ลำดับและอนุกรม (sequences and series)

ลำดับและอนุกรม ในทางคณิตศาสตร์ หมายถึง รูปแบบของตัวเลข และ ผลรวมของตัวเลข ซึ่งมีลักษณะที่สามารถคาดเดาได้ เช่น

a.) 1,1,1, …

b.)1,2,3,4,5,…

c.) 1,2,4,8,16,…

d.) 1,1,2,3,5,8,13,…

e.)1+1+1+1+…

f.) 1+2+3+4+5+6+…

ลำดับ (sequences)

ลำดับเป็นฟังก์ชัน ซึ่งส่งจากจำนวนนับไปยังจำนวนจริง

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

เรามักใช้สัญกรณ์

$$a_1 = f(1)$$

$$a_2 = f(2)$$

$$a_3 = f(3)$$

$$\vdots$$

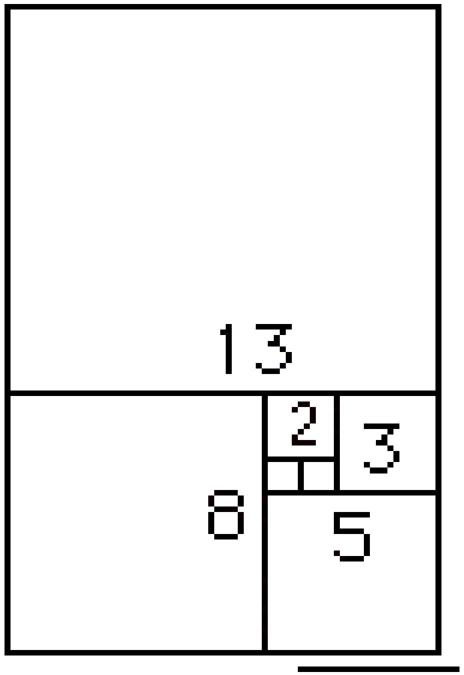
$$a_n = f(n)$$

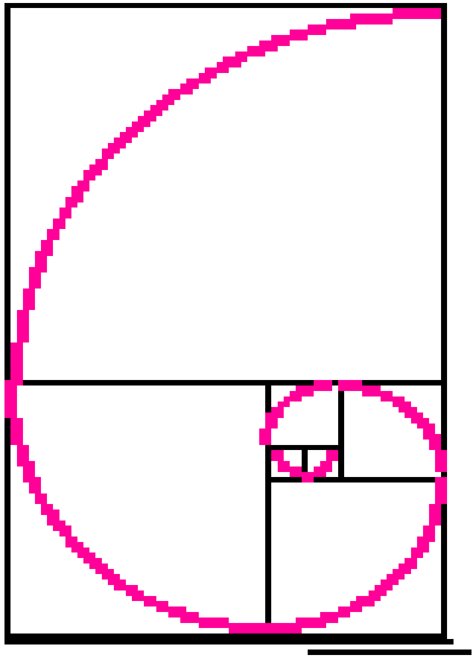
และเรียก a_n ว่าพจน์ที่ n (n^{th}-term)

คณิตศาสตร์ในธรรมชาติ

ลำดับ Fibonacci

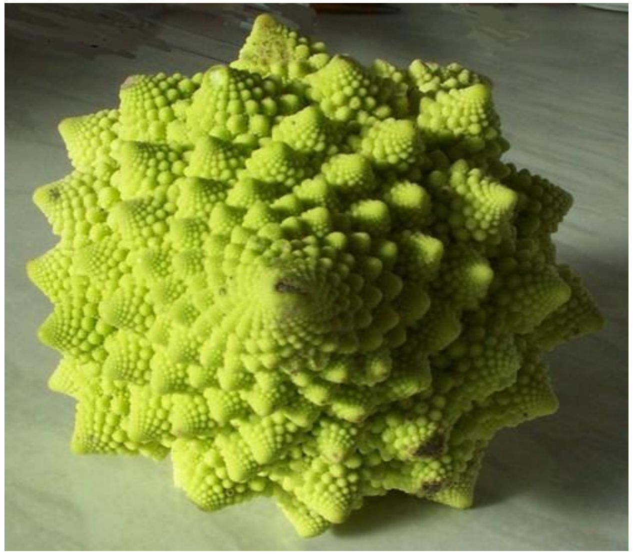
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89





