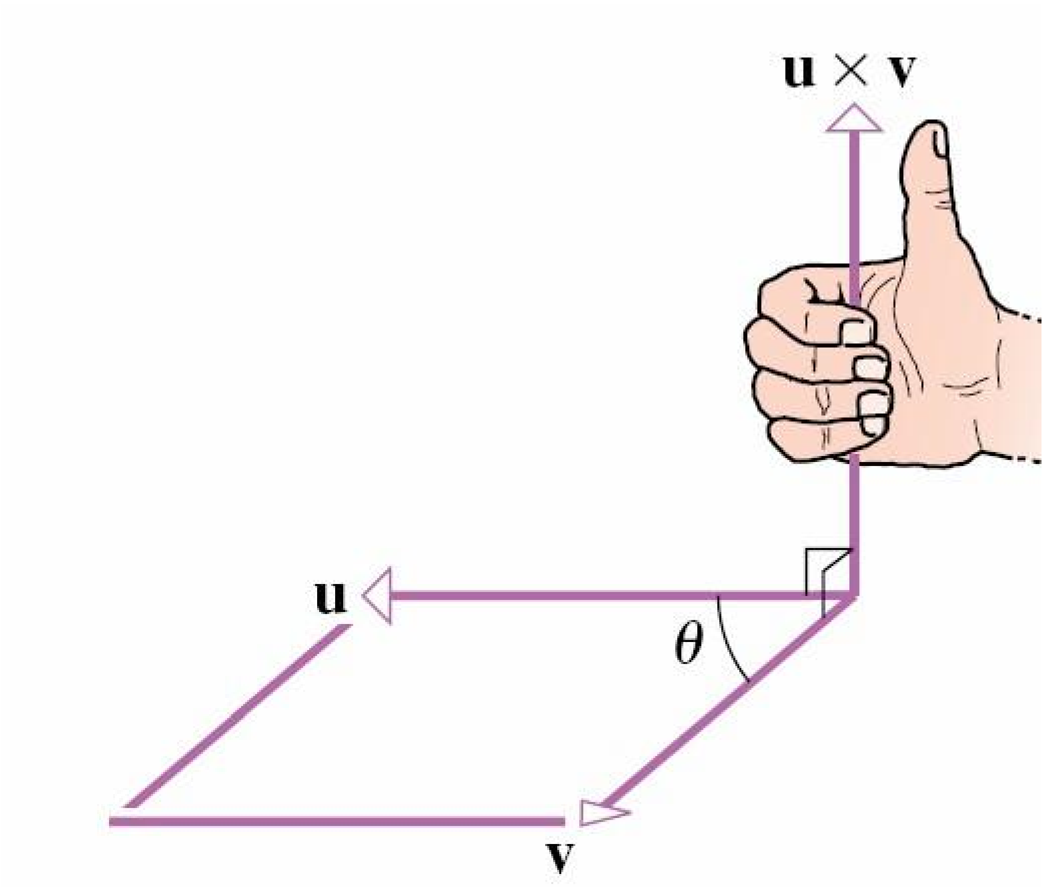
(b)

