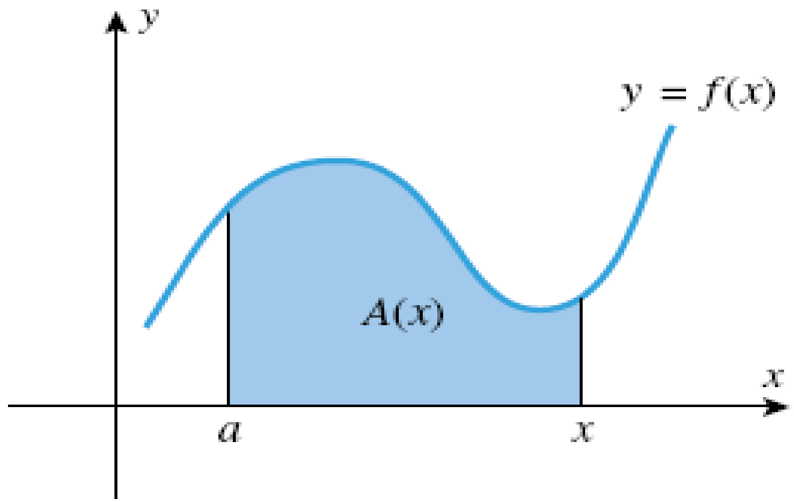
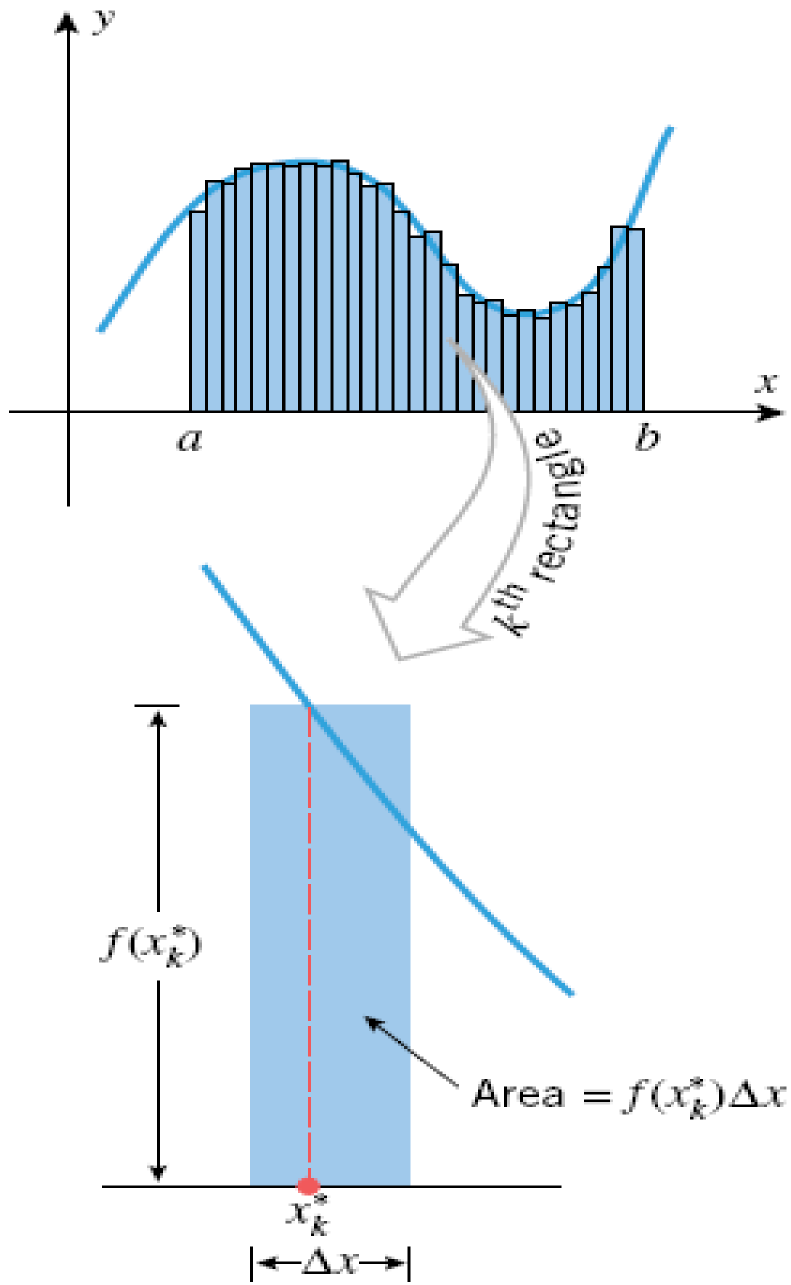
การประยุกต์ใช้ปริพันธ์

Applications of Integration

การหาปริพันธ์ สามารถถูกนำมาประยุกต์ใช้ได้ในชีวิตประจำวัน ตัวอย่างเช่น งานทางด้านฟิสิกส์ วิศวกรรมศาสตร์ หรือแม้แต่งานทางด้านวิทยาศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสิ่งมีชีวิต