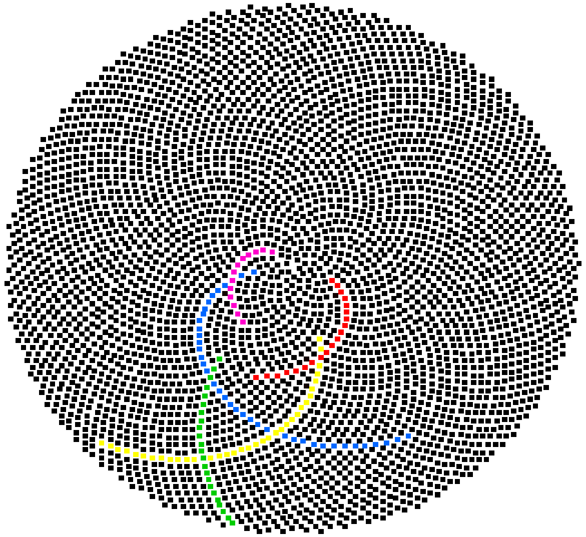
http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html#spiral





http://www.popmath.org.uk/rpamaths/rp

ampages/sunflower.html



http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci

จงหา a_n จากลำดับต่อไปนี้

1,1,1, …

จงหา a_n จากลำดับต่อไปนี้

1,1.1,1.01,1.001, …

จงหา a_n จากลำดับต่อไปนี้

1,2,3, …

จงหา a_n จากลำดับต่อไปนี้

2,4,6,8, …

จงหา a_n จากลำดับต่อไปนี้

$12, 14, 16, 18, \ldots$

จงหา a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 เมื่อ a_n มีค่า

$$a_n = 10 + 2n$$

จงหา a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 เมื่อ a_n มีค่า

$$a_n = 3 \cdot 2^n$$

จงหา a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 เมื่อ a_n มีค่า

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad a_1 = 1, a_2 = 1$$

ลำดับเลขคณิต (arithmetic sequences)

ลำดับเลขคณิต หมายถึง ลำดับที่มี**ผลต่างร่วม** (common difference) หรือ

$$d = a_n - a_{n-1}$$

เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างลำดับเลขคณิต

1,1,1, …

เป็นลำดับที่มีผลต่างร่วมคือ

ตัวอย่างลำดับเลขคณิต

1,2,3,4,5,…

เป็นลำดับที่มีผลต่างร่วมคือ

ตัวอย่างลำดับเลขคณิต

3,4,5,6,7,…

เป็นลำดับที่มีผลต่างร่วมคือ

รูปแบบของลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต จะมีรูปแบบคือ

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$a_n =$$

จงหาพจน์ที่ 20 และ 40 ของลำดับเลขคณิตต่อไปนี้

$3, 7, 11, 15, \ldots$

$13, 10, 7, 4, \ldots$

ถ้าพจน์ที่ 6 และพจน์ที่ 10 ของลำดับเลขคณิตหนึ่งมีค่าเป็น 22 และ 38 ตามลำดับ

จงหาพจน์ที่ 1 และ 100 ของลำดับเลขคณิตดังกล่าว

ลำดับ**เลขคณิต** a_n หนึ่งมีพจน์ที่ 5 และ 11 มีค่าเป็น -3 และ -15ตามลำดับ

ลำดับเลขคณิตดังกล่าวมีผลต่างร่วม คือ

1) 3

2) 2

3) 0

4) -2

5) -3

ลำดับ**เลขคณิต** a_n หนึ่งมีพจน์ที่ 5 และ 11 มีค่าเป็น -3 และ -15ตามลำดับ

a_1 (ลำดับเลขคณิตพจน์ที่ 1) มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) -1

2) 1

3) 3

4) 5

5) 7

ลำดับ**เลขคณิต** $\boldsymbol{a}_{\mathbf{n}}$ หนึ่งมีพจน์ที่ 5 และ 11 มีค่าเป็น -3 และ -15ตามลำดับ

$\boldsymbol{a}_{\mathbf{100}}$ (ลำดับเลขคณิตพจน์ที่ 100) มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 193

2) -193

3) 195

4) -195

5) 205

ลำดับเรขาคณิต (geometric sequences)

ลำดับเรขาคณิต หมายถึง ลำดับที่มี**อัตราส่วนร่วม** (common ratio) หรือ

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างลำดับเรขาคณิต

1,1,1, …

เป็นลำดับที่มีอัตราส่วนร่วมคือ

ตัวอย่างลำดับเรขาคณิต

1,-1,1,-1,1,…

เป็นลำดับที่มีอัตราส่วนร่วมคือ

ตัวอย่างลำดับเรขาคณิต

2,4,8,16,32,…

เป็นลำดับที่มีอัตราส่วนร่วมคือ

รูปแบบของลำดับเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต จะมีรูปแบบคือ

$$r_1, r_1 \bullet r, r_1 \bullet r^2, r_1 \bullet r^3, \ldots$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$r_n =$$

จงหาพจน์ที่ 5 และ 10 ของลำดับเรขาคณิตต่อไปนี้

$$5, 10, 20, \ldots$$

$$2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \ldots$$

ถ้าพจน์ที่ 3 และพจน์ที่ 6 ของลำดับเรขาคณิตหนึ่งมีค่าเป็น 15 และ 120 ตามลำดับ
จงหาพจน์ที่ 1 และ อัตราส่วนร่วมของลำดับเรขาคณิตดังกล่าว

