103-102 CALCULUS II ส่วนที่ 2

เนื้อหาวิชาในส่วน CALCULUS II ส่วนที่ 2 เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตใน 3 มิติ เช่น เส้นตรง, ระนาบ, เวกเตอร์ (Vectors) ใน 3 มิติ และ การประยุกต์ใช้เรื่องอนุพันธ์ในการพิจารณารูปทรงใน 3 มิติ, การเคลื่อนที่ใน 3 มิติ และฟังก์ชันหลายตัวแปร

CALCULUS II

Three dimensional space

Scalar Product and Vector Product

Lines and Planes in space

Vector-Valued Functions and Space curves

Arc Length and the Unit Tangent Vector

Functions of many variables

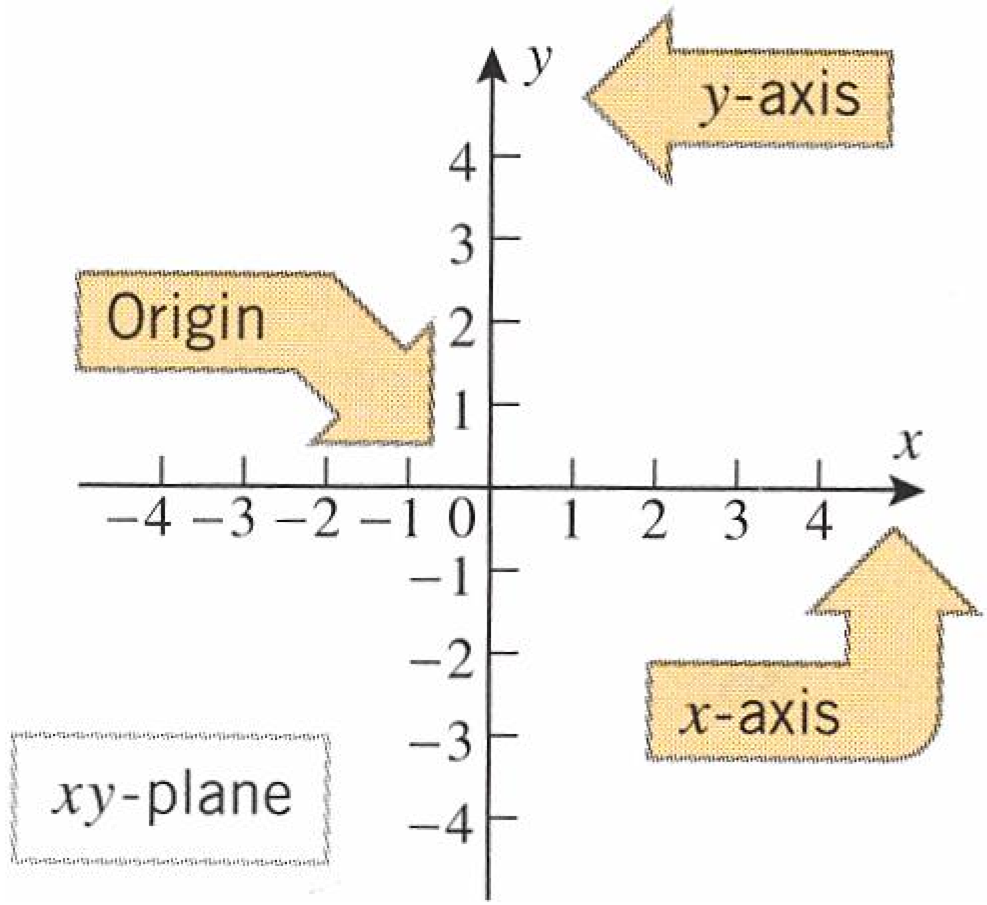
Partial Derivatives and Chain Rule

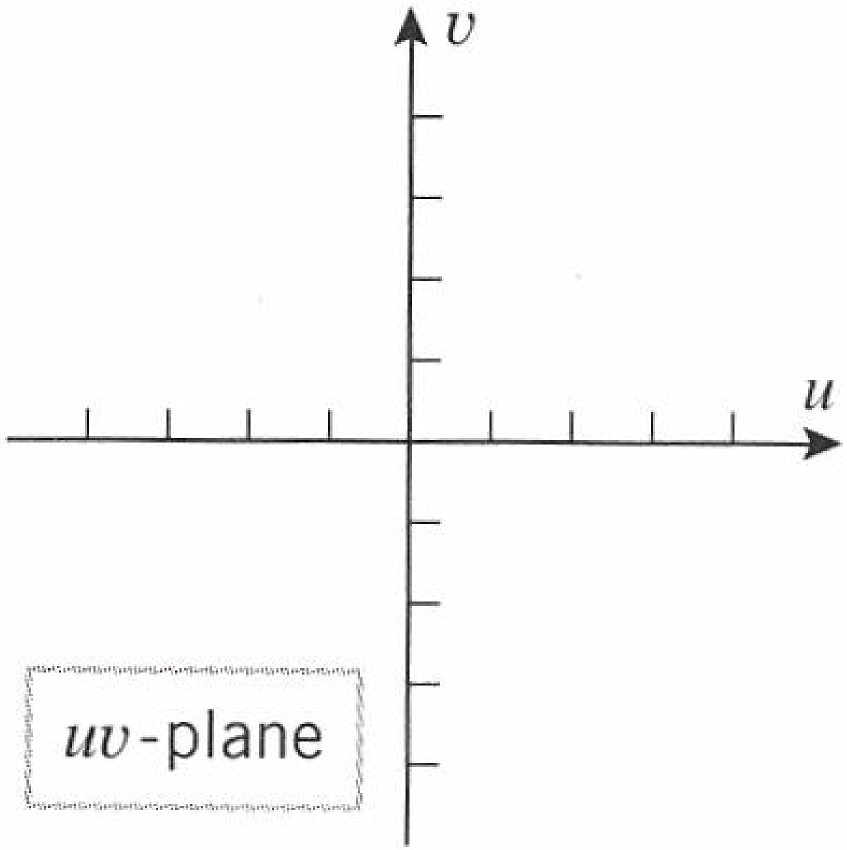
Directional Derivatives,

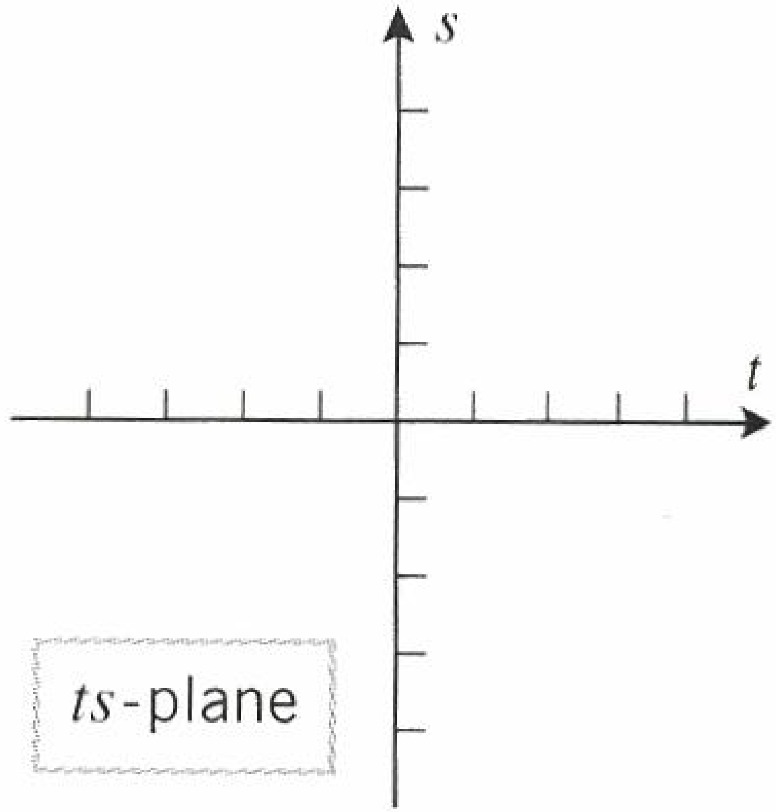
Gradient Vectors and Tangent Planes

Extreme values and Saddle Points

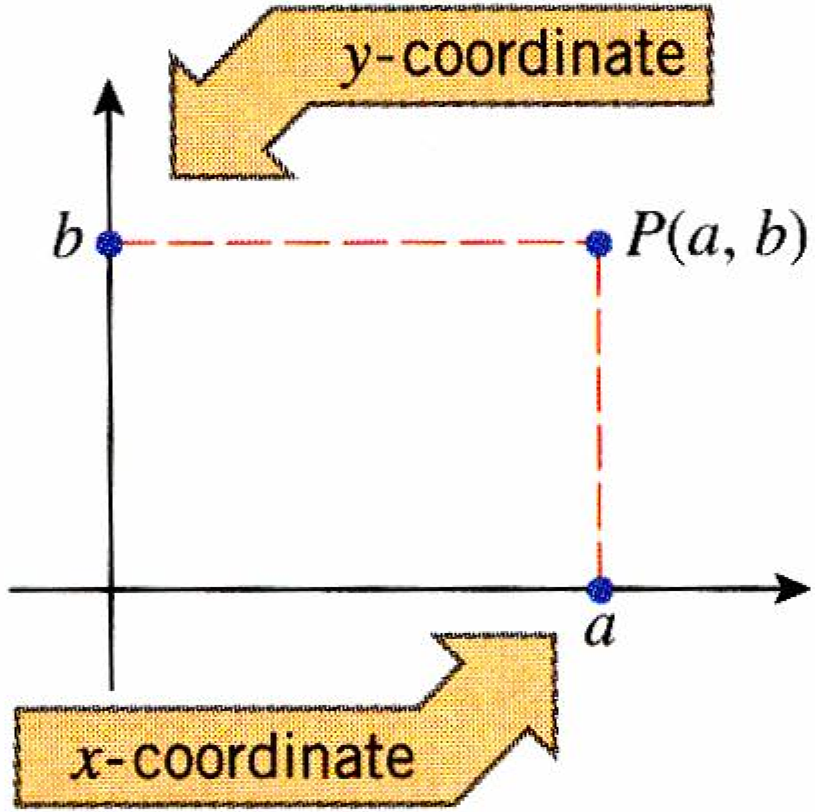
ระบบพิกัดฉาก (2 มิติ)