y
y = f(x)
A(x)
x
a
x

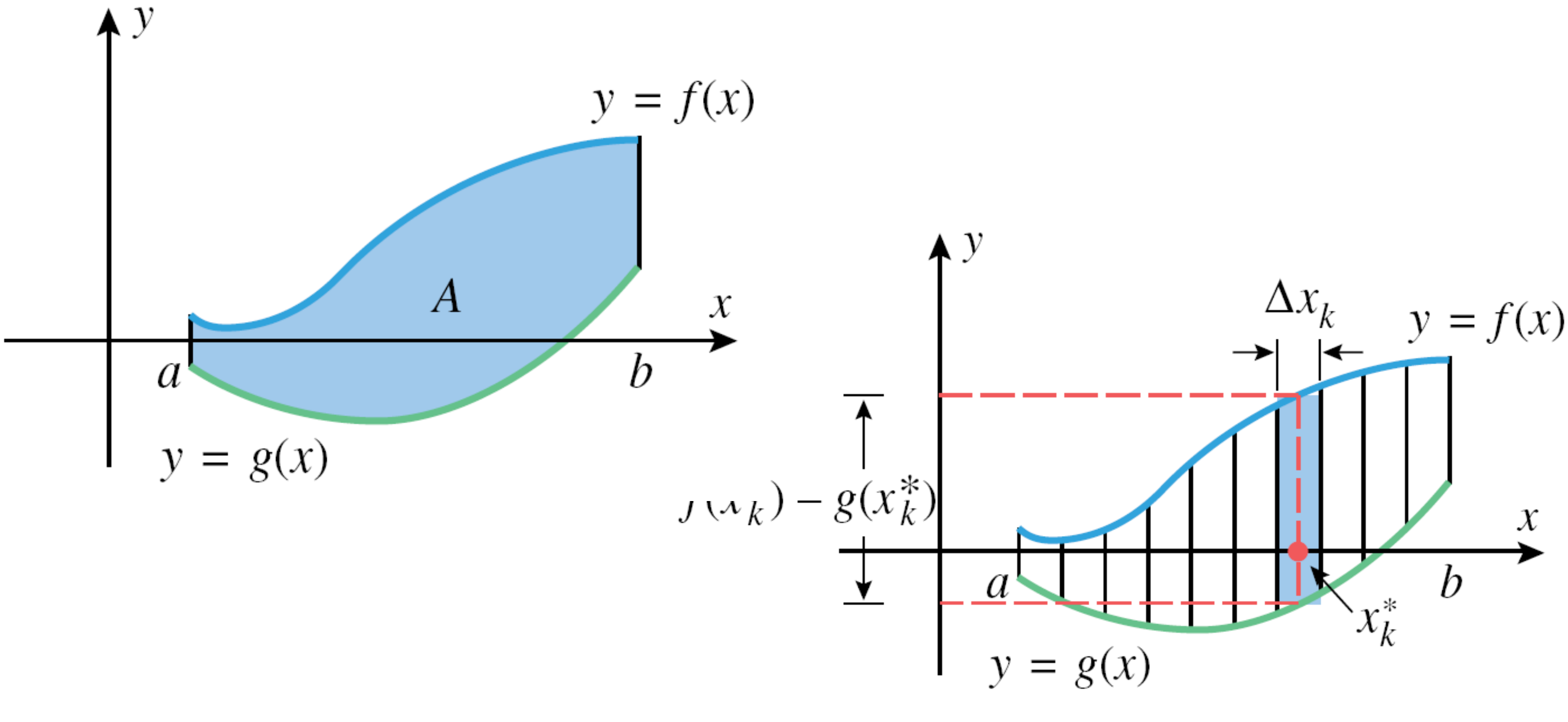

y
x
a
b
k th rectangle
f(x*k)
Area = f(x*k)Δx
x*k
Δx

จงหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $y = \frac{1}{x}$ และอยู่เหนือแกน x เมื่อ x อยู่ในช่วง $[1, 3]$

การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

Area between Curves

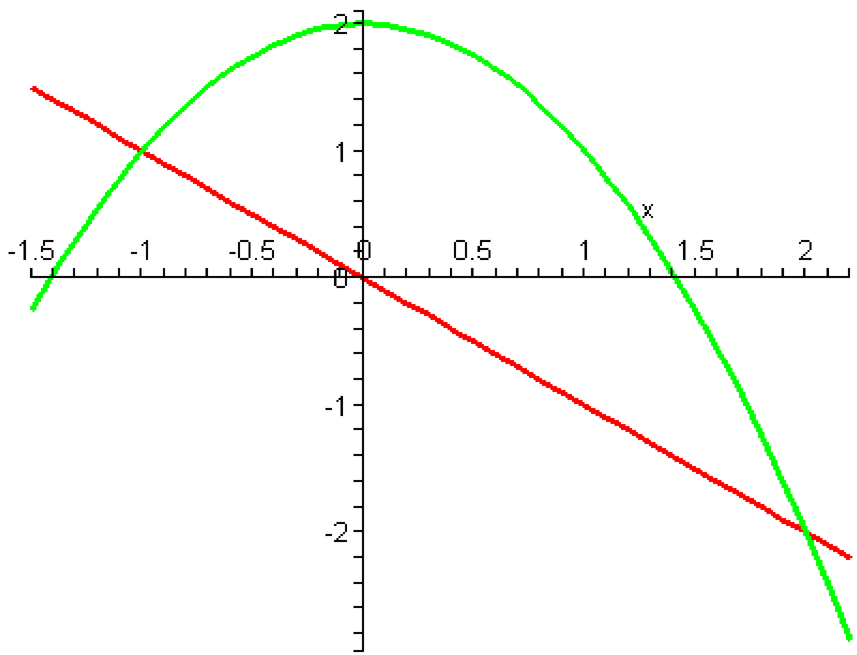
การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง เป็นการประยุกต์ของการหาปริพันธ์จำกัดเขต



(b)

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)] \Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

จงหาพื้นที่ของส่วนที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 2 - x^2$ **และเส้นตรง** $y = -x$