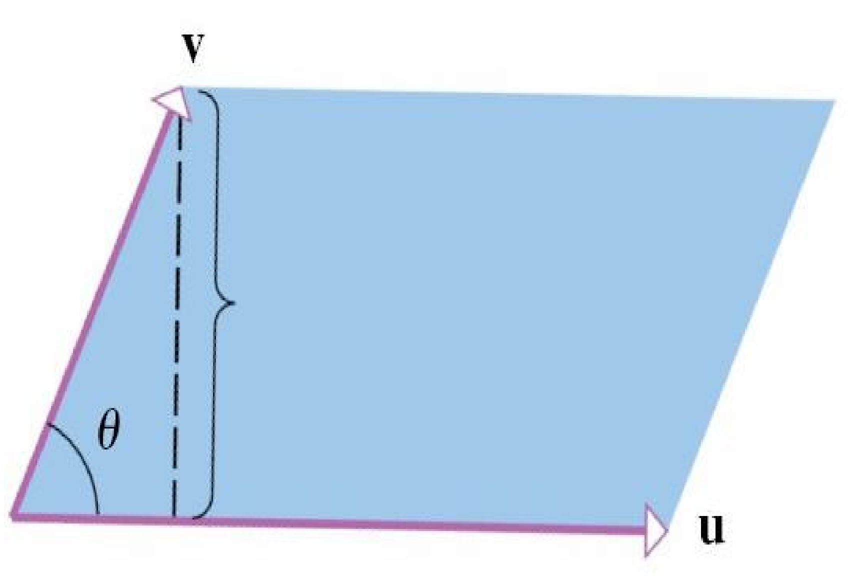

y
x
$F_2 =$
80.0 N
$F_1 =$
120 N
75.0°
60.0°



ถ้าระบบนี้เป็นระบบสมดุล
จงหาแรงตึงของเส้นเชือกทั้งสองเส้น

แนวคิด





v
θ
u

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (หรือ ผลคูณไขว้) $u \times v$

Vector Product (or Cross Product)

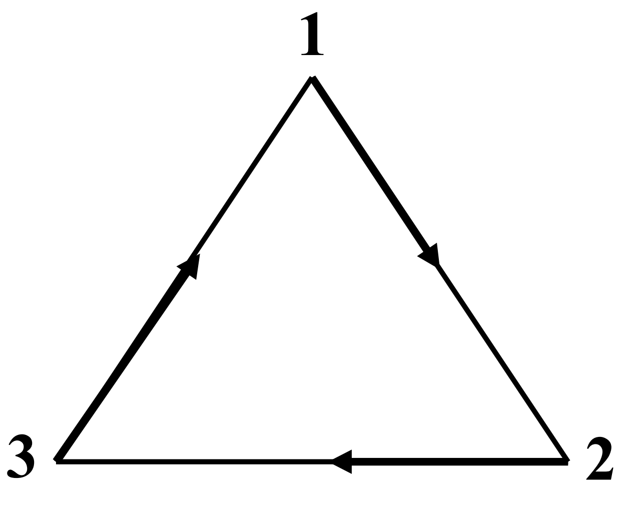
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ หมายถึง เวกเตอร์อีกเวกเตอร์หนึ่งซึ่งตั้งฉากกับเวกเตอร์ u และv ตามทิศทางของกฎ<u>*มือขวา*</u> ที่ได้ชื่อว่า<u>***ผลคูณเชิงเวกเตอร์***</u> เพราะว่าผลลัพท์ที่ได้จากการคำนวณเป็นเวกเตอร์ และที่บางครั้งได้ชื่อว่า<u>***ผลคูณไขว้***</u> เพราะเรามักใช้สัญลักษณ์กากบาท หรือ ไขว้ (“$\times$”) ในการสื่อว่าเป็นการคูณประเภทนี้

การหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ u และ v

ถ้า $\mathbf{u}=<u_1, u_2, u_3>$ และ $\mathbf{v}=<v_1, v_2, v_3>$

$$\mathrm{u}\times\mathrm{v} = < u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1 >$$

$$= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathrm{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathrm{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathrm{k}$$



$$\mathrm{u} \times \mathrm{v} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{v} \times \mathrm{u} = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