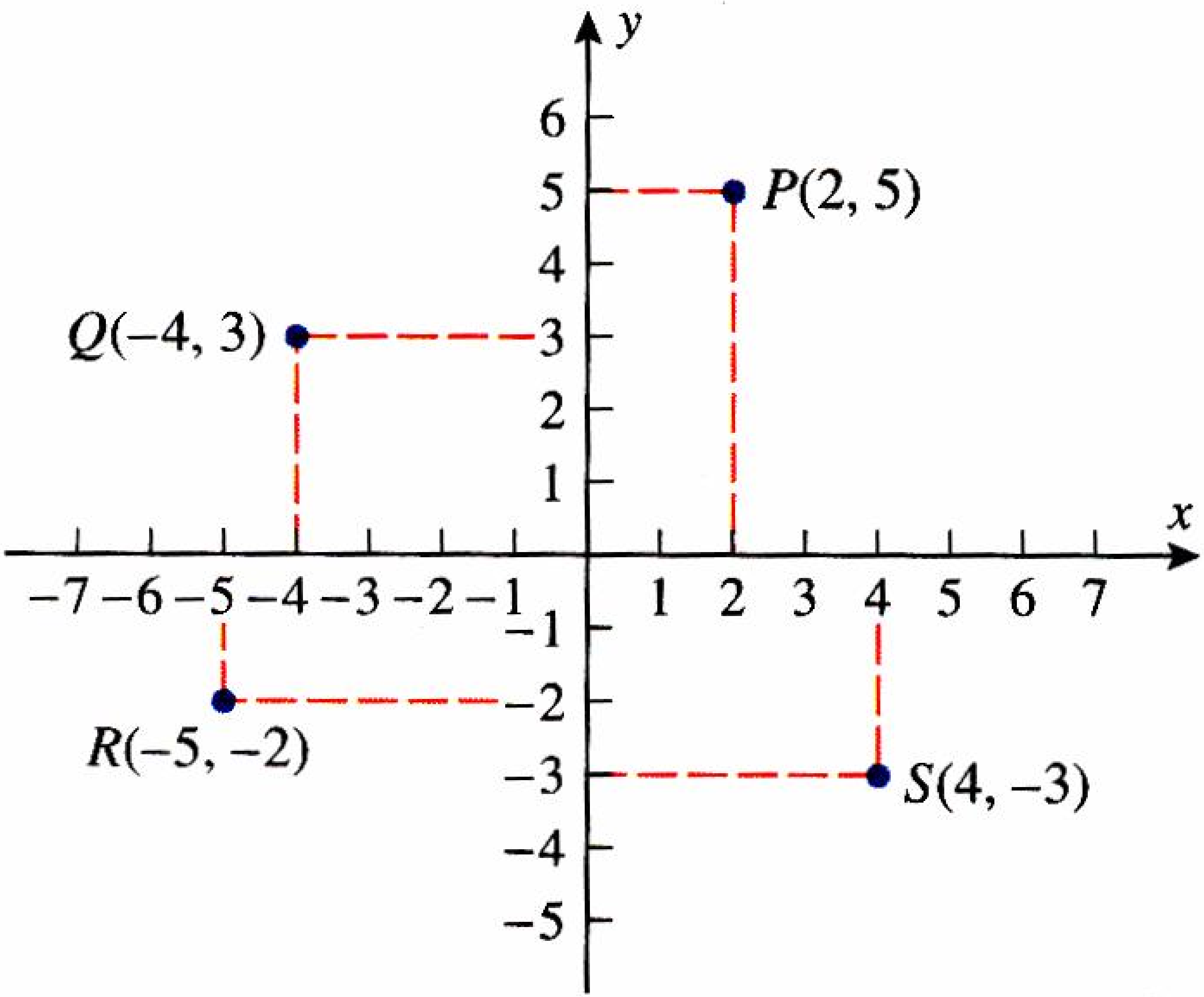



v
u
uv-plane


s
t
ts-plane

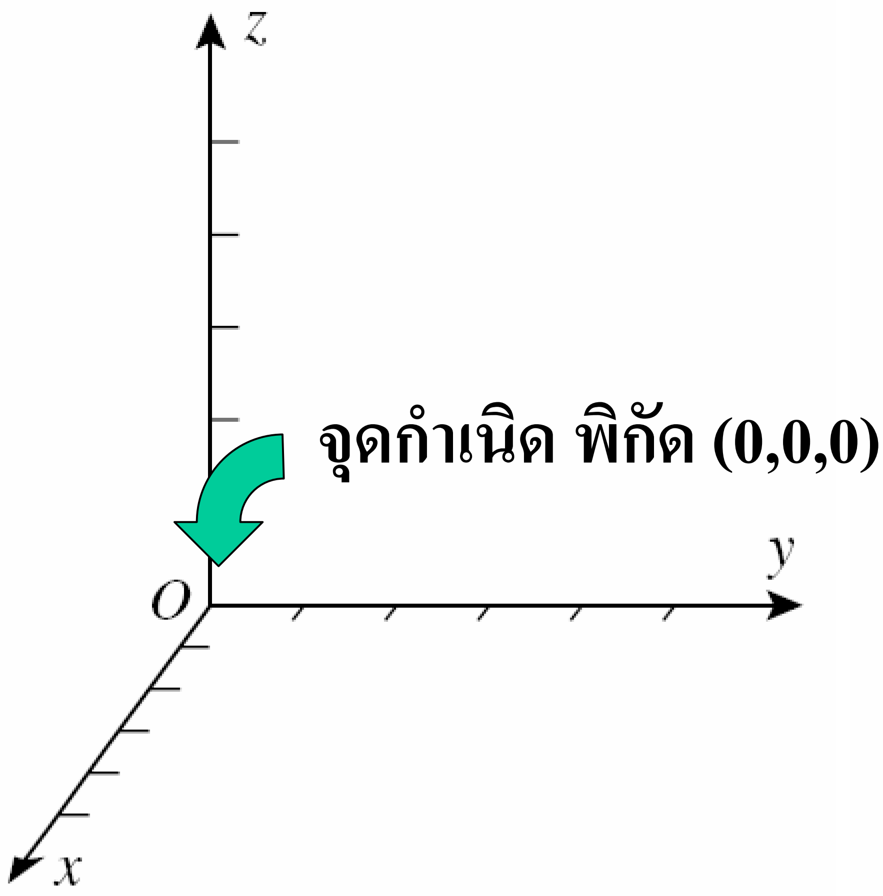
$$(a, b)$$

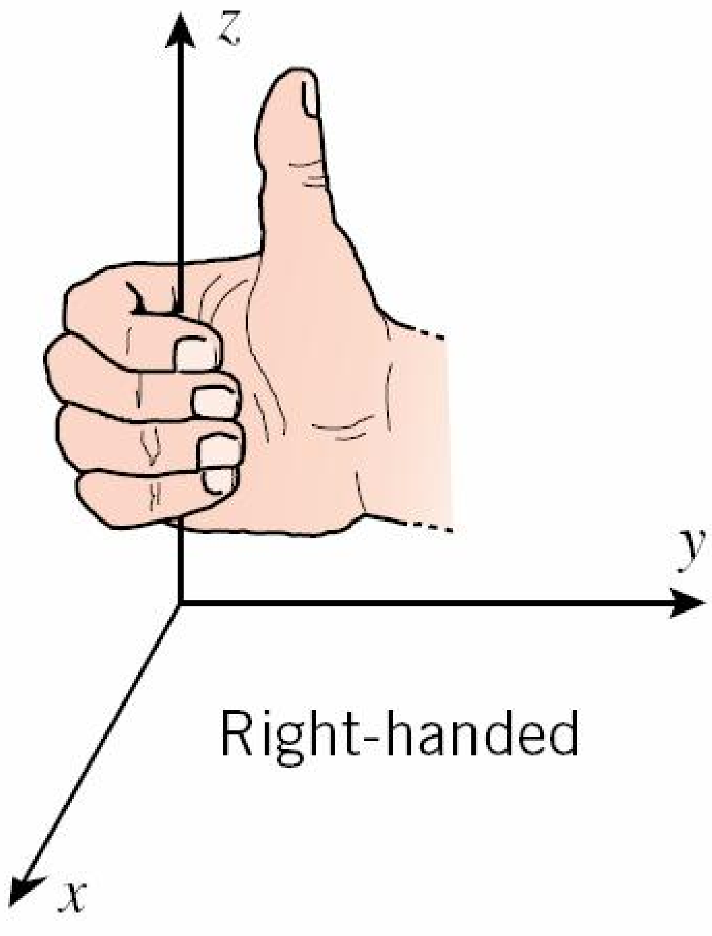


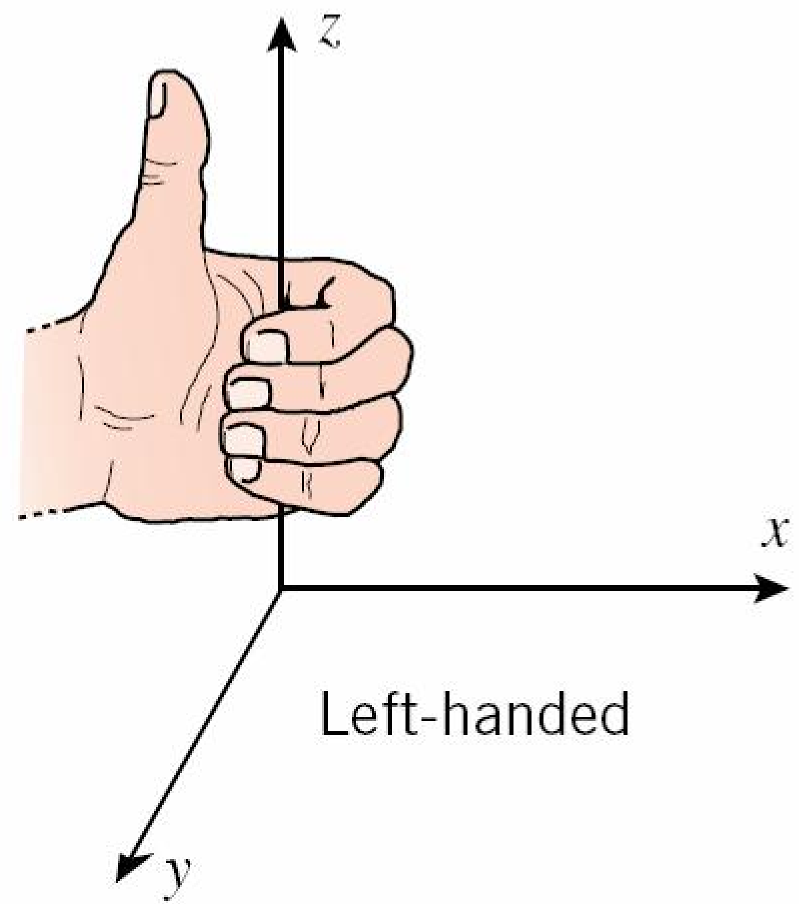

y
x
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1
1 2 3 4 5 6 7
P(2, 5)
Q(−4, 3)
R(−5, −2)
S(4, −3)

ระบบพิกัดคาร์ทีเซียน (พิกัดฉาก)