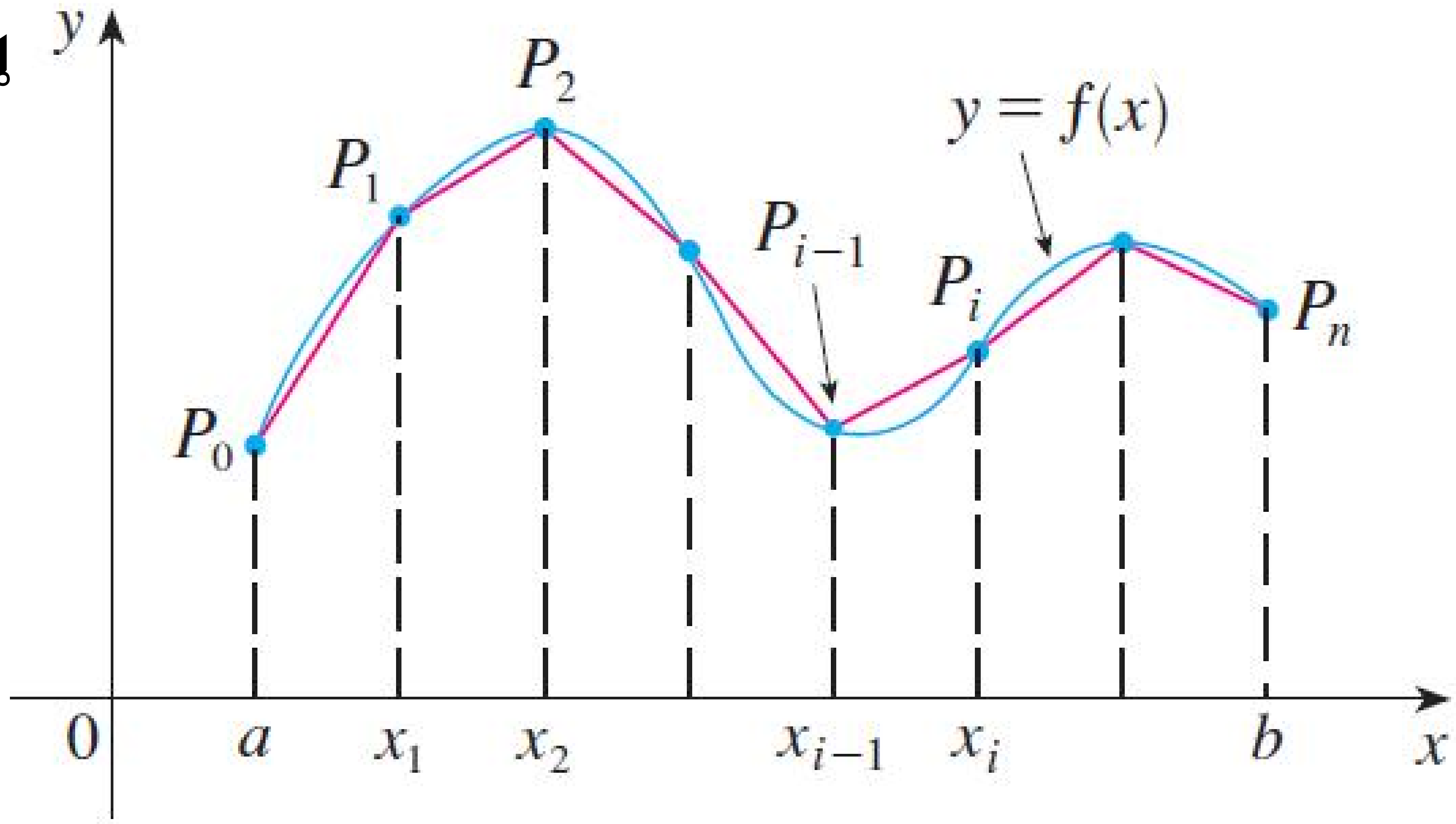
x
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
1
-1
-2

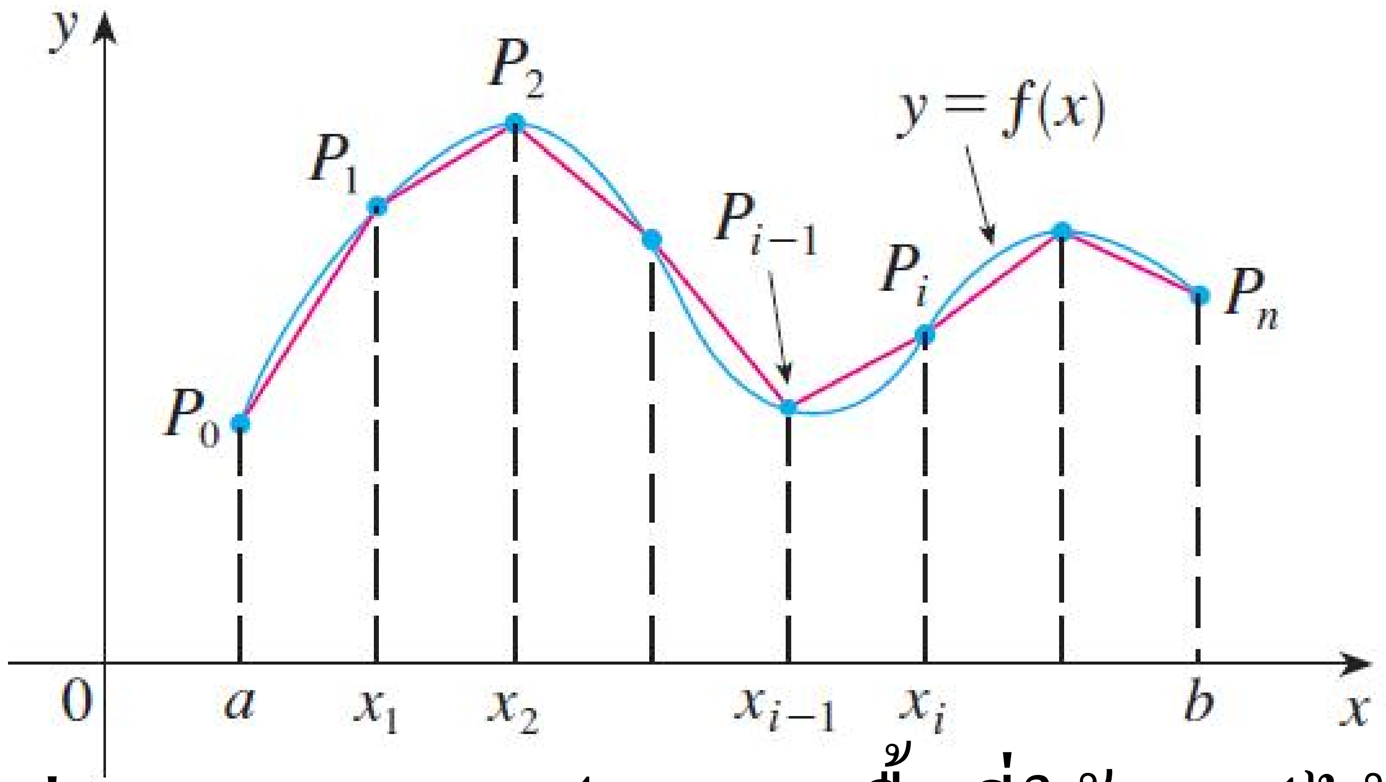
การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข

