อนุกรมกำลัง (power series)

อนุกรมกำลังเป็นรูปแบบหนึ่งของอนุกรม โดยมีลักษณะคล้ายคลึงกับพหุนาม เพียงแต่ว่ามีลักษณะเป็นพหุนามที่มีพจน์เป็นจำนวนอนันต์ อนุกรมกำลังมีบทบาทมากในการประมาณค่าของฟังก์ชัน และการเรียนในเนื้อหาคณิตศาสตร์ชั้นสูง เช่น วิชาการวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ วิชาการวิเคราะห์เชิงตัวเลข เป็นต้น

พหุนาม (polynomial)

เราเรียกฟังก์ชัน $p_n(x)$ ว่าพหุนามระดับขั้น n (degree n) ถ้า

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \qquad a_n \neq 0$$

เมื่อ n เป็นจำนวนนับหรือ 0

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ

เราเรียก $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ว่าสัมประสิทธิ์

อนุกรมกำลัง

เราเรียกรูปแบบอนุกรมอนันต์

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots$$

ว่าอนุกรมกำลังของ x รอบจุด x_0 (power series of x around point x_0)

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ เป็นค่าคงตัวใด ๆ และ กำหนดให้ $(x-x_0)^0 = 1$

โดย เรียก $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ว่า **สัมประสิทธิ์ของอนุกรม**

เรียก x_0 ว่า **จุดศูนย์กลาง**

เรียก x ว่า **ตัวแปร**

สำหรับกรณี $x_0 = 0$

เราเรียกรูปแบบอนุกรมอนันต์

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

ว่าอนุกรมกำลังของ x

ตัวอย่างอนุกรมกำลังที่น่าสนใจ

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cos x=-(x-\frac{\pi}{2})+\frac{(x-\frac{\pi}{2})^3}{3!}-\frac{(x-\frac{\pi}{2})^5}{5!}+\frac{(x-\frac{\pi}{2})^7}{7!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

พิจารณาอนุกรม $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

ด้วยวิธีการทดสอบด้วยอัตราส่วนพบว่า

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\quad}{\quad}\right| = \qquad\qquad < 1$$

ดังนั้นอนุกรม $1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ลู่เข้าเมื่อ

สมบัติของอนุกรมกำลัง

ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ เป็นอนุกรมกำลังที่ลู่เข้าเมื่อ $x \in \left(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\right)$ สำหรับบางจำนวน $\varepsilon > 0$ แล้ว

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + b_n\right)(x-x_0)^n$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n - b_n\right)(x-x_0)^n$$

3. $$c\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c a_n (x-x_0)^n$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

4. $$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$= a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \cdots$$

5. $$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-x_0)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$= C + a_0(x-x_0) + a_1 \frac{(x-x_0)^2}{2} + a_2 \frac{(x-x_0)^3}{3} + a_3 \frac{(x-x_0)^4}{4} + \cdots$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัวใด ๆ

แนวคิดในการประมาณฟังก์ชันด้วยพหุนาม

เราอาจตั้งสมมติฐานว่า เราสามารถแทนฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ด้วยพหุนาม $p_n(x)$ ถ้าทั้งฟังก์ชันและพหุนามมีค่าเท่ากันแล้ว อนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ณ $x=0$ ต้องมีค่าเท่ากันด้วย พบว่า

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2 a_3 x + 4\cdot 3 a_4 x^2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2 a_3 + 4\cdot 3\cdot 2 a_4 x + \cdots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}$$

$$f^{(4)}(x) = 4\cdot 3\cdot 2 a_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3) a_n x^{n-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2 a_n$$

$$\left.\begin{aligned}
&f(0)=a_0\\
&f'(0)=a_1\\
&f''(0)=2a_2\\
&f'''(0)=3\cdot 2a_3\\
&f^{(4)}(0)=4\cdot 3\cdot 2a_4\\
&\vdots\\
&f^{(n)}(0)=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2a_n
\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}
&a_0=f(0)\\
&a_1=f'(0)\\
&a_2=\frac{f''(0)}{2}\\
&a_3=\frac{f'''(0)}{2\cdot 3}\\
&a_4=\frac{f^{(4)}(0)}{2\cdot 3\cdot 4}\\
&\vdots\\
&a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot n}
\end{aligned}\right.$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$a_0 =$$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$$a_4 =$$

$$a_5 =$$

$$\vdots$$

$$a_n =$$

ดังนั้นเราสามารถประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยพหุนาม

$$p_n(x) =$$

เราเรียกพหุนาม

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ว่าพหุนามแมคลอรีนระดับขั้น n ของฟังก์ชัน f

(Maclaurin polynomial degree n of f)

และเรียกอนุกรม

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

ว่าอนุกรมแมคลอรีนของฟังก์ชัน f (Maclaurin series of f)