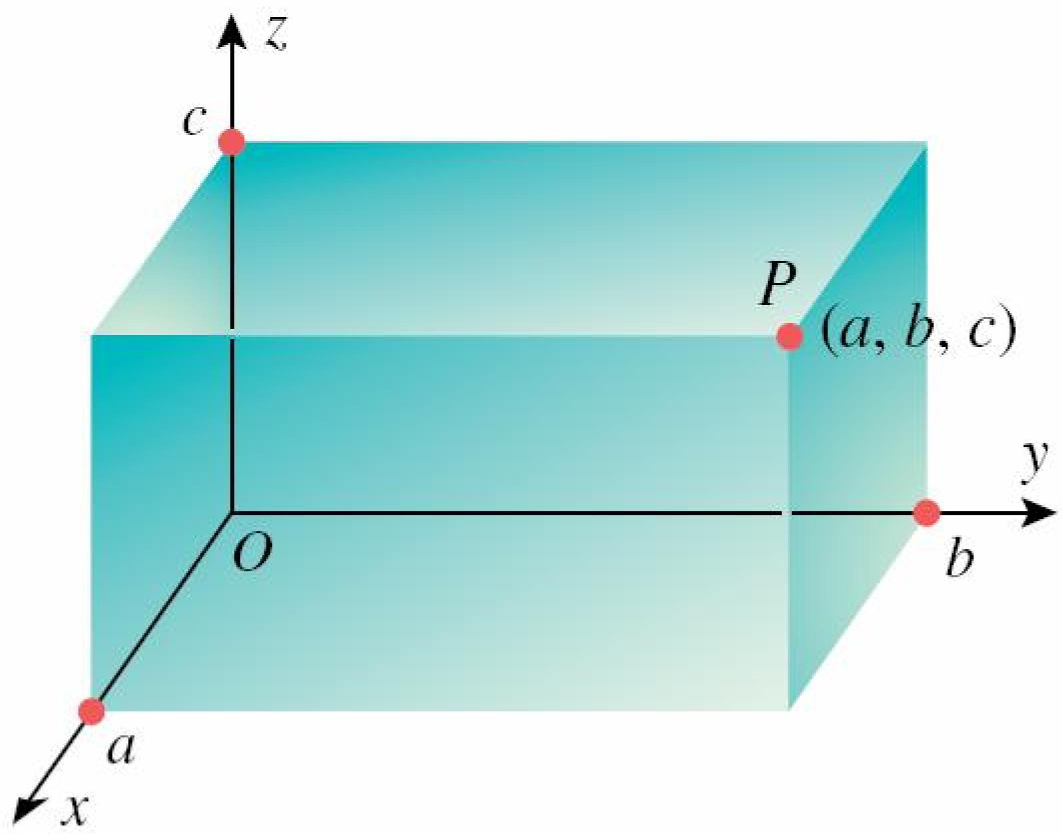
Cartesian (Rectangle) Coordinate



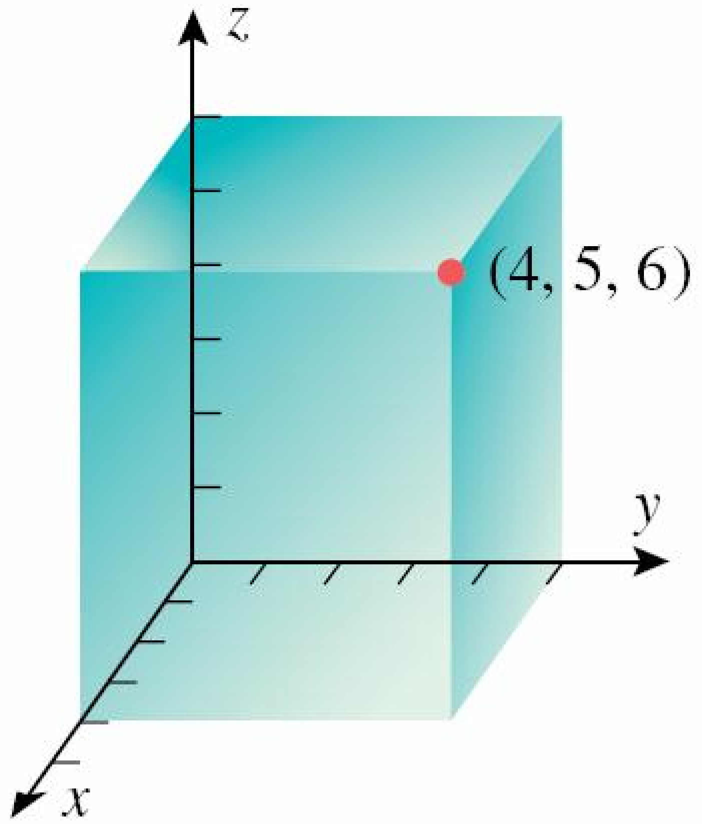



z
x
y
Left-handed

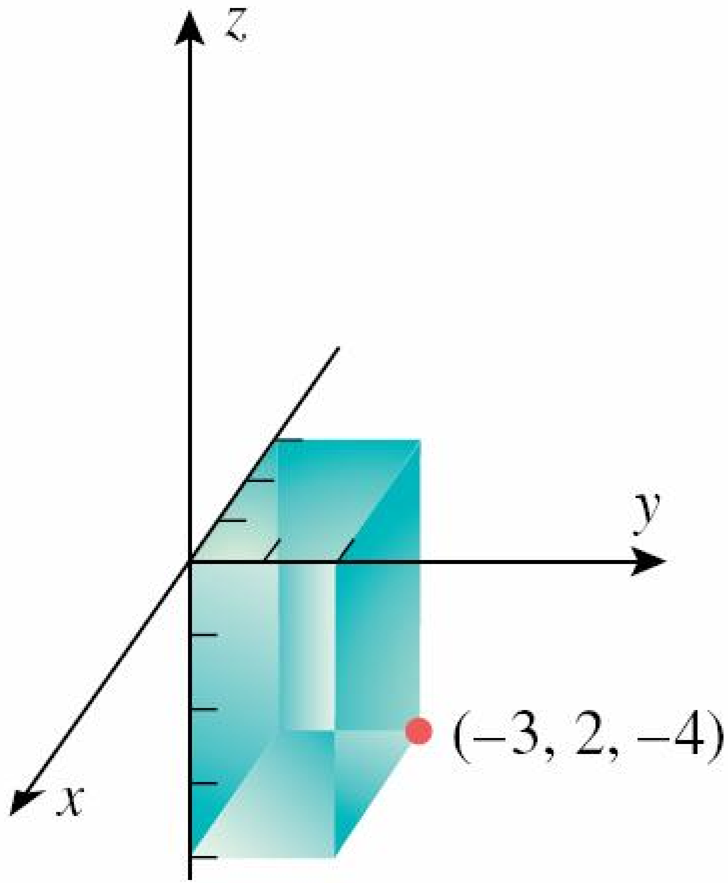
(a, b, c)



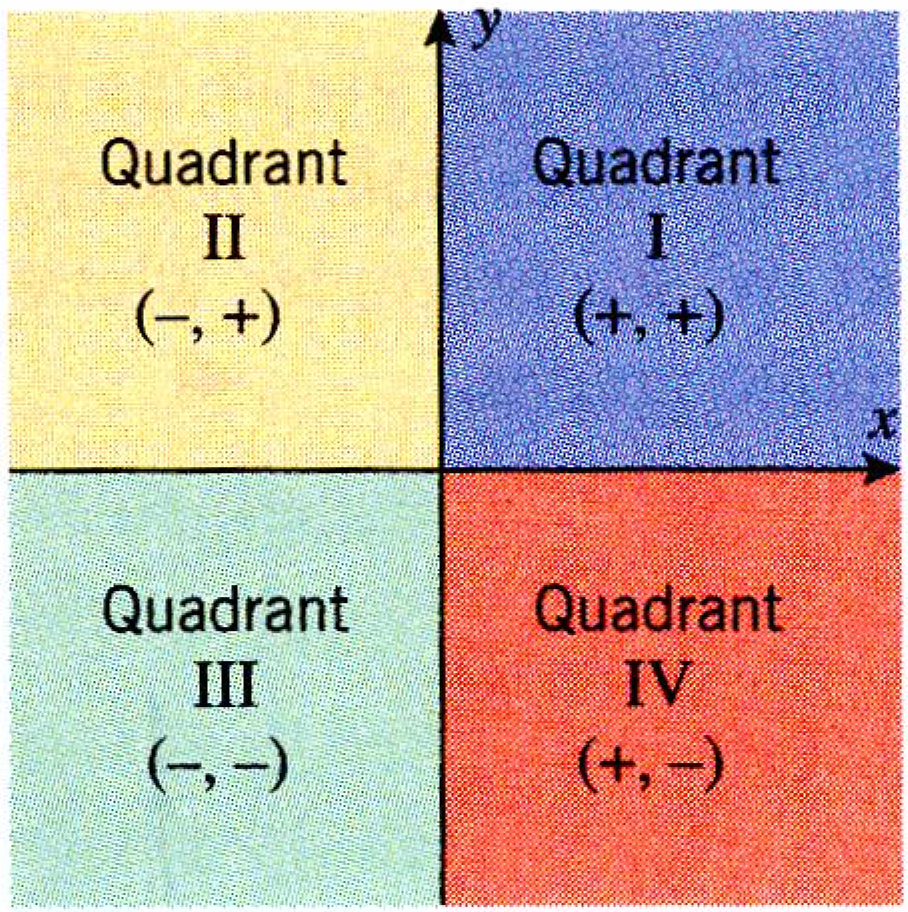
(4, 5, 6)



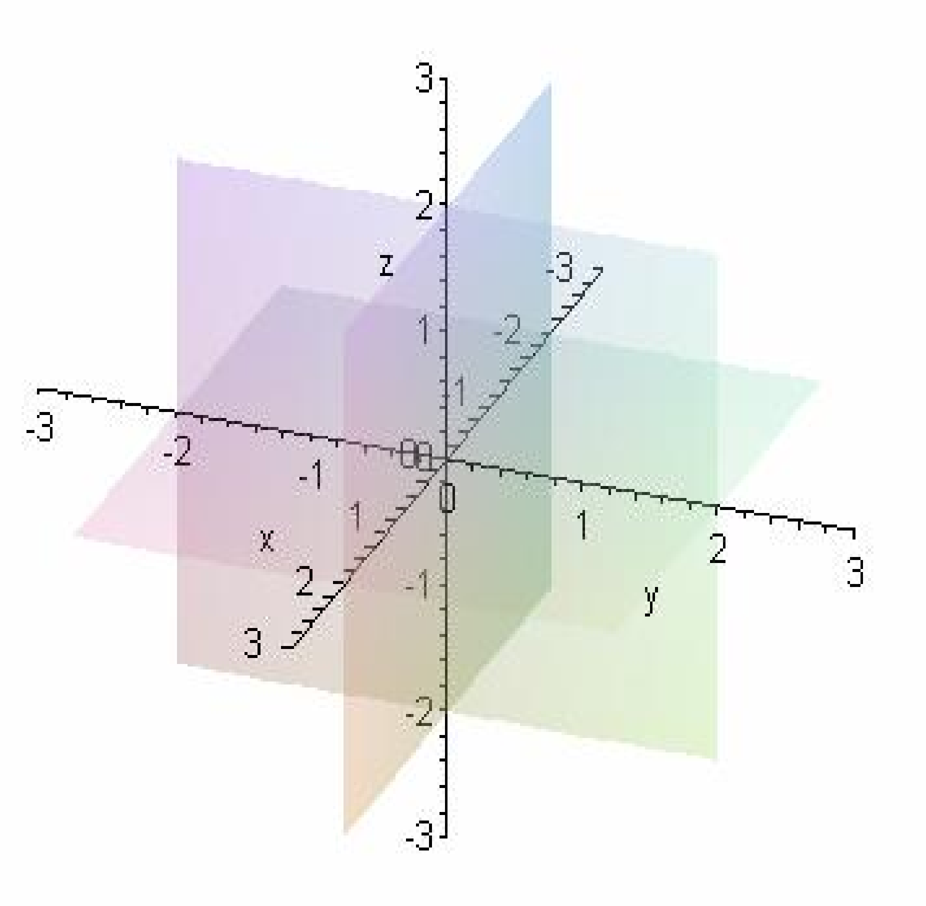
$(-3, 2, -4)$



จตุภาค (Quadrant)