(numerical integration)

ในบางครั้ง อาจเป็นการยากที่จะประยุกต์ใช้การหาปริพันธ์เพื่อหาพื้นที่ใต้กราฟ แต่ด้วยแนวคิดของการประยุกต์ใช้การหาปริพันธ์ เราอาจหาค่าประมาณของพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันที่สนใจ โดยที่ไม่จำเป็นต้องหาปริพันธ์ก็ได้ ใช้เพียงแค่การคำนวณพื้นฐานเชิงตัวเลข

แนวคิดหนึ่งในการหาพื้นที่ใต้กราฟที่สนใจ โดยการใช้การหาพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูเข้ามาช่วยในการคำนวณ





จากตัวอย่าง เราสามารถประมาณพื้นที่ใต้กราฟได้ คือ

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2}\left(f(a)+f(x_1)\right)(x_1-a)+\frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)(x_2-x_1)+ \cdots +\frac{1}{2}\left(f(x_{n-1})+f(b)\right)(b-x_{n-1})$$

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2}\big(f(a)+f(x_1)\big)(x_1-a)+\frac{1}{2}\big(f(x_1)+f(x_2)\big)(x_2-x_1)+$$

$$\cdots+\frac{1}{2}\big(f(x_{n-1})+f(b)\big)(b-x_{n-1})$$

สำหรับกรณีที่เราแบ่งช่วงในการประมาณค่าปริพันธ์เท่า ๆ กัน

โดยที่ $d = x_1 - a = x_2 - x_1 = \cdots = b - x_{n-1}$

ได้ว่า

$$\text{พื้นที่} =$$

การประมาณพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ โดยใช้พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู เมื่อ $f(x) \geq 0, x \in [a,b]$

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2}\big(f(a)+f(x_1)\big)(x_1-a)+\frac{1}{2}\big(f(x_1)+f(x_2)\big)(x_2-x_1)+$$

$$\cdots+\frac{1}{2}\big(f(x_{n-1})+f(b)\big)(b-x_{n-1})$$

สำหรับกรณีที่เราแบ่งช่วงในการประมาณค่าปริพันธ์เท่า ๆ กัน

$$\text{พื้นที่} = \frac{1}{2}d\big(f(a)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(b)\big)$$

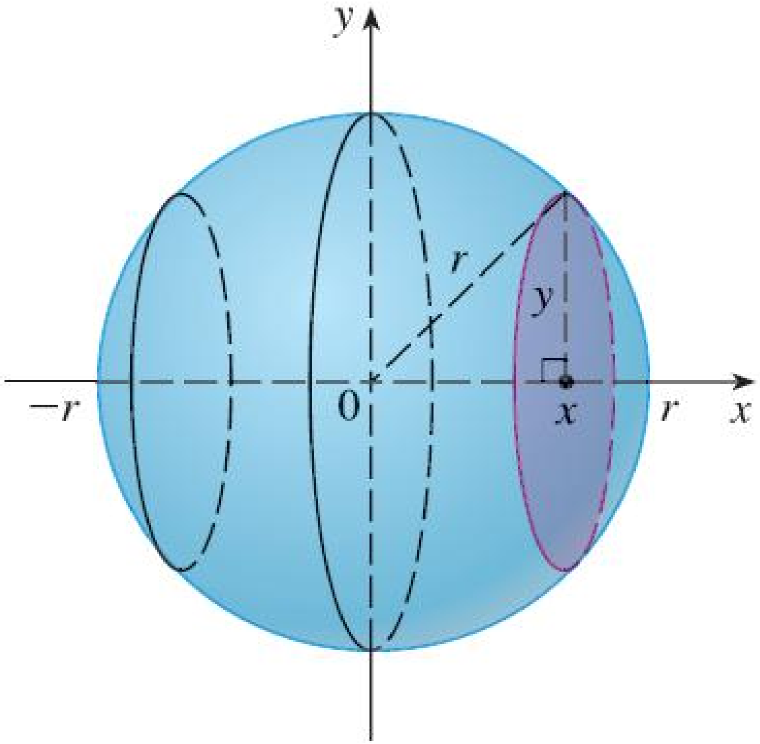
เมื่อ d คือ ความกว้างของช่วงที่ใช้ในการประมาณค่าปริพันธ์