ความสัมพันธ์ระหว่าง $u \times v$ และ $v \times u$

$$\left| \mathbf{u} \times \mathbf{v} \right|$$

$$u \times u$$

จงหา

(1) $i \times i =$, $i \times j =$, $i \times k =$

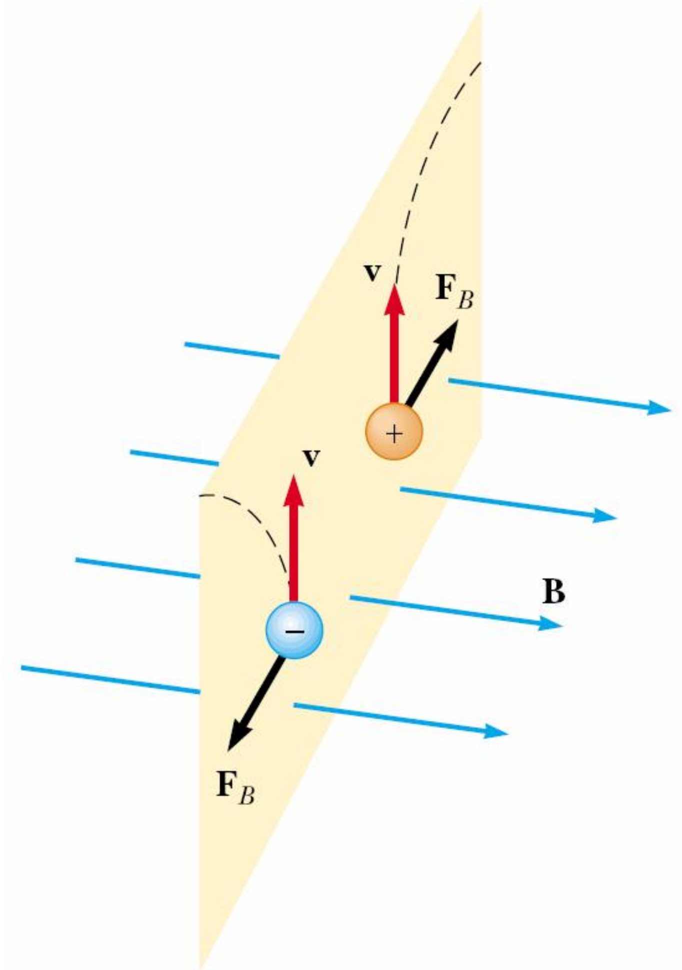
(2) $j \times i =$, $j \times j =$, $j \times k =$

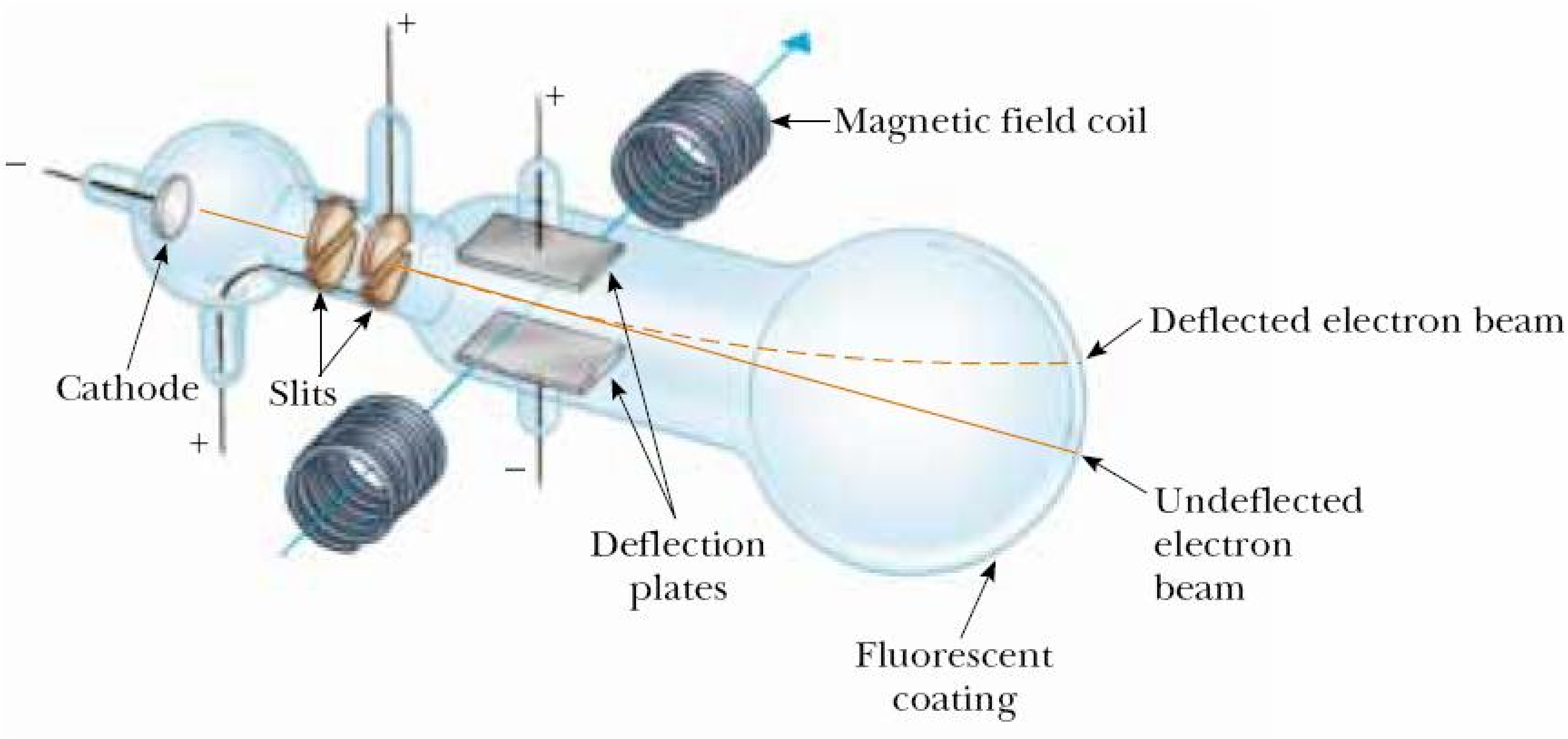
(3) $k \times i =$, $k \times j =$, $k \times k =$