อัฐภาค (Octant)



ในทำนองเดียวกันกับการพิจารณาจตุภาค เราสามารถพิจารณาพิกัดฉากใน 3 มิติ เป็น 8 ส่วน (Oct = อัฐ = 8)

อัฐภาคที่หนึ่ง (1st Octant) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

อัฐภาคที่สอง (2nd Octant) $x \leq 0, y \geq 0, z \geq 0$

อัฐภาคที่สาม (3rd Octant) $x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0$

อัฐภาคที่สี่ (4th Octant) $x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0$

อัฐภาคที่ห้า (5th Octant) $x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0$

อัฐภาคที่หก (6th Octant) $x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0$

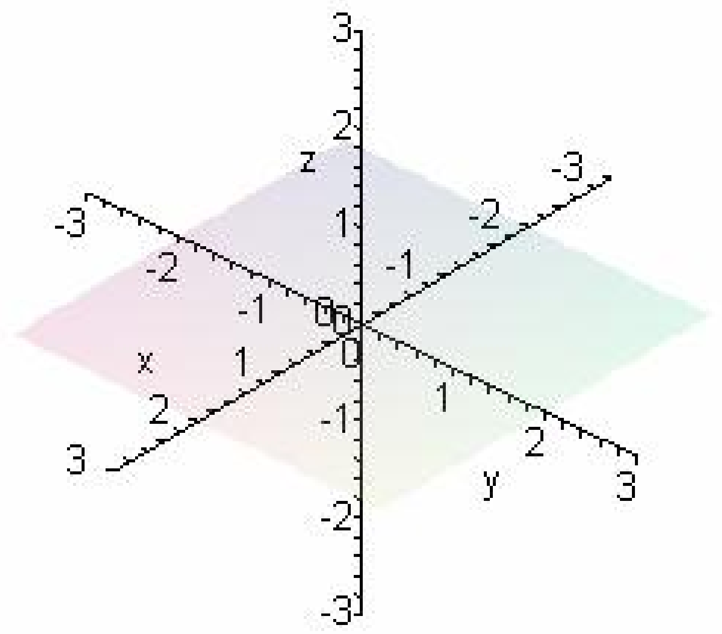
อัฐภาคที่เจ็ด (7th Octant) $x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$

อัฐภาคที่แปด (8th Octant) $x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0$

ระนาบ *xy* (*xy*-plane)

ระนาบ *xy* ประกอบด้วยจุดต่างๆ ซึ่งอยู่ในรูป

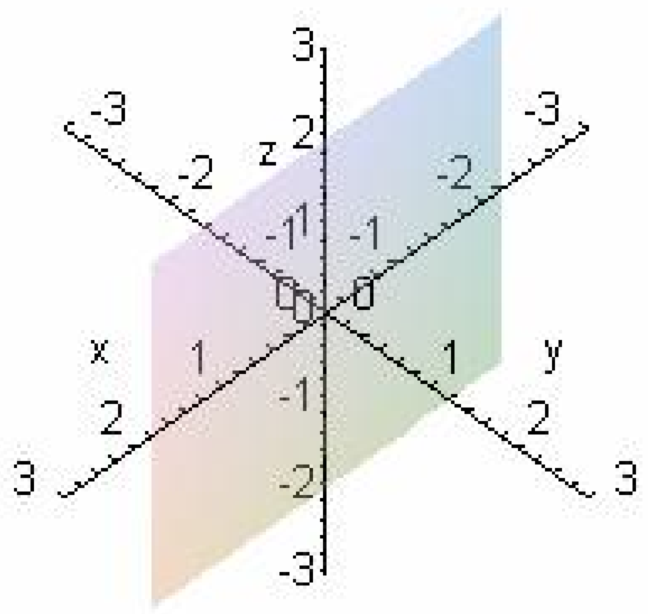
$(x,y,0)$



ระนาบ *xz* (*xz*-plane)

ระนาบ *xz* ประกอบด้วยจุดต่างๆ ซึ่งอยู่ในรูป

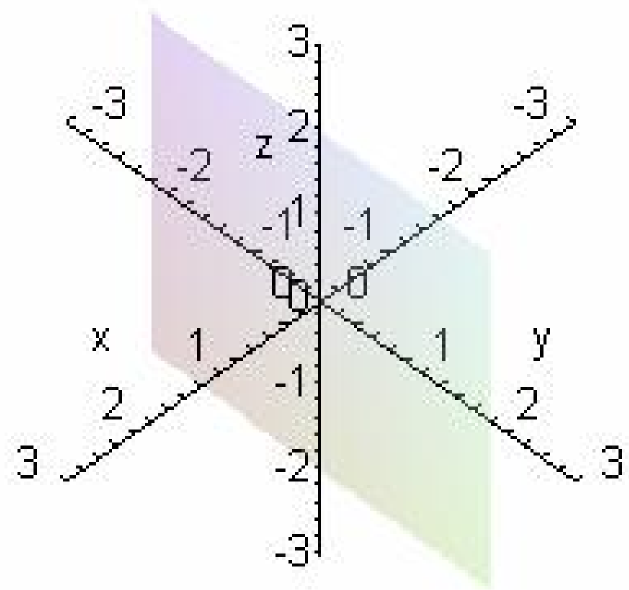
$(x,0,z)$



ระนาบ *yz* (*yz*-plane)

ระนาบ *yz* ประกอบด้วยจุดต่างๆ ซึ่งอยู่ในรูป

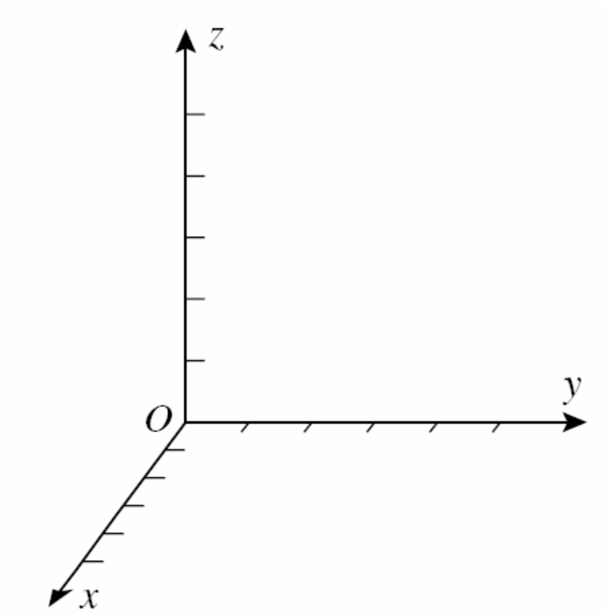
$(0,y,z)$



แกน x (x-axis)

แกน x ประกอบด้วยจุดต่างๆ ซึ่งอยู่ในรูป

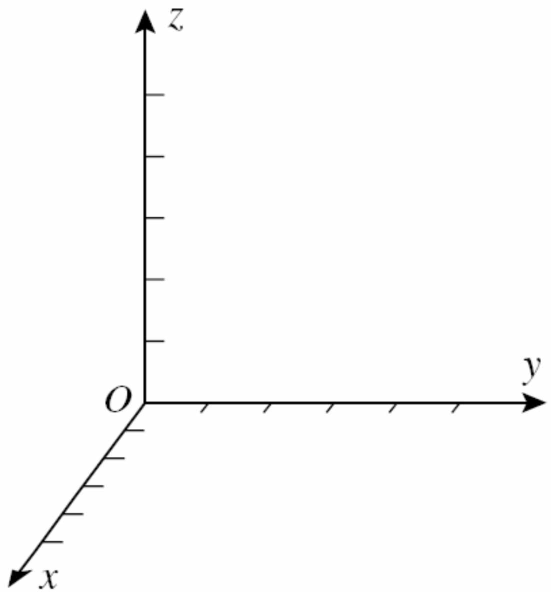
$$(x,0,0)$$



แกน y (y-axis)

แกน y ประกอบด้วยจุดต่างๆ ซึ่งอยู่ในรูป

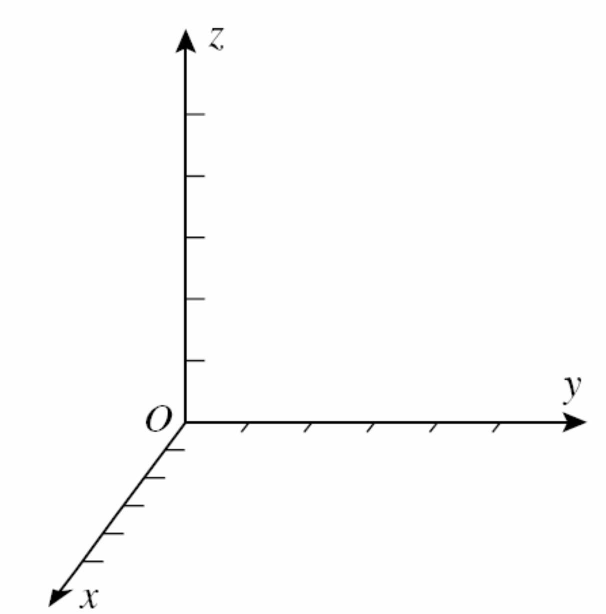
$(0,y,0)$



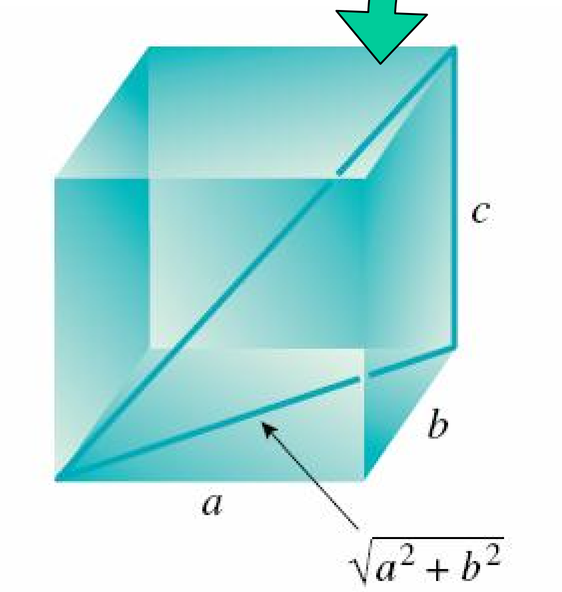
แกน *z* (*z*-axis)