ถ้า x อยู่ในช่วงที่ทำให้อนุกรมดังกล่าวลู่เข้า

สำหรับเมื่อพิจารณาในกรณีทั่วไปที่ไม่ใช่ $x=0$ เช่นเมื่อพิจารณาสำหรับกรณี $x=x_0$

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + 4a_4(x-x_0)^3 + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\bullet 2a_3(x-x_0) + 4\bullet 3a_4(x-x_0)^2 + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

$$f'''(x) = 3\bullet 2a_3 + 4\bullet 3\bullet 2a_4(x-x_0) + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$$

$$f^{(4)}(x) = 4\bullet 3\bullet 2a_4 + \cdots + n(n-1)(n-2)(n-3)a_n(x-x_0)^{n-4}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\bullet 2a_n$$

$$\left.\begin{aligned}
&f(x_0)=a_0\\
&f'(x_0)=a_1\\
&f''(x_0)=2a_2\\
&f'''(x_0)=3\bullet 2a_3\\
&f^{(4)}(x_0)=4\bullet 3\bullet 2a_4\\
&\vdots\\
&f^{(n)}(x_0)=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\bullet 2a_n
\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}
&a_0=f(x_0)\\
&a_1=f'(x_0)\\
&a_2=\frac{f''(x_0)}{2}\\
&a_3=\frac{f'''(x_0)}{2\bullet 3}\\
&a_4=\frac{f^{(4)}(x_0)}{2\bullet 3\bullet 4}\\
&\vdots\\
&a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{2\bullet 3\bullet 4\bullet\cdots\bullet n}
\end{aligned}\right.$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$a_0 =$$

$$a_1 =$$

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$$a_4 =$$

$$a_5 =$$

$$\vdots$$

$$a_n =$$

ดังนั้นเราสามารถประมาณฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยพหุนาม

$$p_n(x) =$$

เราเรียกพหุนาม

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ว่าพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n ของฟังก์ชัน f ที่จุด x_0

(Taylor polynomial degree n of f at x_0)

และเรียกอนุกรม

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

ว่าอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x_0 (Taylor series of f at x_0)

ถ้า x อยู่ในช่วงที่ทำให้อนุกรมดังกล่าวลู่เข้า

ตัวอย่าง จงหาพหุนามแมคลอรินระดับขั้น n และอนุกรมแมคลอลินของฟังก์ชัน $f(x) = e^x$

ตัวอย่าง จงหาพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n และอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด 1 ของฟังก์ชัน $f(x) = e^x$

ตัวอย่าง จงหาพหุนามแมคลอรินระดับขั้น n และอนุกรมแมคลอลินของฟังก์ชัน $f(x) = \cos x$

ตัวอย่าง จงหาพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n และอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด $\frac{\pi}{2}$ ของฟังก์ชัน $f(x) = \cos x$

ตัวอย่าง จงหาพหุนามแมคลอรินระดับขั้น n และอนุกรมแมคลอลินของฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$

ตัวอย่าง จงหาพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n และอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด $\frac{\pi}{2}$ ของฟังก์ชัน $f(x) = \sin x$

ตัวอย่าง จงหาพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n และอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด 1 ของฟังก์ชัน $f(x) = \ln x$

ค่าความคลาดเคลื่อนจากการประมาณด้วยพหุนามเทย์เลอร์

ในการประมาณค่าของฟังก์ชันด้วยพหุนามเทย์เลอร์ จะมีค่าความคลาดเคลื่อน ซึ่งทำให้ผลการคำนวณค่าพหุนามแตกต่างจากค่าของฟังก์ชันจริง ซึ่ง Joseph Louise Lagrange ได้แสดงทฤษฎีการหาค่าความคลาดเคลื่อนอย่างชัดแจ้งต่อจาก Brook Taylor ผู้เสนอแนวคิดเรื่องอนุกรมเทย์เลอร์ไว้ในทฤษฎีเศษเหลือของอนุกรมเทย์เลอร์ว่า

ทฤษฎีเศษเหลือของอนุกรมเทย์เลอร์

ถ้า $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ โดยที่ $P_n(x)$ คือ พหุนามเทย์เลอร์ของ f ระดับขั้น n ที่จุด x_0 และ $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ แล้ว

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

สำหรับทุก ๆ $x \in \left(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right), \varepsilon = \lim_{n\to\infty}\left|(n+1)\frac{f^{(n)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)}\right|$

เรียก $\varepsilon = \lim_{n\to\infty}\left|(n+1)\frac{f^{(n)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)}\right|$ ว่ารัศมีการลู่เข้าของอนุกรมเทย์เลอร์

นั่นคือทุก $x \in \left(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon\right)$ อนุกรม

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

จะลู่เข้า

และ $R_n(x) \le \dfrac{M}{(n+1)!}\left|x - x_0\right|^{n+1}$ สำหรับ $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

และ $M = \max\limits_{x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$ เสมอ

x	e^x	$p_1(x)$	$p_3(x)$	$p_5(x)$
0	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000	1.0000000000
0.1	1.1051709181	1.1000000000	1.1051666667	1.1051709167
0.2	1.2214027582	1.2000000000	1.2213333333	1.2214026667
1	2.718281828	2.0000000000	2.6666666667	2.7166666667

แบบฝึกหัด

จงหาพหุนามเทย์เลอร์ระดับขั้น n และอนุกรมเทย์เลอร์ที่จุด x_0 ของฟังก์ชันที่กำหนด

$$f(x) = e^{-x}, x_0 = 0$$

$$f(x) = e^{-x}, x_0 = 1$$

$$f(x) = e^{2x}, x_0 = 0$$

$$f(x) = e^{2x}, x_0 = 1$$

$$f(x) = e^{2x}, x_0 = 2$$

$$f(x) = e^{x^2}, x_0 = 0$$

$$f(x) = \tan^{-1} x, x_0 = 0$$

$$f(x) = \tan^{-1} x, x_0 = 1$$

$$f(x) = \cos x, x_0 = \pi$$

$$f(x) = \ln(1-x), x_0 = 0$$

$$f(x) = \ln(1-2x), x_0 = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x_0 = 9$$