ถ้า **u**=<1,2,-2> และ **v**=<3,0,1> จงหา

$u \times v$ $\qquad$ $v \times u$

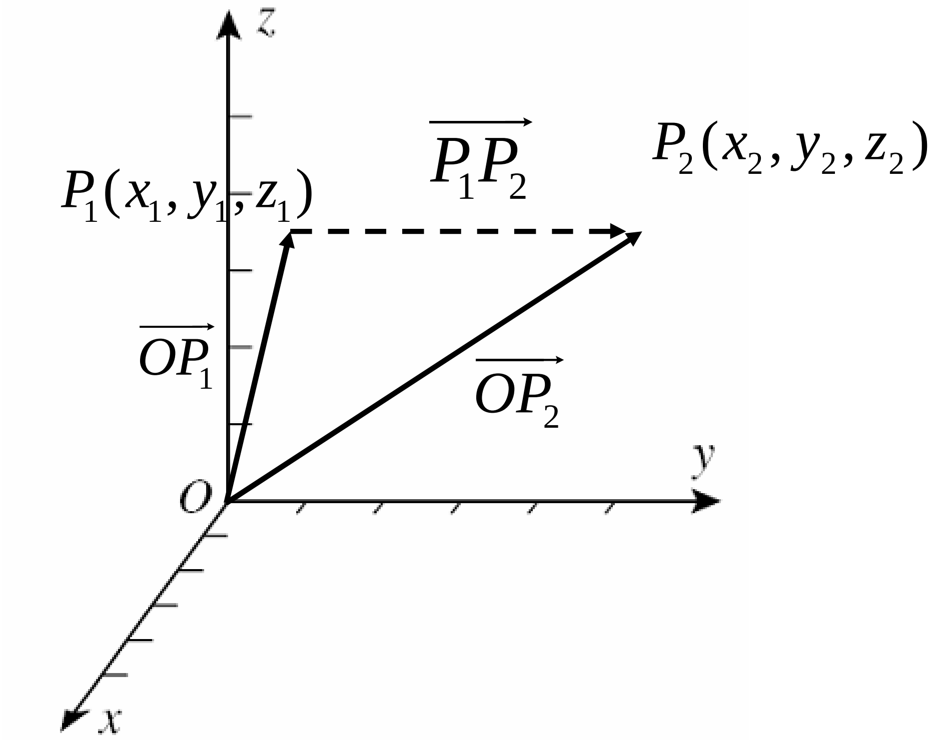
$$\mathbf{F}_B = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$




+
+
−
Magnetic field coil
Deflected electron beam
Cathode
Slits
+
−
Deflection plates
Undeflected electron beam
Fluorescent coating

การหาเวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางเดียวกับทิศทางจากจุด P_1 ไปยังจุด P_2 และมีขนาดเท่ากันกับระยะทางระหว่างจุด P_1 และจุด P_2

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathrm{i} + (y_2 - y_1)\mathrm{j} + (z_2 - z_1)\mathrm{k}$$