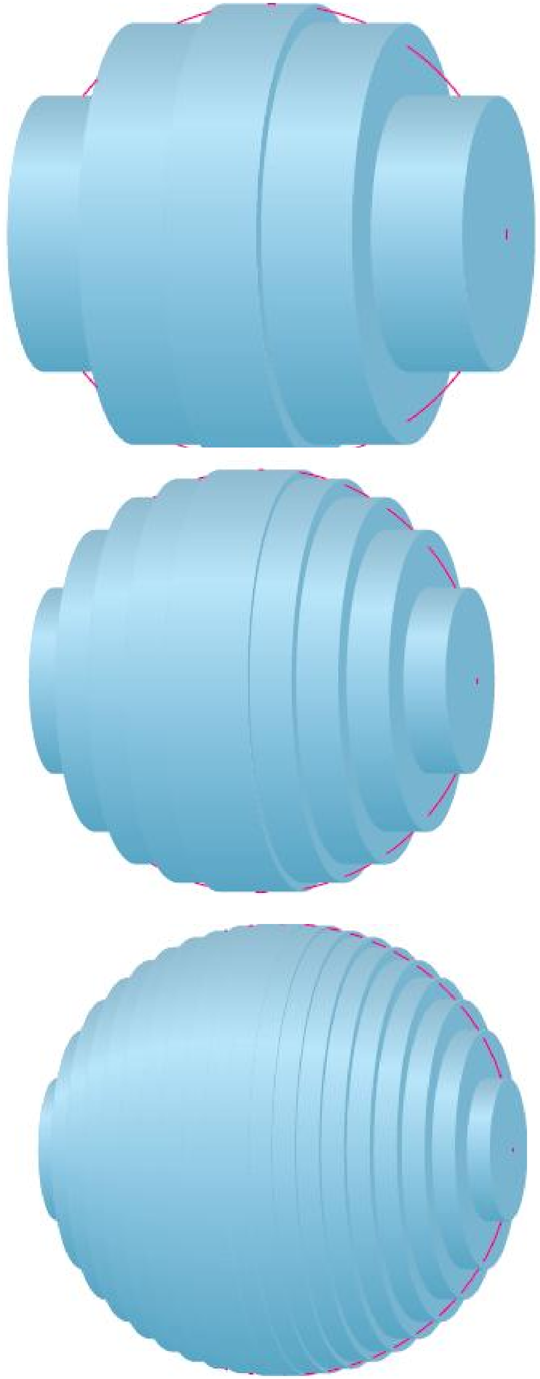
จงประมาณพื้นที่ใต้กราฟของเส้นโค้ง $y = 3 + 2x - x^2$ เมื่อ $x \in [-1, 3]$ โดยใช้สี่เหลี่ยมคางหมูช่วยในการหาพื้นที่

การหาปริมาตรของรูปทรงที่เกิดจากการหมุนรอบแกน

Volume by the Revolution

เราสามารถประยุกต์ใช้การหาปริพันธ์จำกัดเขตเพื่อช่วยในการหาปริมาตรของรูปทรงที่เกิดจากการหมุนรอบแกนได้