ลำดับ**เรขาคณิต** r_n หนึ่งมีพจน์ที่ 3 และ 6 มีค่าเป็น 8 และ 1 ตามลำดับ

ลำดับเรขาคณิตดังกล่าวมีอัตราส่วนร่วม คือ

1) 2

2) $-\frac{1}{2}$

3) $\frac{1}{2}$

4) $-\frac{1}{8}$

5) $\frac{1}{8}$

ลำดับ**เรขาคณิต** r_n หนึ่งมีพจน์ที่ 3 และ 6 มีค่าเป็น 8 และ 1 ตามลำดับ

r_1 (ลำดับเรขาคณิตพจน์ที่ 1) มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) 2

2) -4

3) 8

4) -16

5) 32

ลำดับ**เรขาคณิต** $\boldsymbol{r}_{\mathbf{n}}$ หนึ่งมีพจน์ที่ 3 และ 6 มีค่าเป็น 8 และ 1 ตามลำดับ

$\boldsymbol{r}_{\mathbf{10}}$ (ลำดับเรขาคณิตพจน์ที่ 10) มีค่าเท่ากับเท่าใด

1) $\frac{1}{16}$

2) $-\frac{1}{4}$

3) 1

4) -4

5) 16

ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์

ลำดับจำกัด (finite sequences) หมายถึง ลำดับที่มีจำนวนพจน์อยู่เป็นจำนวน ๆ หนึ่งเช่น

1,2,3,…,100 เป็นลำดับที่มีจำนวนพจน์อยู่ 100 พจน์

10,20,30,…,100 เป็นลำดับที่มีจำนวนพจน์อยู่ พจน์

1,2,4,…,1024 เป็นลำดับที่มีจำนวนพจน์อยู่ พจน์

ลำดับอนันต์ (infinite sequences) หมายถึง ลำดับที่มีจำนวนพจน์อยู่ไม่จำกัด เช่น

$1,2,3,\ldots,n,...$

$1,2,4,8,16,\ldots,2^{n-1},...$

$1.1,1.01,1.001,1.0001,\ldots, \quad 1+\frac{1}{10^n},...$

พิจารณาลำดับ

$$1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, \ldots, 1+\frac{1}{10^n}, \ldots$$

$$a_n =$$

เมื่อ n มีค่ามากขึ้นมากๆ หรือใช้สัญกรณ์ว่า $n \to \infty$

(เราเรียก $n \to \infty$ ว่า n tends to infinity

หรือ n มีค่าเป็นอนันต์)

$$a_n \to$$

โดยส่วนใหญ่จะใช้สัญกรณ์

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[1+\frac{1}{10^n}\right] = 1$$

(เราเรียกว่า limit n tends to infinity of a_n

หรือ ลิมิต n เข้าสู่อนันต์ของ a_n)

แทน $n \to \infty$ $a_n = 1 + \frac{1}{10^n} \to 1$

ถ้า $n \to \infty$ แล้ว a_n มีค่าเท่ากับค่า A

เราจะกล่าวว่าลำดับ a_n ลู่เข้าสู่ค่า A เมื่อ n มีค่าเป็นอนันต์

a_n converges to A as n tends to infinity.

ถ้า $n \to \infty$ แล้ว a_n ไม่มีค่าใกล้เคียงค่าใดเฉพาะ

เราจะกล่าวว่าลำดับ a_n ลู่ออก

a_n diverges as n tends to infinity.

คุณสมบัติของลิมิต n เข้าสู่อนันต์ของลำดับ a_n และ b_n

ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = B$

1.) $\lim_{n\to\infty} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

2.) $\lim_{n\to\infty} ca_n = c\lim_{n\to\infty} a_n = cA$

3.) $$\lim_{n \to \infty}\left(a_n + b_n\right) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n = A + B$$

4.) $$\lim_{n \to \infty}\left(a_n - b_n\right) = \lim_{n \to \infty} a_n - \lim_{n \to \infty} b_n = A - B$$

5.) $$\lim_{n\to\infty}\left(a_n b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = AB$$

6.) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$$

เมื่อ $B \neq 0$

7.) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

8.) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$

9.) $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ ถ้า $0 < a < 1$

และ $\lim_{n\to\infty} a^n$ ลู่ออกถ้า $a > 1$

จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้า ให้ระบุว่าลู่เข้าสู่ค่าใด

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, \ldots$$

$$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$$

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{15}, \ldots, \frac{n+1}{n^2}, \ldots$$

$$4, 2, 0, \ldots, 6-2n, \ldots$$

อนุกรม (series)

อนุกรมเป็นฟังก์ชัน ซึ่งอยู่ในรูปของผลบวกของลำดับ

เช่น 1+1+1+1+...

1+2+3+4+...

1-1+1-1+-...

1+2+4+8+16+...