ทฤษฎีบทของผลคูณเชิงเวกเตอร์

ถ้า u,v และ w เป็นเวกเตอร์ และ α เป็นสเกลาร์ใดๆ แล้ว

(1) $u \times v = -(v \times u)$

(2) $u \times (v+w) = u \times v + u \times w$

(3) $(u+v) \times w = u \times w + v \times w$

(4) $\alpha(u \times v) = (\alpha u) \times v = u \times (\alpha v)$

(5) $u \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times u = \mathbf{0}$

(6) $u \times u = \mathbf{0}$

ถ้า **u**=<3,5,-4> และ **v**=<**-2**,0,1> จงหา

$v \times u$

$v \bullet u$

มุมระหว่าง **u** และ **v**

$(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$ **จริงหรือไม่?**

$$u \bullet (u \times v) = ?$$

$$v \bullet (u \times v) = ?$$

$\mathrm{u} \times \mathrm{v} = \mathbf{0}$ เมื่อใด

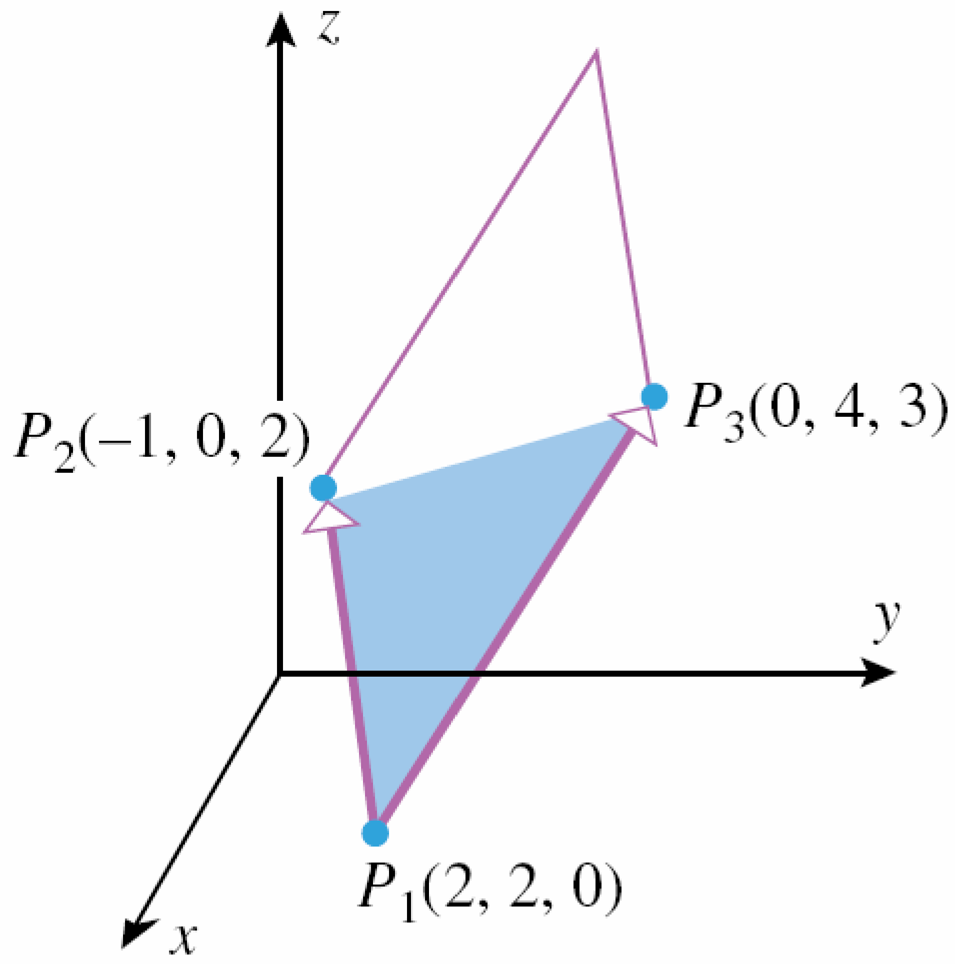
จงหาเวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับระนาบที่ผ่านจุด

(2,2,0) (-1,0,2) (0,4,3)