แกน *z* ประกอบด้วยจุดต่างๆ ซึ่งอยู่ในรูป

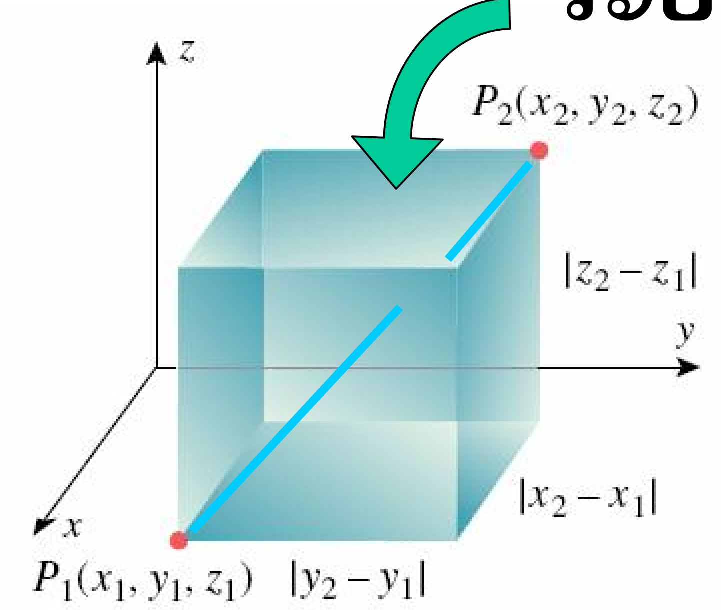
(0,0,z)



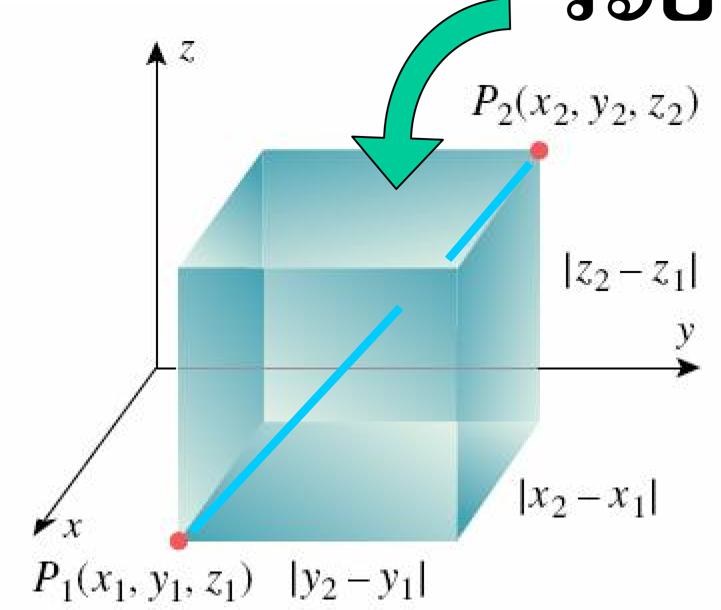
ความยาว =



ระยะทางระหว่างจุด 2 จุดคือ



ระยะทางระหว่างจุด 2 จุดคือ



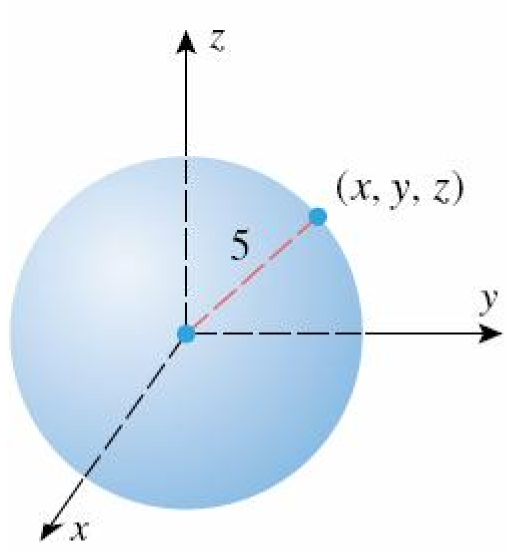
$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

จงหาระยะทางระหว่างจุด (2,3,-1) และ จุด (4,-1,3)

จงหาระยะทางระหว่างจุด (1,1, 3) และ จุด (-3,-1,-1)

จงพิจารณารูปทรงที่มีจุดต่างๆ ห่างจากจุดกำเนิด (0,0,0) เป็นระยะทาง 5 หน่วย



สมการทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด (0,0,0) และมีรัศมี 5 หน่วย คือ

สมการทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (x_0, y_0, z_0) และมีรัศมี r หน่วย คือ

สมการทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (x_0, y_0, z_0) และมีรัศมี r หน่วย คือ

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

สมการทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (-1,0,-4) และมีรัศมี 3 หน่วย คือ

สมการทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (-1,2,-3) และมีรัศมี 11 หน่วย คือ

จงหาว่าทรงกลมที่เป็นไปตามสมการต่อไปนี้

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z - 2 = 0$$

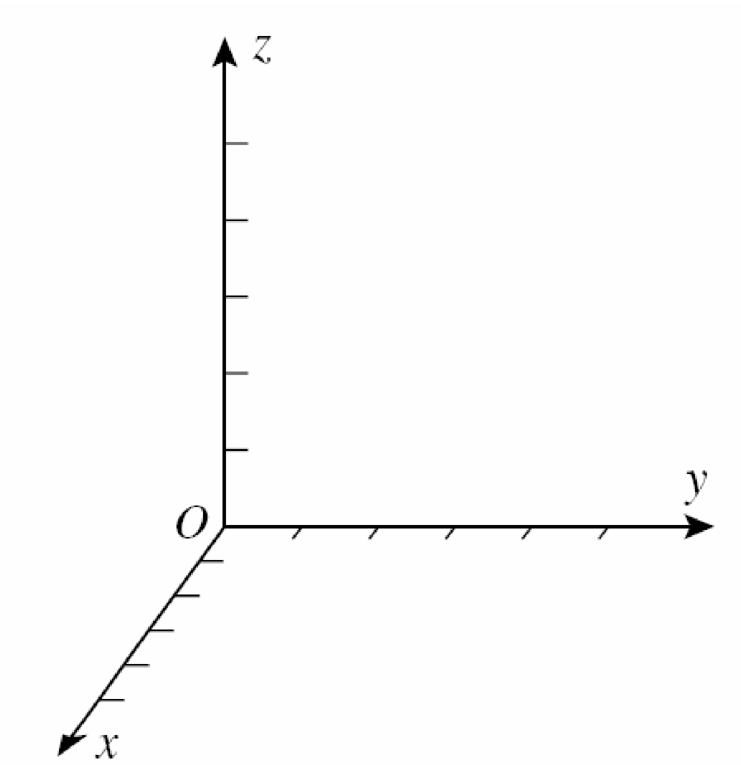
มีจุดศูนย์กลางที่ใด และมีรัศมีเท่าใด

จงวาดกราฟของสมการ $x^2 + z^2 = 1$

จงวาดกราฟของสมการ $z = \sin y$

จุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด

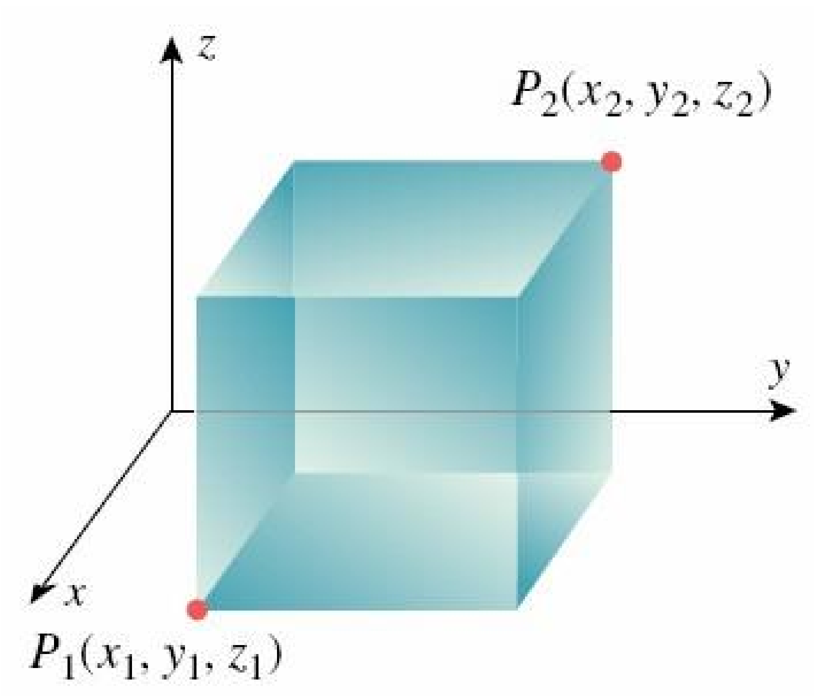
ในการหาจุดกึ่งกลาง M ซึ่งอยู่บนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมต่อระหว่างจุด 2 จุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ หาได้ดังนี้