อนุกรมเลขคณิต (arithmetic series)

อนุกรมเลขคณิต หมายถึง อนุกรมที่มีพจน์ของผลบวกภายในอยู่ในรูป**ลำดับเลขคณิต** หรือ

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

โดย $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต

ตัวอย่างอนุกรมเลขคณิต

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n-\text{พจน์}}$$

ตัวอย่างอนุกรมเลขคณิต

$$1+2+3+\cdots+100$$

รูปแบบของอนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเลขคณิต จะมีรูปแบบคือ

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + \left(a_1 + d\right) + \left(a_1 + 2d\right) + \cdots + \left(a_1 + (n-1)d\right) \end{aligned}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$S_n =$$

จงหาค่าอนุกรมเลขคณิต

$$3+5+7+\cdots+101$$

จงหาค่าอนุกรมเลขคณิต

$$10 + 7 + 4 + 1 + \cdots + (-32)$$

ลำดับ**เลขคณิต** $\boldsymbol{a_{\mathrm{n}}}$ หนึ่งมีพจน์ที่ 5 และ 11 มีค่า
เป็น -3 และ -15ตามลำดับ
กำหนดให้ $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
เป็นอนุกรมเลขคณิตของลำดับเลขคณิตดังกล่าว
จงหาค่า S_{100}

1) -9400　　2) -9800　　3) -9600

4) 10400　　5) 10600

อนุกรมเรขาคณิต (geometic series)

อนุกรมเรขาคณิต หมายถึง อนุกรมที่มีพจน์ของผลบวกภายในอยู่ในรูป**ลำดับเรขาคณิต** หรือ

$$S_n = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$$

โดย $r_1, r_2, \ldots, r_n$ เป็นลำดับเรขาคณิต

ตัวอย่างอนุกรมเรขาคณิต

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n-\text{พจน์}}$$

ตัวอย่างอนุกรมเรขาคณิต

$$\underbrace{1-1+1-+\cdots+1}_{n-\text{พจน์}}$$

ตัวอย่างอนุกรมเรขาคณิต

$$1+2+4+\cdots+1024$$

รูปแบบของอนุกรมเรขาคณิต

อนุกรมเรขาคณิต จะมีรูปแบบคือ

$$S_n = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n$$

$$= r_1 + \left(r_1 \bullet r\right) + \left(r_1 \bullet r^2\right) + \cdots + \left(r_1 \bullet r^{n-1}\right)$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$S_n =$$

รูปแบบของอนุกรมเรขาคณิต

$$S_n = r_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

หรือ

$$S_n = r_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

เมื่อ $r \neq 1$

ตัวอย่างอนุกรมเรขาคณิต

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 1024$$

จงหาค่าอนุกรมเรขาคณิต

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{10}}$$

จงหาค่าอนุกรมเรขาคณิต 8 พจน์ของอนุกรม

$$2 + 6 + 18 + 54 + \cdots$$

ลำดับ**เรขาคณิต** $r_{\mathbf{n}}$ หนึ่งมีพจน์ที่ 3 และ 6 มีค่าเป็น 8 และ 1 ตามลำดับ

กำหนดให้ $S_n = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$

เป็นอนุกรมเรขาคณิตของลำดับเรขาคณิตดังกล่าว

จงหาค่า S_6

1) 48 2) 56 3) 60

4) 62 5) 63

อนุกรมจำกัดและอนุกรมอนันต์

อนุกรมจำกัด (finite series) หมายถึง อนุกรมที่มีผลรวมของจำนวนพจน์เป็นจำนวน ๆ หนึ่งเช่น

1+2+3+…+100 เป็นอนุกรมที่มีจำนวนพจน์อยู่ 100 พจน์ มีค่าเท่ากับ

1+2+4+…+1024 เป็นอนุกรมที่มีจำนวนพจน์อยู่ พจน์ มีค่าเท่ากับ

อนุกรมอนันต์ (infinite series) หมายถึง อนุกรมที่มีผลรวมของจำนวนพจน์อยู่ไม่จำกัด เช่น

$1+2+3+\ldots+n+\ldots$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$$

$$\frac{1}{2\bullet 3}+\frac{1}{3\bullet 4}+\frac{1}{4\bullet 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$$

ถ้า $n \to \infty$ แล้ว S_n มีค่าเท่ากับค่า A

เราจะกล่าวว่าอนุกรม S_n ลู่เข้าสู่ค่า A เมื่อ n มีค่าเป็นอนันต์

Series S_n converges to A as n tends to infinity.

ถ้า $n \to \infty$ แล้ว S_n ไม่มีค่าใกล้เคียงค่าใดเฉพาะ

เราจะกล่าวว่าอนุกรม S_n ลู่ออก

Series S_n diverges as n tends to infinity.