<u>หมายเหตุ</u> เวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับระนาบมี***<u>หลาย</u>***เวกเตอร์

จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด

(2,2,0) (-1,0,2) (0,4,3)



z
y
x
P2(−1, 0, 2)
P3(0, 4, 3)
P1(2, 2, 0)

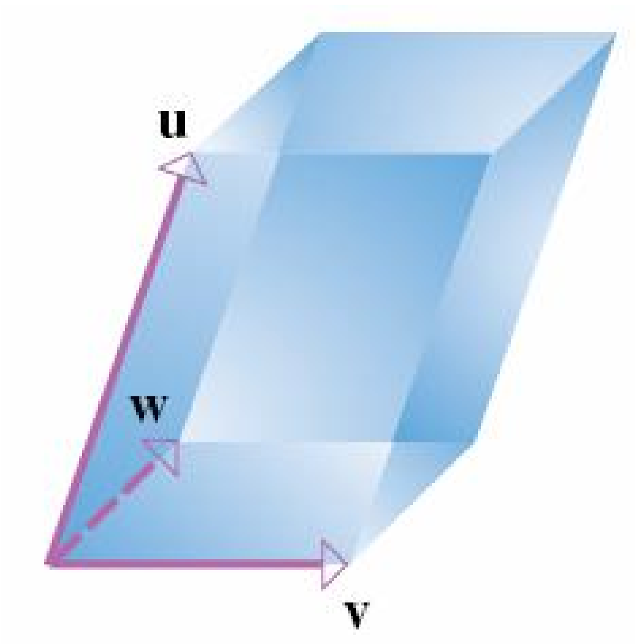
จงหาค่าต่อไปนี้

$i\times(i+j+k)$ $\quad$ $j\times(i+j+k)$ $\quad$ $k\times(i+j+k)$

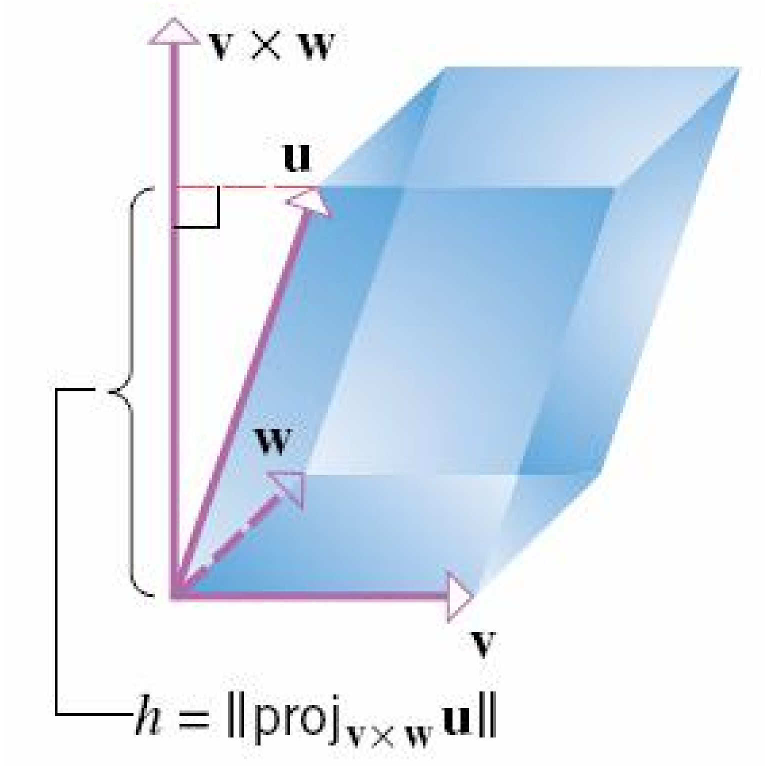
$$u \bullet (v \times w) = ?$$

$$\mathrm{u} \bullet (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

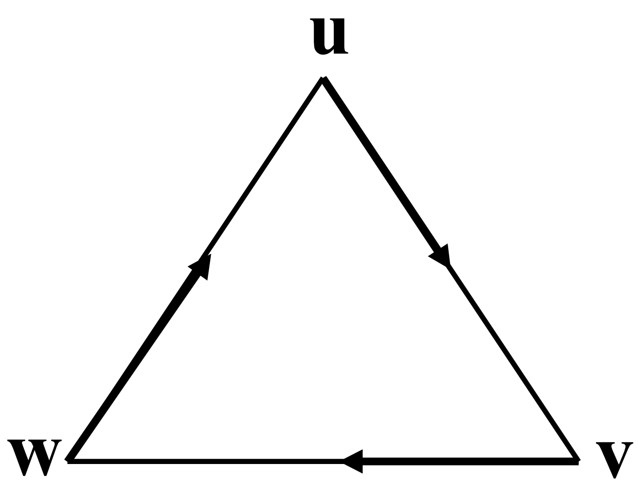
$$\left|\mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})\right|$$



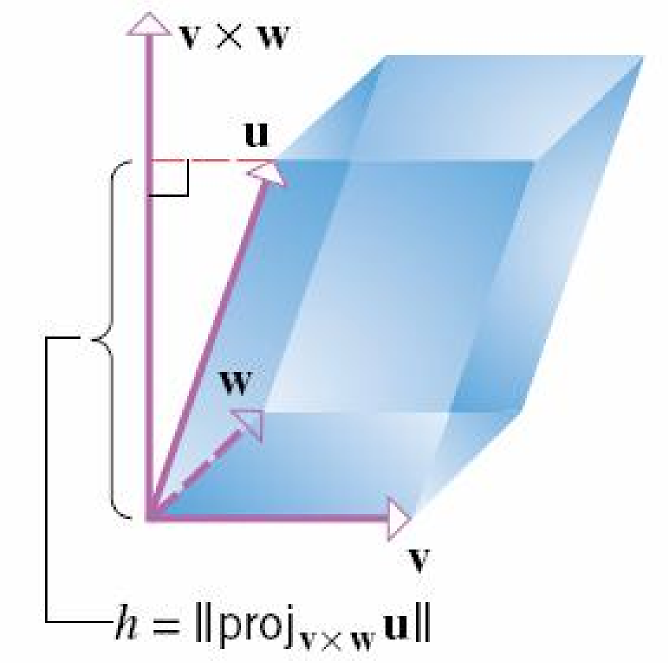
$$\left| \mathrm{u} \bullet (\mathrm{v} \times \mathrm{w}) \right|$$



$$\mathrm{u}\bullet(\mathrm{v}\times\mathrm{w})=\mathrm{v}\bullet(\mathrm{w}\times\mathrm{u})=\mathrm{w}\bullet(\mathrm{u}\times v)$$



<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า u,v,w เป็นเวกเตอร์ซึ่งไม่เป็นเวกเตอร์ 0 ในระบบ 3 มิติ แล้ว ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelepiped) ซึ่งมีเวกเตอร์ u,v และ w เป็นส่วนประกอบของด้าน จะมีปริมาตร $|u \bullet (v \times w)|$ ลูกบาศก์หน่วย



และ $u \bullet (v \times w) = 0$ ก็ต่อเมื่อ

u,v และ w อยู่ในระนาบเดียวกัน

จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมีเวกเตอร์ $u=\langle 1,2,-1\rangle$, $v=\langle -2,0,3\rangle$, $w=\langle 0,7,-4\rangle$ เป็นส่วนประกอบ

ถ้า $u \bullet (v \times w) = 3$

จงหา $u \bullet (w \times v)$

$(v \times w) \bullet u$

$w \bullet (u \times v)$

$v \bullet (u \times w)$

$(u \times w) \bullet v$

$v \bullet (w \times w)$

จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ต่อไปนี้อยู่ในระนาบเดียวกันหรือไม่

1) $\mathbf{u}=\langle 1,-2,1\rangle$, $\mathbf{v}=\langle 3,0,-2\rangle$, $\mathbf{w}=\langle 5,-4,0\rangle$

2) $\mathbf{u}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{v}=4\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{w}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$

3) $\mathbf{u}=\langle 4,-8,1\rangle$, $\mathbf{v}=\langle 2,1,-2\rangle$, $\mathbf{w}=\langle 3,-4,12\rangle$