y
r
y
−r
0
x
r
x

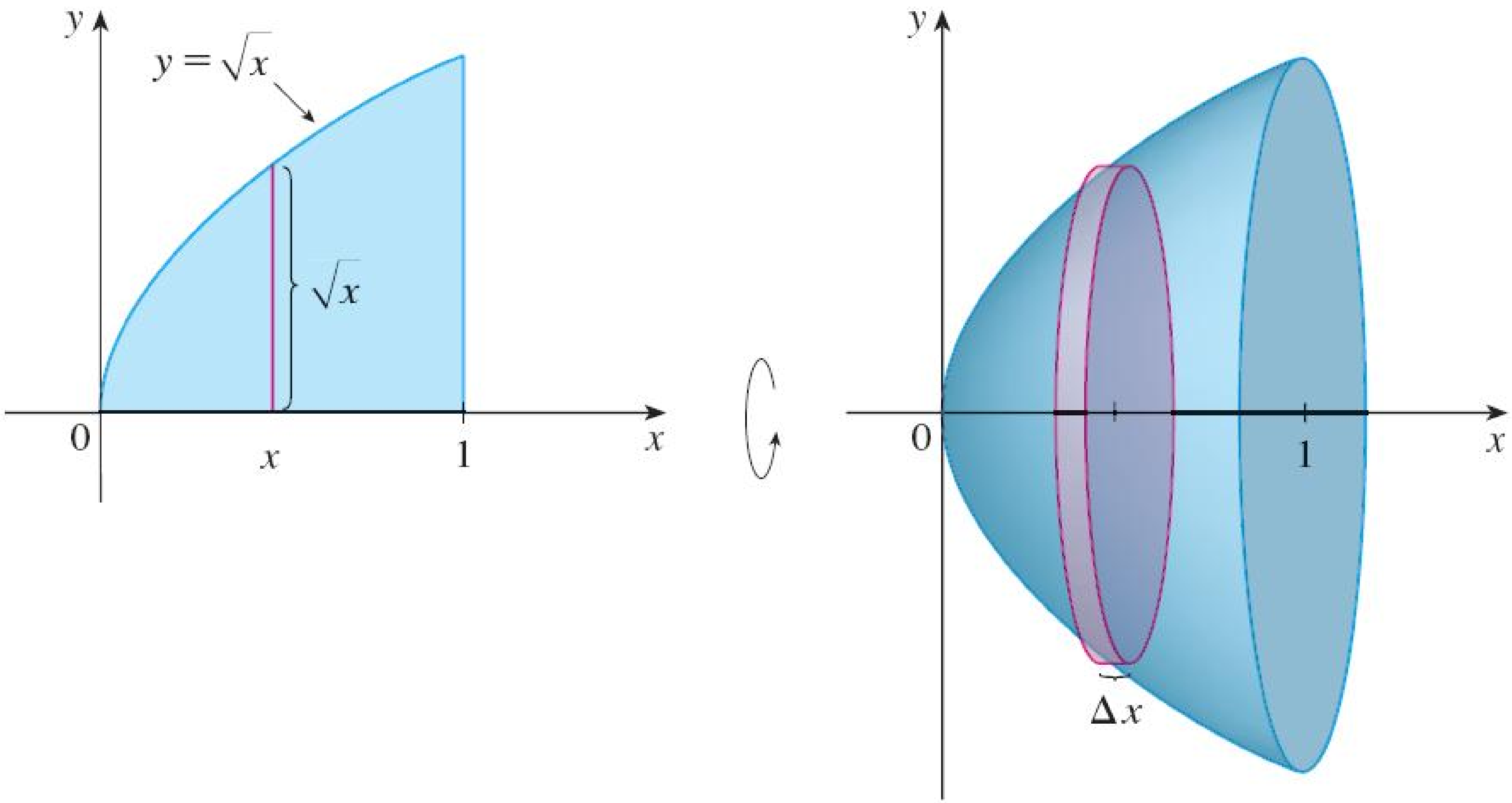


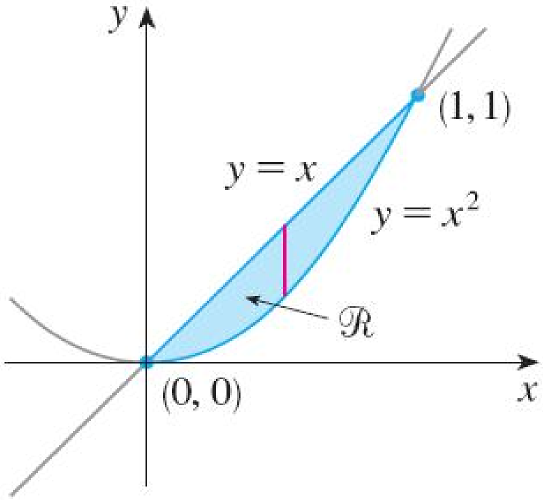
จงแสดงว่าปริมาตรของทรงกลมรัศมี a เท่ากับ $\dfrac{4}{3}\pi a^3$

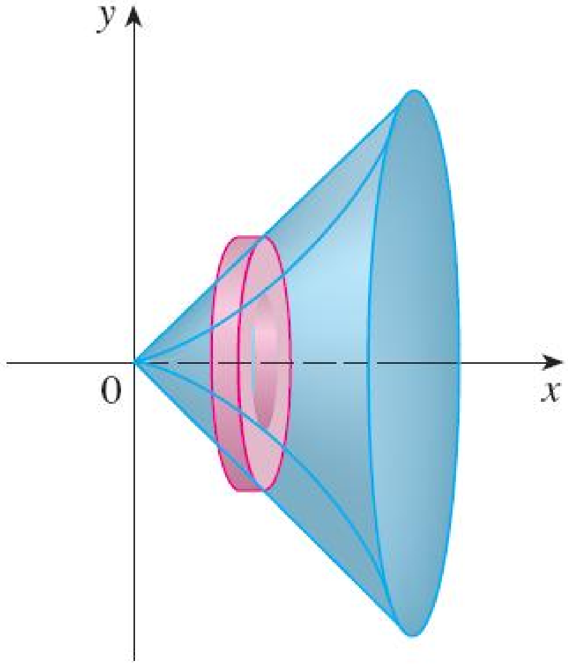
จงหาปริมาตรของทรงตัน (solid) ซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง

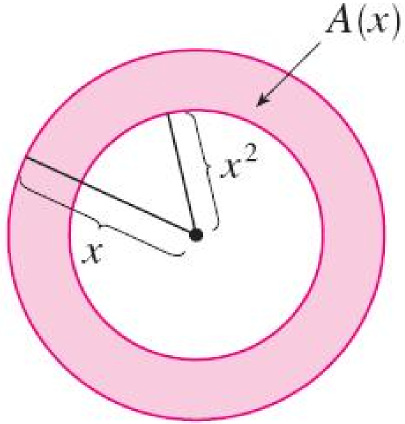
$$y = \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 1$$