ตัวอย่าง อนุกรมฮาร์มอนิก

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

เป็นอนุกรมที่ลู่ออก

กำหนดให้

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \tfrac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) > 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{2}{2}$$

$$\begin{aligned}
s_8 &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\right) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{16} &= 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\
&> 1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{8} + \cdots + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{16} + \cdots + \tfrac{1}{16}\right) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{4}{2}
\end{aligned}$$

นอกจากนี้พบว่า $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}, s_{64} > 1 + \frac{6}{2}, s_{128} > 1 + \frac{7}{2}$

และ

$$s_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

แสดงว่า $\lim_{n\to\infty} s_{2^n} \geq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{n}{2}\right)$

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty$

($s_{2^n} \to \infty$ เมื่อ $n \to \infty$)

จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้า ให้ระบุว่าลู่เข้าสู่ค่าใด

$1+2+3+\ldots+n+\ldots$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots$$

$$\frac{1}{2\bullet 3}+\frac{1}{3\bullet 4}+\frac{1}{4\bullet 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$$

ลำดับ**เรขาคณิต** $\boldsymbol{r_n}$ หนึ่งมีพจน์ที่ 3 และ 6 มีค่าเป็น 8 และ 1 ตามลำดับ

กำหนดให้ $S_n = r_1 + r_2 + \cdots + r_n$

จงหาค่า $\lim_{n \to \infty} S_n$

1) 512 2) 256 3) 128

4) 64 5) 32

การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

เนื่องด้วยเป็นการยากที่จะทราบว่าอนุกรมอนันต์ที่สนใจนั้น มีค่าที่แน่นอนเป็นเท่าใด บางครั้งเราต้องการทราบเพียงแค่ว่าอนุกรมอนันต์ดังกล่าวนั้นลู่เข้า หรือ ลู่ออก ซึ่งในที่นี้จะนำเสนอวิธีการเบื้องต้นที่จะใช้ตรวจสอบว่าอนุกรมดังกล่าวนั้นลู่เข้าหรือไม่

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้ เกี่ยวข้องกับการลู่เข้าของอนุกรม จะกล่าวถึงโดยไม่ได้แสดงการพิสูจน์ ผู้อ่านสามารถหาการพิสูจน์ทฤษฎีบทดังกล่าวได้ในหนังสือ Calculus ทั่วไป เช่น

Stewart, J., *Calculus, early transcendental 6th ed.*, 2008, USA, Thomson Brooks/Cole

ทฤษฎีบท ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ตัวอย่าง พิจารณาอนุกรม $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

หมายเหตุ ในทางกลับกัน ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ อาจจะลู่เข้า หรือลู่ออกก็ได้

ตัวอย่างเช่น พิจารณาอนุกรมฮาร์โมนิก

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

ทฤษฎีบท ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ หรือ ไม่สามารถหาค่า $\lim_{n\to\infty} a_n$ ได้

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

ตัวอย่าง พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$

ต่อไปนี้ เพื่อความสะดวก จะใช้สัญกรณ์ต่อไปนี้

$\sum a_n$ แทน $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\sum b_n$ แทน $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$\sum c_n$ แทน $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

$\vdots$

ทฤษฎีบท ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ ลู่เข้าแล้ว อนุกรมต่อไปนี้จะลู่เข้าด้วย $\sum ca_n$ (เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ) $\sum(a_n+b_n)$, $\sum(a_n-b_n)$ และ

$$\sum ca_n = c\sum a_n$$

$$\sum(a_n+b_n) = \sum a_n + \sum b_n$$

$$\sum(a_n-b_n) = \sum a_n - \sum b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{N} a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

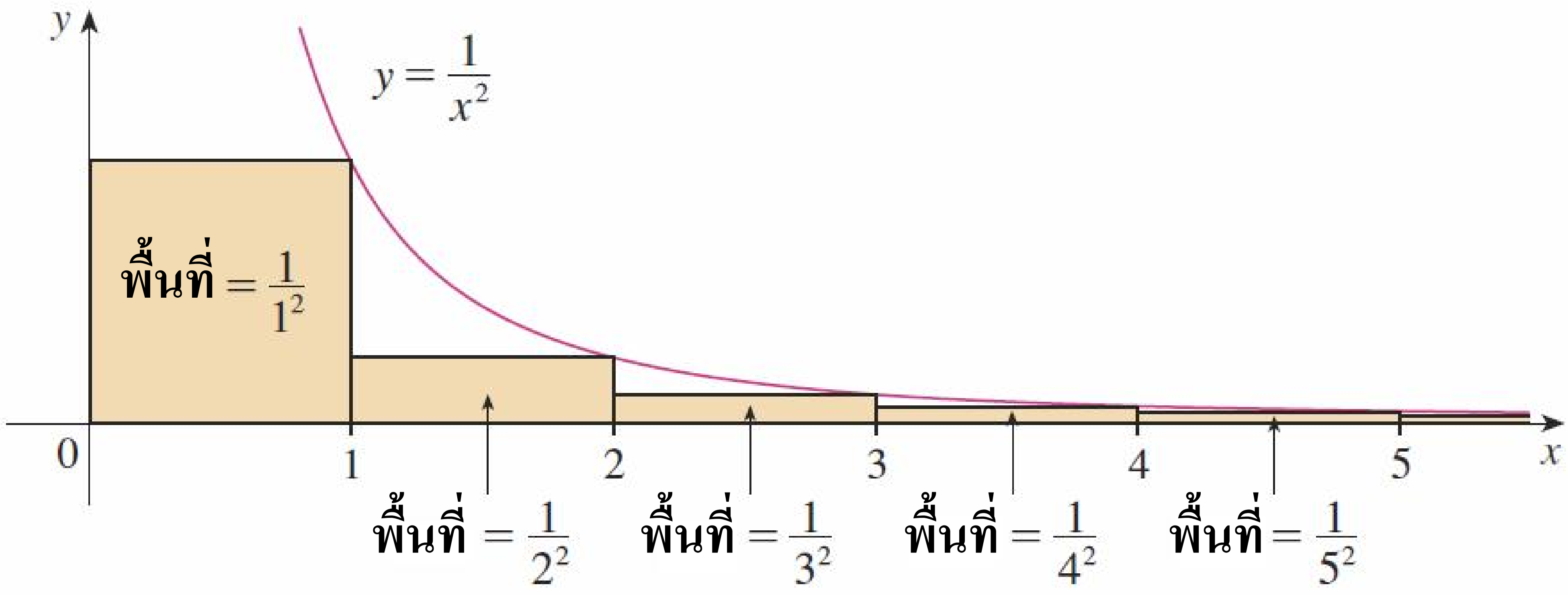
ตัวอย่าง จงหาค่า $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n(n+1)}-\frac{1}{2^n}\right)$