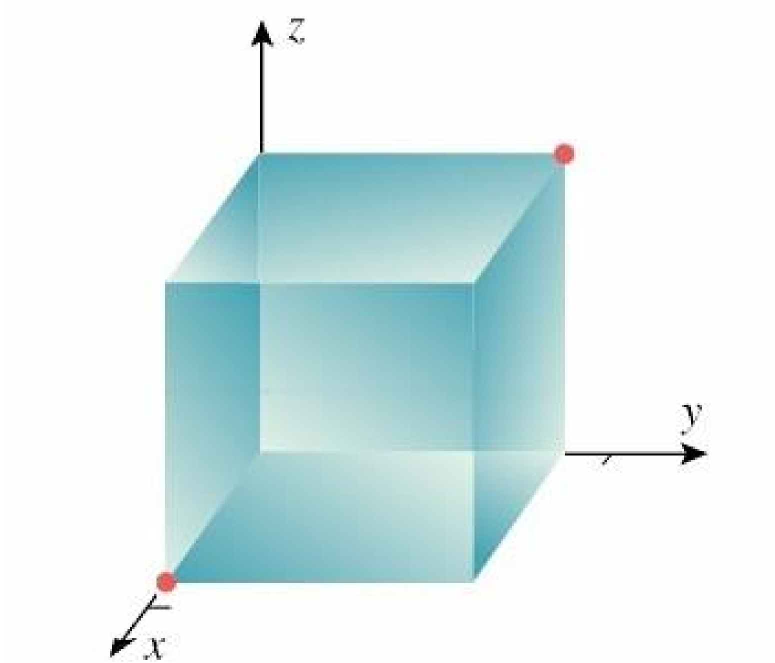


$$M = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$$

จงหาจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด

$P_1(3,-2,0)$ และ $P_2(7, 4, 4)$


z
$P_2(x_2, y_2, z_2)$
y
x
$P_1(x_1, y_1, z_1)$

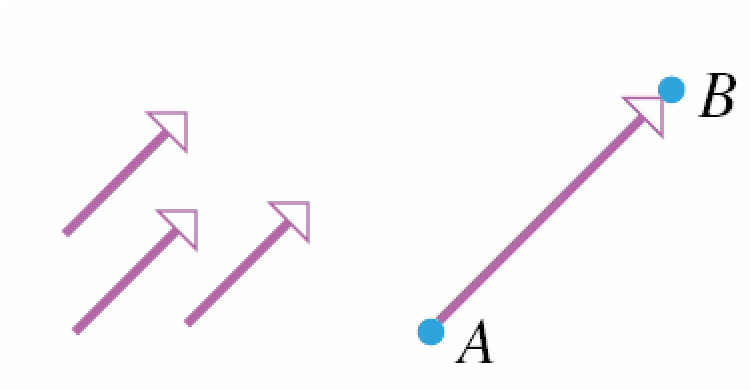

z
y
x

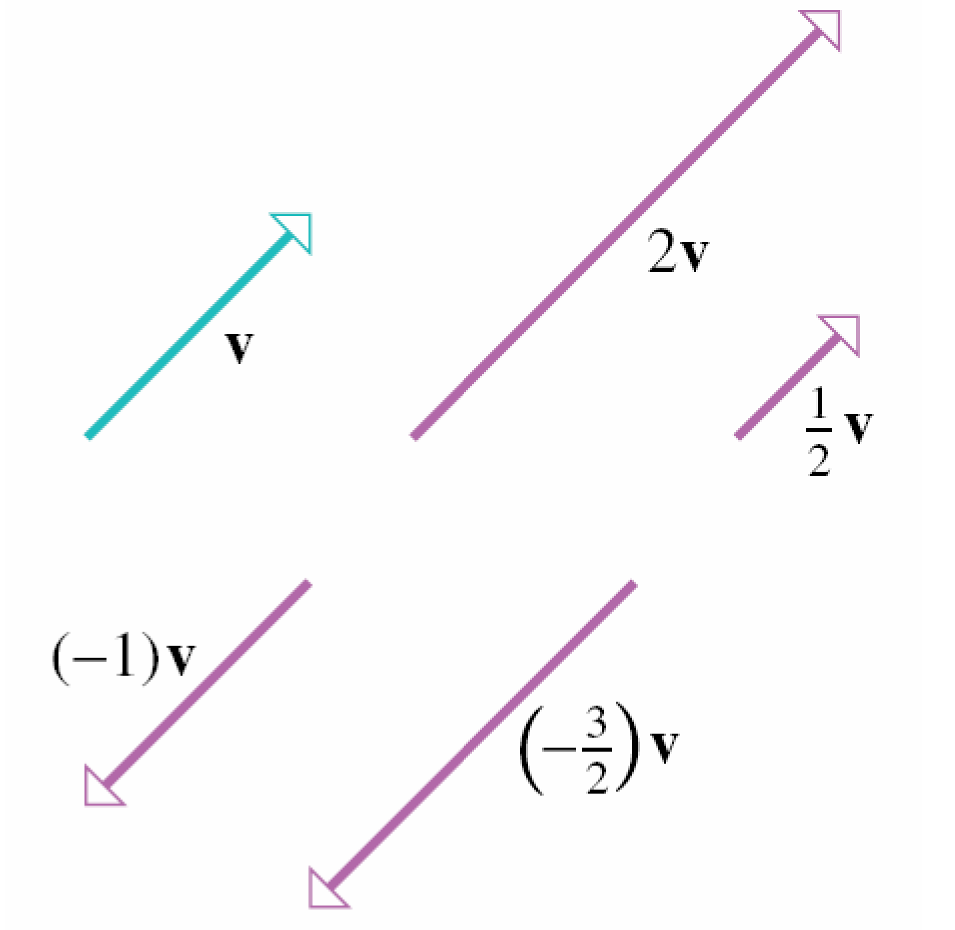
ในบางครั้ง เราพิจารณาแค่เพียง<u>ทิศทาง</u> และ <u>ระยะทาง</u> จากจุดที่สนใจจากจุดหนึ่ง ไปยังอีกจุดหนึ่ง เท่านั้น โดยที่เราไม่จำเป็นต้องทราบพิกัดที่แน่นอน นั่นเป็นแนวความคิดที่นำไปสู่การทำงานเรื่อง **เวกเตอร์ (Vector)**

ระวัง!!!

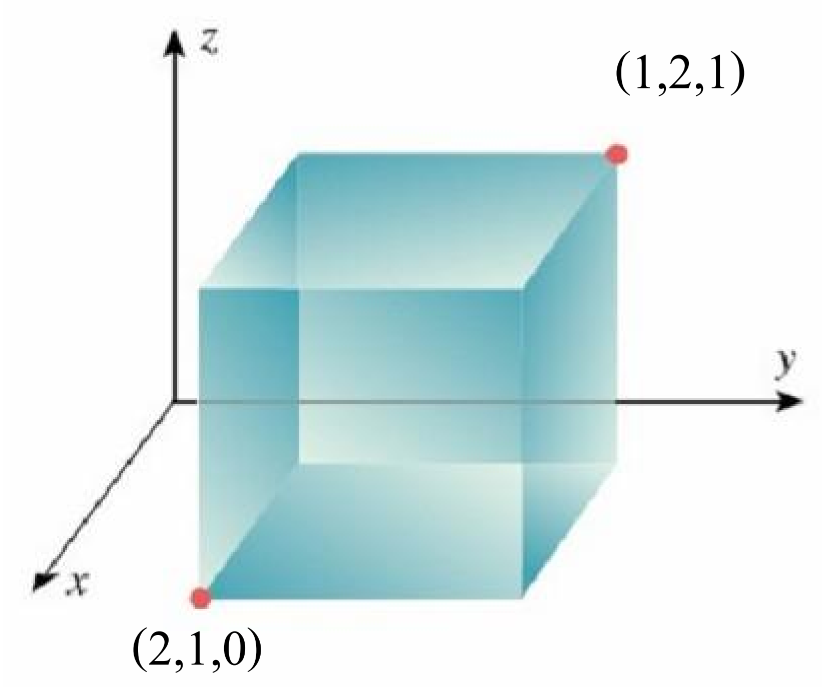
<u>เวกเตอร์</u> ไม่ใช่ปริมาณที่มีขนาดและทิศทางอย่างที่เราเข้าใจกัน

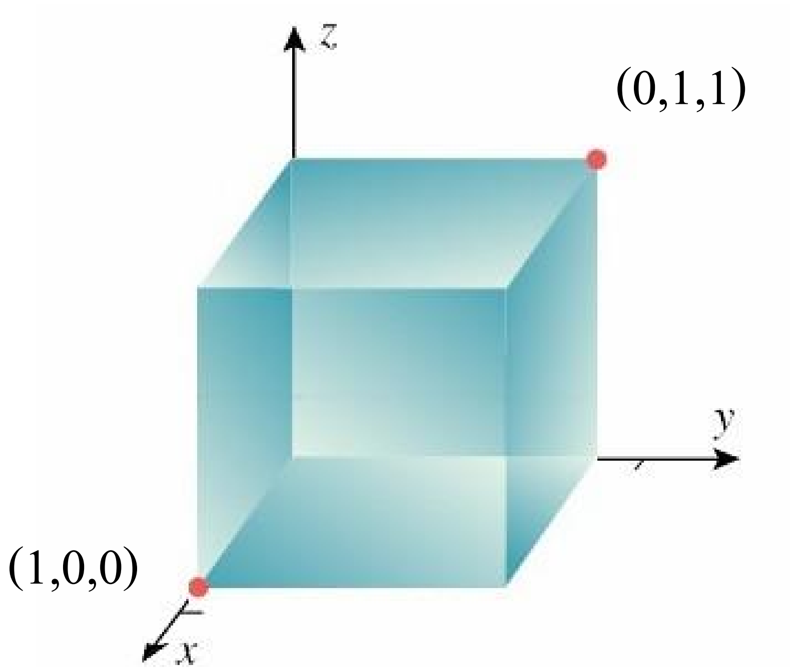
ในการศึกษา ณ ตอนนี้ให้พิจารณาเวกเตอร์เปรียบเสมือน
ลูกศรที่มีการบอกทิศทางและมีขนาดคือความยาวของลูกศร





เวกเตอร์ที่มีขนาดเดียวกัน และ มีทิศทางเดียวกัน ถือว่าเป็นเวกเตอร์ตัวเดียวกัน

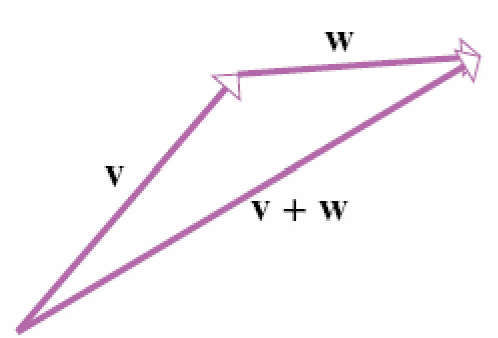


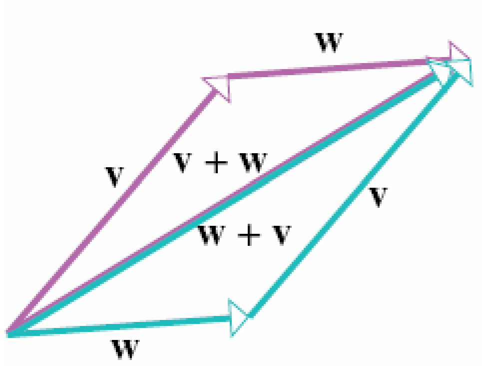


เวกเตอร์ 0 เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 0 และไม่สามารถระบุทิศทางได้ โดยมาก เรามันจะพิจารณาเวกเตอร์ 0 เป็นเสมือนจุด

การดำเนินการบนเวกเตอร์

1. การดำเนินการบวกบนเวกเตอร์





1.1 v+w = w+v

1.2 0+v = v+0 = v

<u>หมายเหตุ</u> เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์บวกกัน ยังเป็นเวกเตอร์

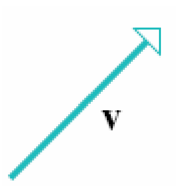
2. การดำเนินการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์(scalar) α (หรือตัวเลข)

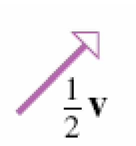
<u>หมายเหตุ</u> หลังจากดำเนินการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์เรายังคงได้เวกเตอร์

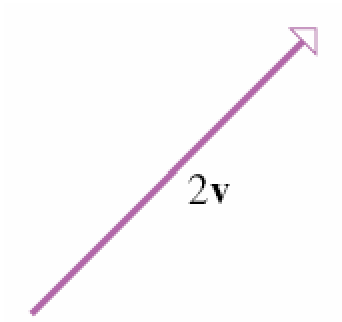
2.1 คูณด้วยสเกลาร์บวก ได้ทิศทาง<u>คงเดิม</u> แต่ขนาดของเวกเตอร์เปลี่ยนไป