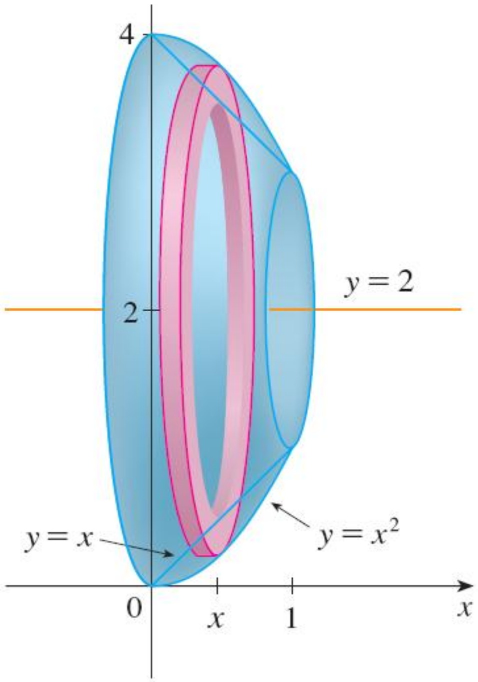
รอบแกน x

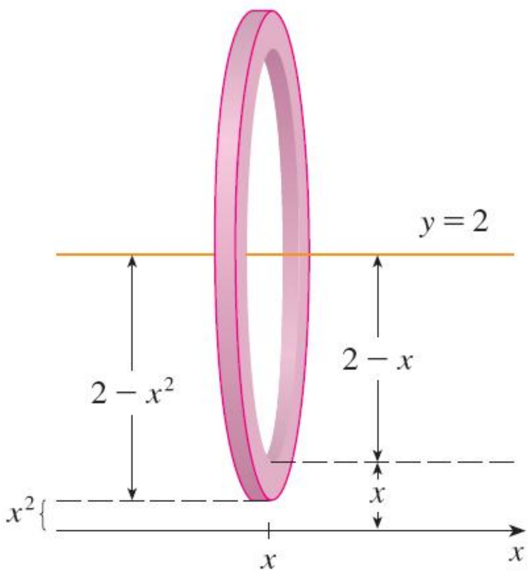


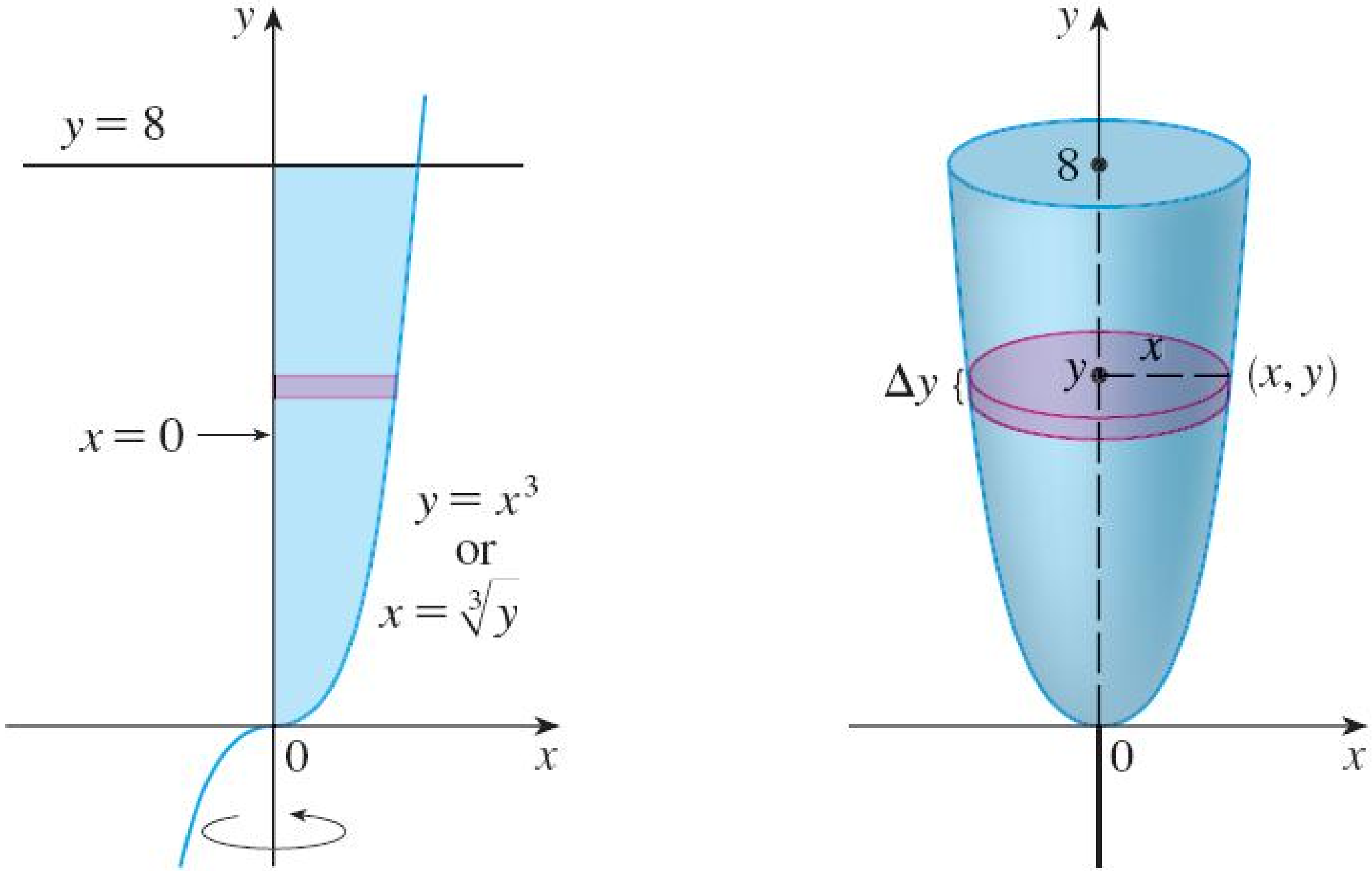

y
x
(1, 1)
y = x
y = x^2
ℛ
(0, 0)

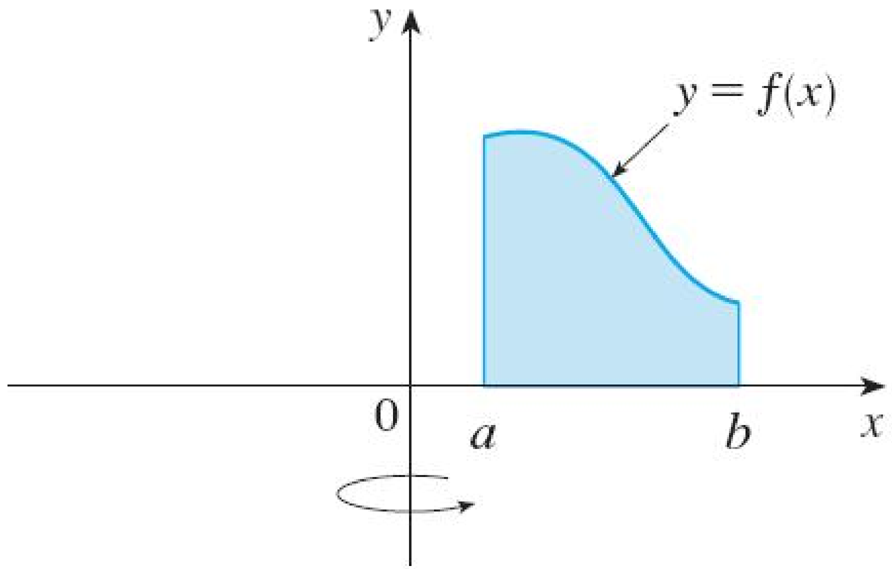

y
x
0


A(x)
x^2
x

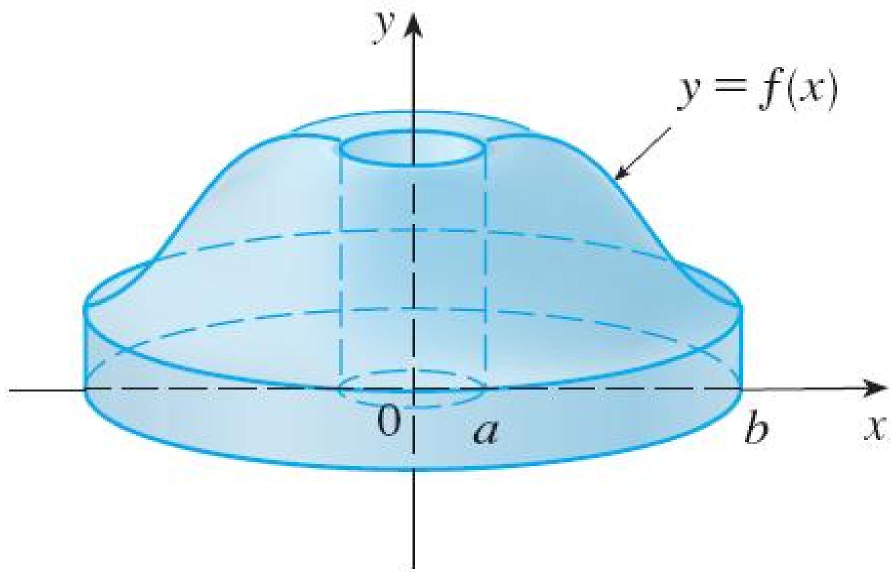

4
2
y = 2
y = x
y = x^2
0
x
1
x


y = 2
2 − x^2
2 − x
x^2
x
x
x


y
y = 8
x = 0
y = x³
or
x = ∛y
0
x
8
Δy
x
y
(x, y)