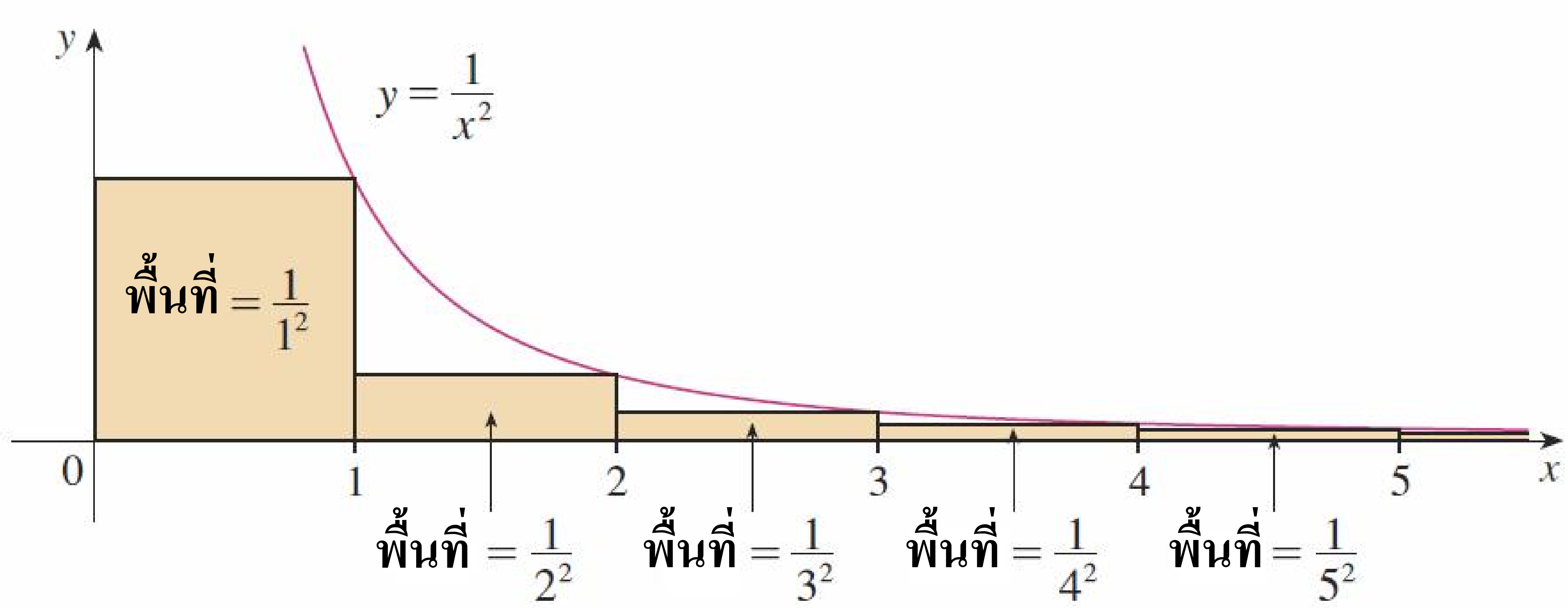
การทดสอบด้วยปริพันธ์
(The Integral Test)

โดยทั่วไปแล้วเป็นการยากที่จะทราบว่าอนุกรมอนันต์ที่สนใจนั้น มีค่าที่แน่นอนเป็นเท่าใด ด้วยแนวคิดทางด้านการหาปริพันธ์ จะช่วยให้สามารถประมาณค่าอนุกรมและประเมินได้ว่าอนุกรมดังกล่าวลู่เข้าหรือไม่