2.1.1 $0 < \alpha < 1$ ขนาดของเวกเตอร์หดสั้นลง

2.1.2 $\alpha > 1$ ขนาดของเวกเตอร์ขยายขึ้น



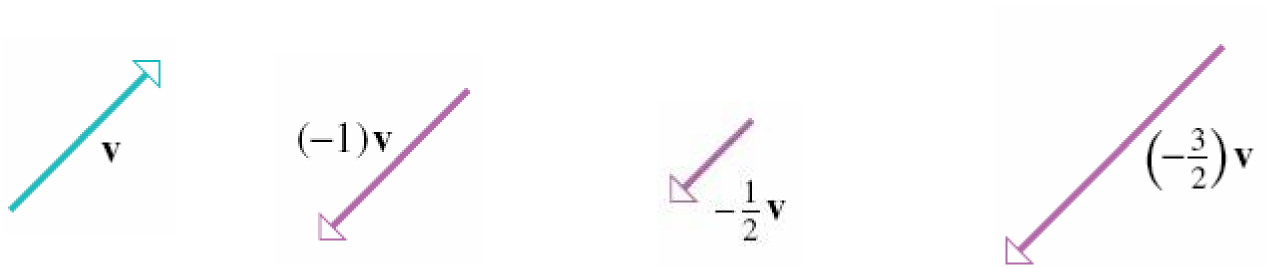




2.2 คูณด้วยสเกลาร์ลบ ได้ทิศทางตรงข้ามเดิม และขนาดของเวกเตอร์เปลี่ยนไป

2.2.1 $-1 < \alpha < 0$ ขนาดของเวกเตอร์หดสั้นลง

2.2.2 $\alpha < -1$ ขนาดของเวกเตอร์ขยายขึ้น

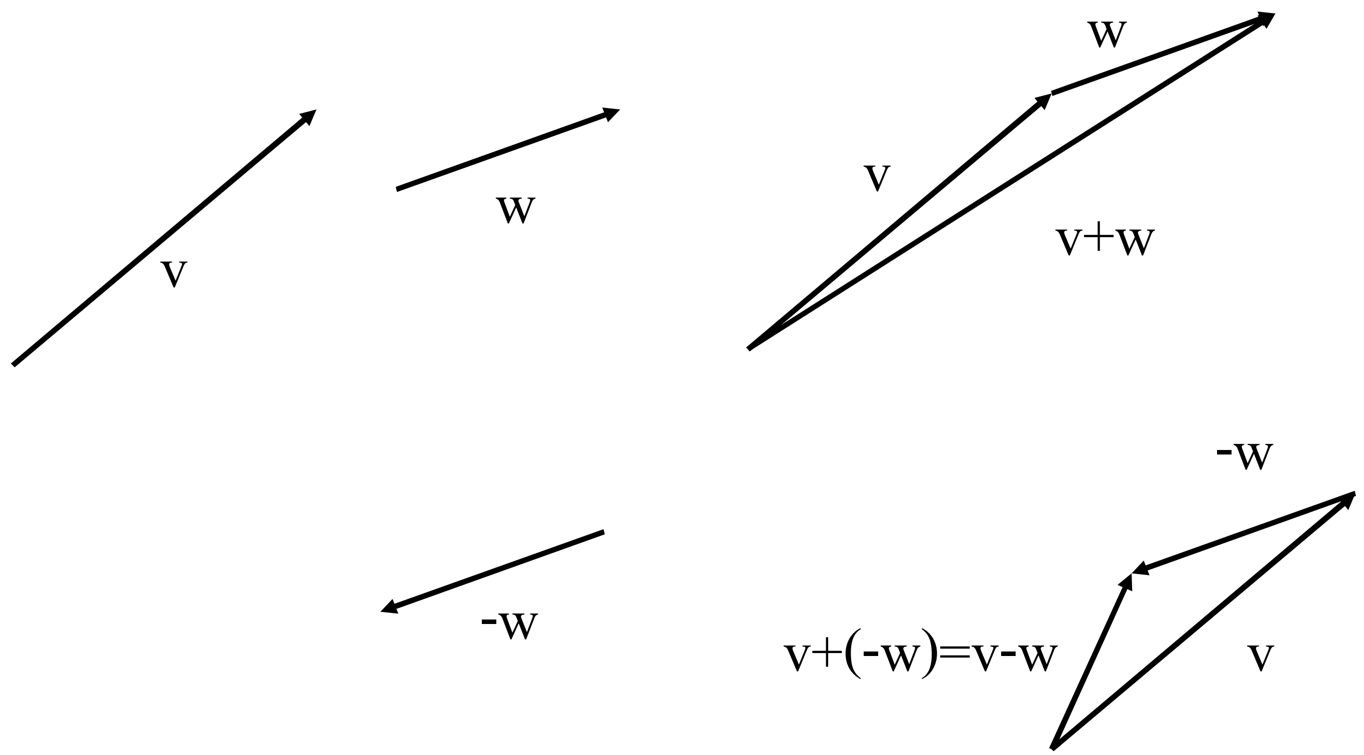


<u>หมายเหตุ</u> ถ้าเวกเตอร์ u และ v ไม่ใช่เวกเตอร์ 0 ทั้งคู่ แล้วเวกเตอร์ u และ v ขนานกันก็ต่อเมื่อ

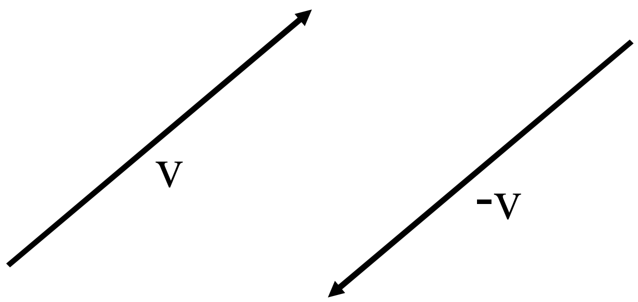
$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$$

เมื่อ α เป็น scalar

<u>หมายเหตุ</u> จากการดำเนินการทั้งสองอย่างทำให้เราได้การลบเวกเตอร์ นั่นคือ $v-w = v+(-w)$ นั่นเอง



$$v - v = v + (-v) =$$

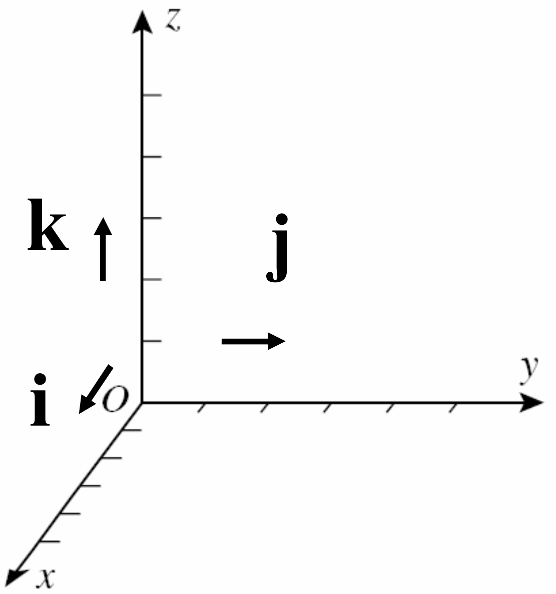


การพิจารณาเวกเตอร์ในรูปส่วนประกอบ

(Considering vector in component form)

การพิจารณาเวกเตอร์ในลักษณะนามธรรม ทำให้ยาก
ต่อความเข้าใจ และนำไปประยุกต์ใช้
เพื่อความสะดวกเราจะพิจารณาเวกเตอร์ในรูปส่วนประกอบ
ของเวกเตอร์พื้นฐานที่มีลักษณะง่ายต่อการนำไปใช้แทน

เวกเตอร์ i,j และ k



i คือเวกเตอร์ซึ่งมีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย และมีทิศทางในแนวแกน x ทางบวก

j คือเวกเตอร์ซึ่งมีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย และมีทิศทางในแนวแกน y ทางบวก

k คือเวกเตอร์ซึ่งมีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย และมีทิศทางในแนวแกน z ทางบวก

โดยทฤษฎีบท เราได้ว่าเวกเตอร์ใดๆ สามารถเขียนได้ในรูปผลรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ i,j และ k ได้เสมอ

$$\boxed{\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}}$$

และโดยทั่วไปเรามันจะเขียนเวกเตอร์ v ในรูปของส่วนประกอบดังนี้

$$\boxed{\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle}$$

<u>ทฤษฎีบท</u> เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์เท่ากันก็ต่อเมื่อส่วนประกอบย่อยแต่ละส่วน <u>มีค่าเท่ากัน</u>ทั้งหมด

เช่น $\langle a,b,c\rangle = \langle -2,\sqrt{5}, \pi\rangle$ ก็ต่อเมื่อ

ทฤษฎีบท ถ้า v=$<v_1, v_2, v_3>$ และ w= $<w_1, w_2, w_3>$ แล้ว

$$\mathrm{v+w} = < v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3>$$

$$= (v_1+w_1)\mathrm{i}+(v_2+w_2)\mathrm{j}+(v_3+w_3)\mathrm{k}$$

$$\mathrm{v-w} = < v_1-w_1, v_2-w_2, v_3-w_3>$$

$$= (v_1-w_1)\mathrm{i}+(v_2-w_2)\mathrm{j}+(v_3-w_3)\mathrm{k}$$

$$\alpha\mathrm{v} = <\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3>$$

$$= (\alpha v_1)\mathrm{i}+(\alpha v_2)\mathrm{j}+(\alpha v_3)\mathrm{k}$$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า $v=\langle -2,1,0\rangle$ และ $w=\langle 3,-4,-5\rangle$ แล้ว