y
y = f(x)
0
a
b
x



y
y = f(x)
0
a
b
x

$$F = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

แรง (Force)

$$W = Fd \qquad \text{work} = \text{force} \times \text{distance}$$

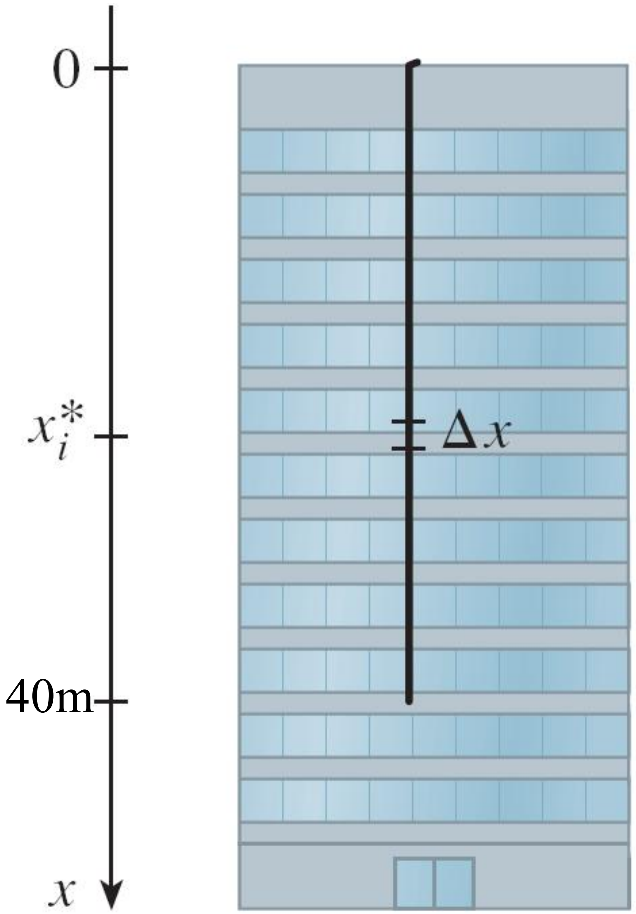
งาน (work)

$$W = Fd \qquad \text{work} = \text{force} \times \text{distance}$$

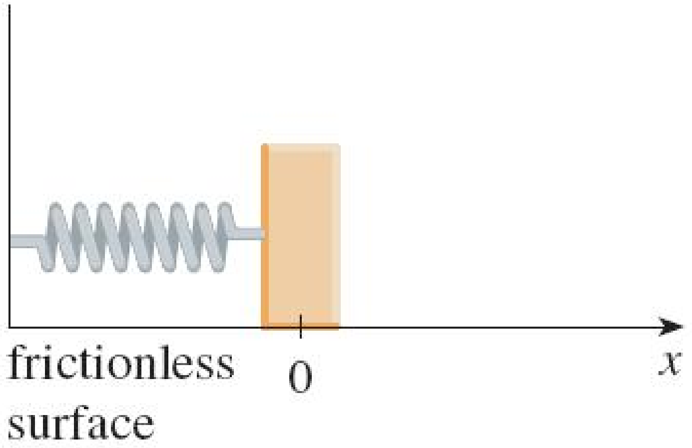
ในกรณีที่แรงไม่คงที่

$$W = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x = \int_a^b f(x)\, dx$$

เชือกเส้นหนึ่งยาว 40 เมตร โดยมีน้ำหนัก 2 N ต่อความยาว 1 เมตร ห้อยมาจากยอดตึก จงหางาน (work) ที่คนงานใช้ดึงเชือกขึ้นไปไว้ที่ยอดตึก

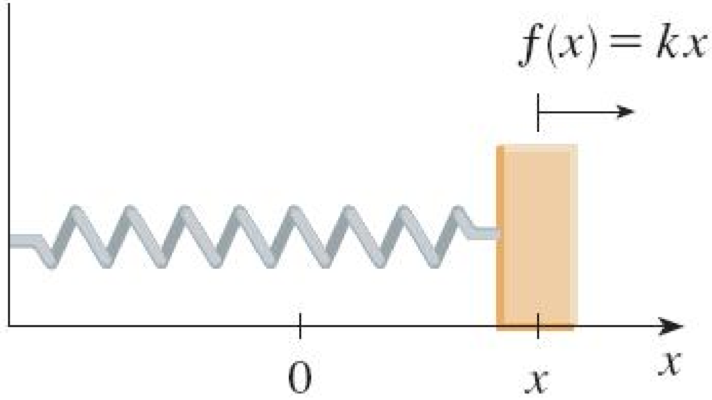


$$W = \int_{0}^{40} 2(40 - x)dx$$



Hooke's Law

กฎของ Hooke



$$f(x) = kx$$

กำหนดให้สปริงมีความยาว 10 cm เมื่ออยู่สภาวะปกติ ถ้าใช้แรง 40N ในการดึงให้สปริงยืดจาก 10cm เป็น 15 cm จงหางานที่ใช้ในการดึงให้สปริงยืดจาก 15cm เป็น 18cm

$$f(x) = kx \qquad\qquad k =$$

$$W = \int_a^b f(x)\,dx$$