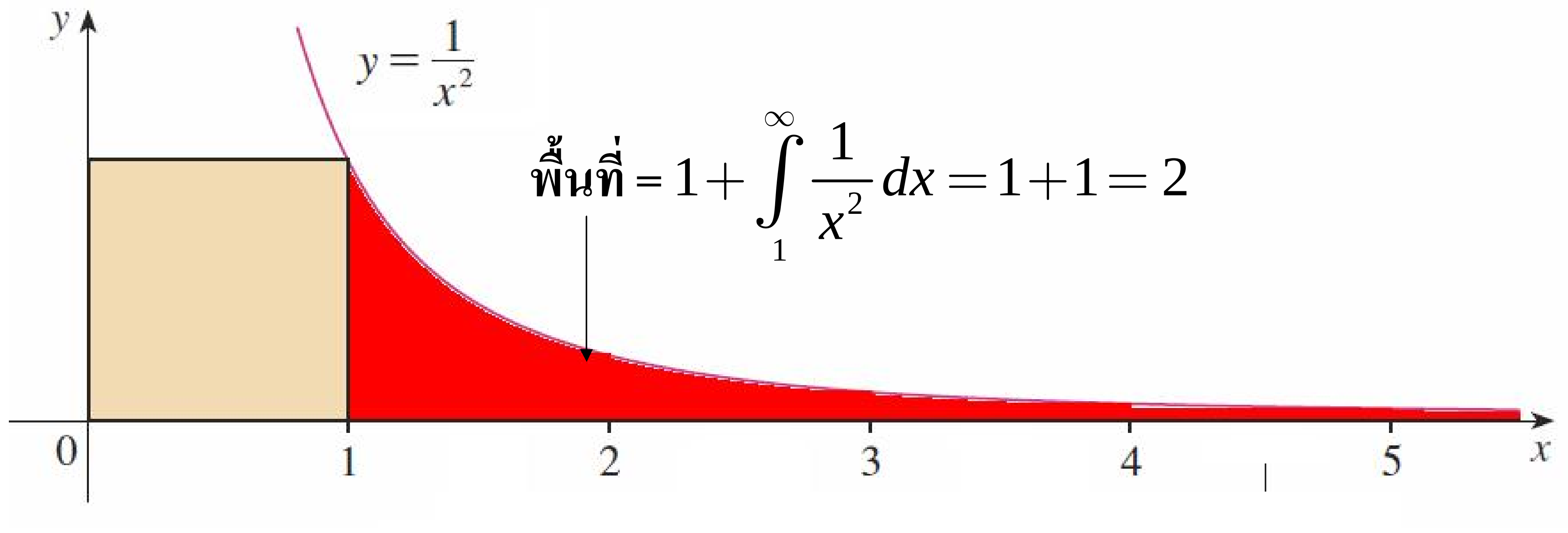
แนวคิด

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$





y
$y = \frac{1}{x^2}$
พื้นที่ $= \frac{1}{1^2}$
0
1
2
3
4
5
x
พื้นที่ $= \frac{1}{2^2}$
พื้นที่ $= \frac{1}{3^2}$
พื้นที่ $= \frac{1}{4^2}$
พื้นที่ $= \frac{1}{5^2}$



y
$y = \frac{1}{x^2}$
พื้นที่ $= 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1 + 1 = 2$
0
1
2
3
4
5
x