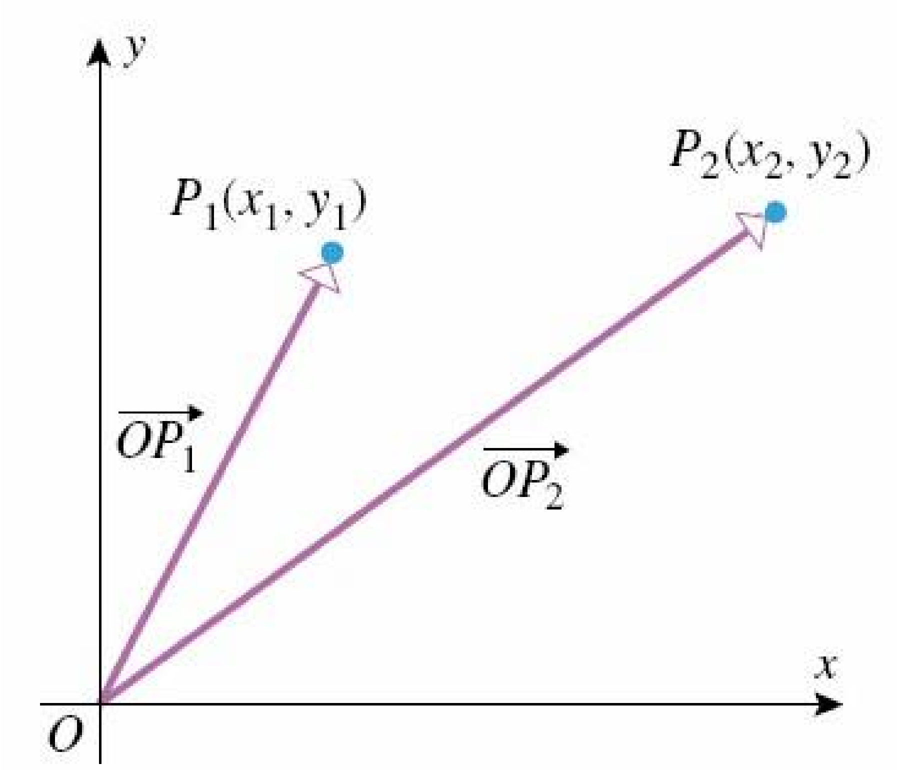
$v+w =$

$0.5v =$

$-2w =$

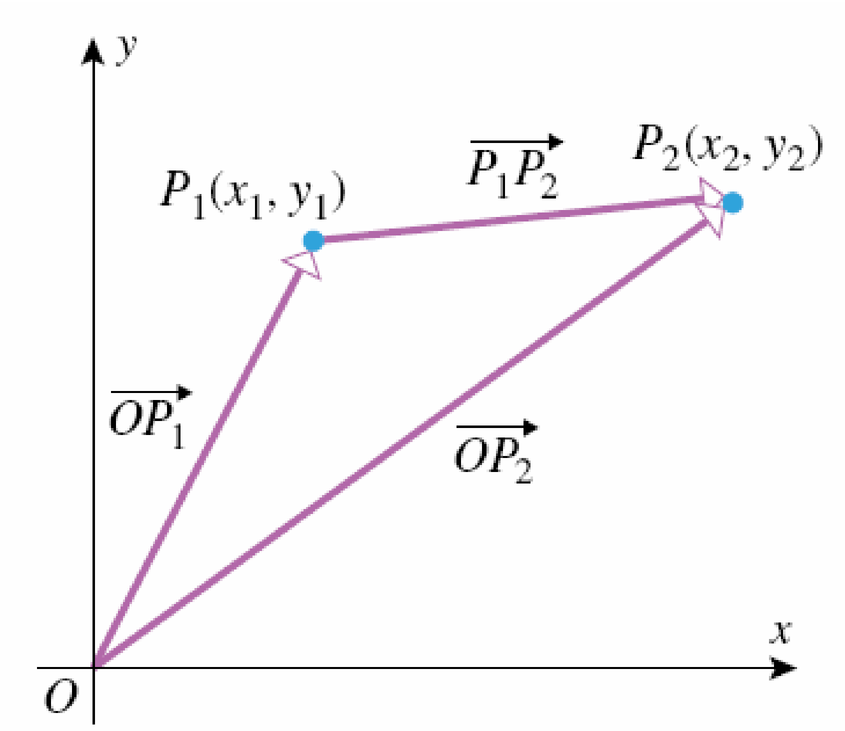
$2w-3v =$

การหาเวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางเดียวกับทิศทางจากจุด P_1 ไปยังจุด P_2 และมีขนาดเท่ากันกับระยะทางระหว่างจุด P_1 และจุด P_2



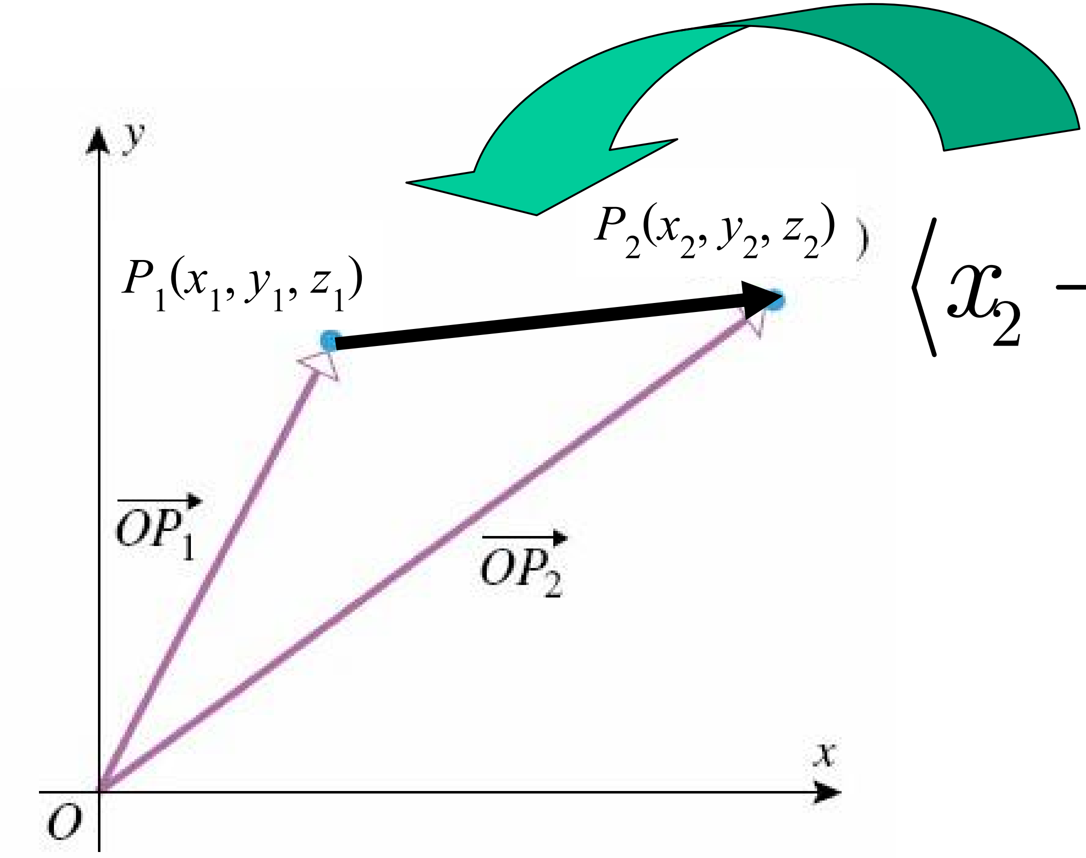
$$\overrightarrow{OP_1} =$$

$$\overrightarrow{OP_2} =$$



สังเกตว่า $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2}$

การหาเวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางเดียวกับทิศทางจากจุด P_1 ไปยังจุด P_2 และมีขนาดเท่ากันกับระยะทางระหว่างจุด P_1 และจุด P_2



$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} =$$

ขยายแนวคิดสู่ 3 มิติพบว่า

$$\overrightarrow{P_1P_2} =$$

การหาเวกเตอร์ซึ่งมีทิศทางเดียวกับทิศทาง

จากจุด $P_1(0,-2,5)$ ไปยังจุด $P_2\ (3,4,-1)$ และมีขนาดเท่ากันกับ

ระยะทางระหว่างจุด $P_1\ (0,-2,5)$ และจุด $P_2(3,4,-1)$

ทฤษฎีบท สำหรับเวกเตอร์ u,v และ w และสเกลาร์ *k* และ *l* ใดๆ แล้ว

(*a*) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(*b*) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

(*c*) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$

(*d*) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

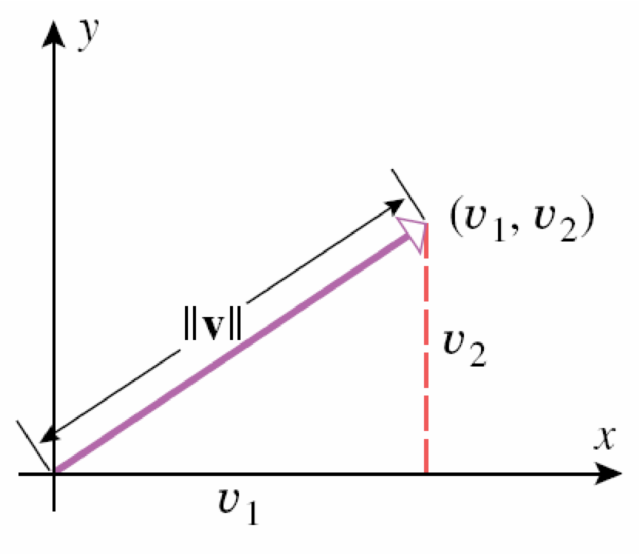
(*e*) $k(\ell\mathbf{u})=(k\ell)\mathbf{u}$

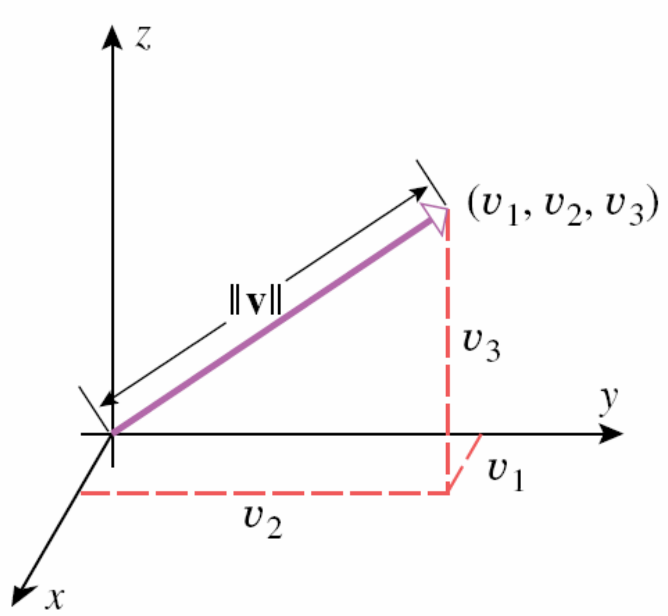
(*f*) $k(\mathbf{u}+\mathbf{v})=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$

(*g*) $(k+\ell)\mathbf{u}=k\mathbf{u}+\ell\mathbf{u}$

(*h*) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

ขนาดของเวกเตอร์





<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า v=<v_1, v_2, v_3> ขนาดของ v คือ

$$|\mathrm{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

ขนาดของ αv คือ

$$|\alpha \mathrm{v}| =$$

$$|\mathrm{v}|^2 =$$

<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า v=< v_1, v_2, v_3> ขนาดของ v คือ

$$|\mathrm{v}| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

ขนาดของ αv คือ

$$|\alpha \mathrm{v}| = |\alpha||\mathrm{v}| = |\alpha|\sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$$

$$|\mathrm{v}|^2 = (v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2$$

จงหาขนาดของ

$v = \langle 3, -4, -5 \rangle$

$w = 3i + 4j + 5k$

$2v$

$-3w$

0

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ถ้า v ไม่ใช่เวกเตอร์ 0 เวกเตอร์ที่มีขนาด 1 หน่วย และมีทิศทางเดียวกันกับเวกเตอร์ v คือ

เวกเตอร์ $\dfrac{1}{|v|}v = \dfrac{v}{|v|}$

หมายเหตุ เราเรียกการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ $\dfrac{1}{\text{ขนาดของเวกเตอร์}}$

ว่า "**การทำให้เป็นบรรทัดฐาน**" (normalization)

จงหาเวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับเวกเตอร์ $v = \langle 2, -2, 1 \rangle$