จากตัวอย่างพบว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots<2$$

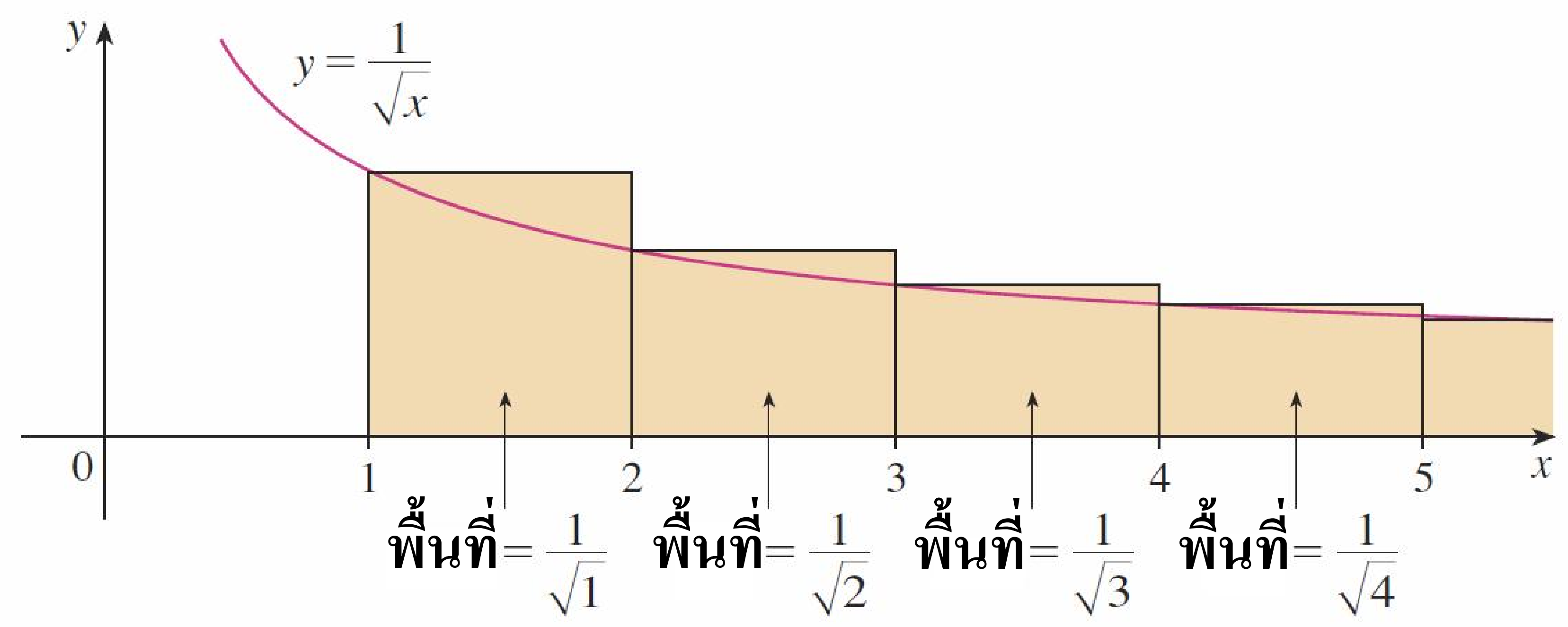
Leonhard Euler (1707-1783) เป็นผู้แรกที่แสดงให้เห็นว่า

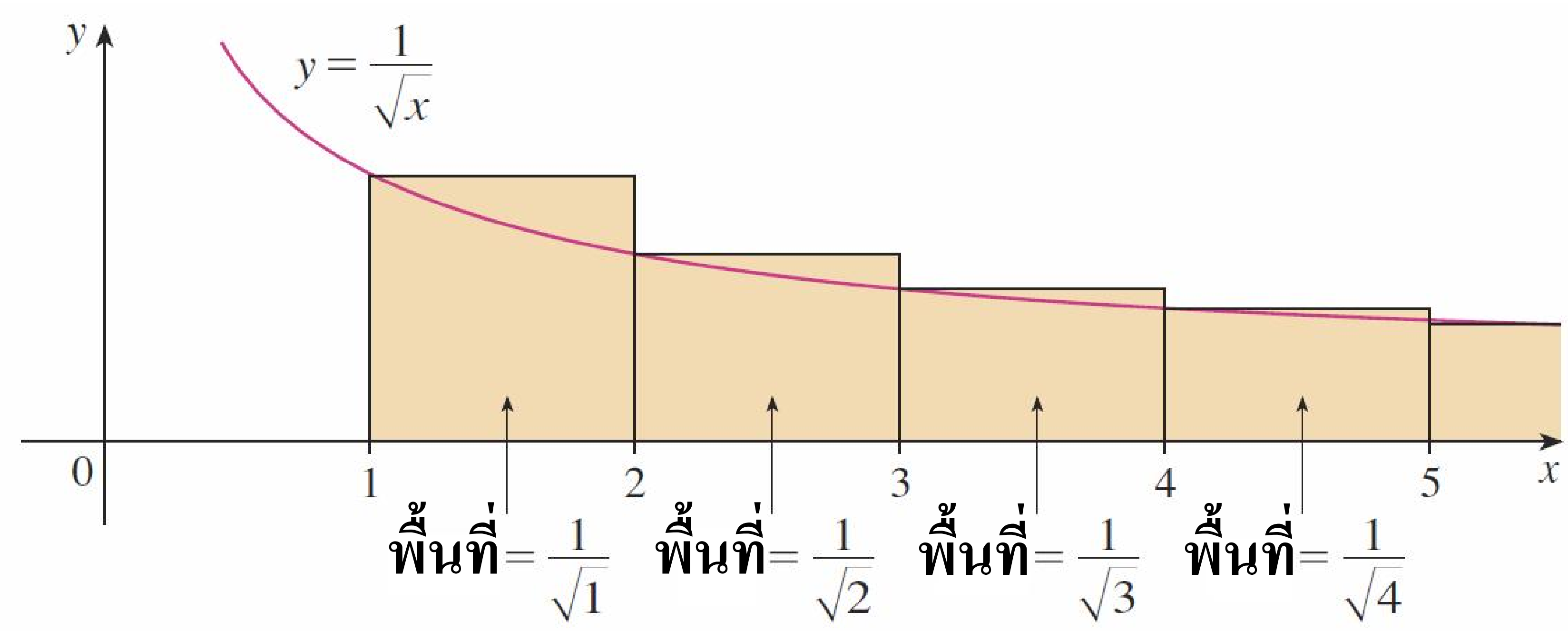
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\approx 1.644934068...$$

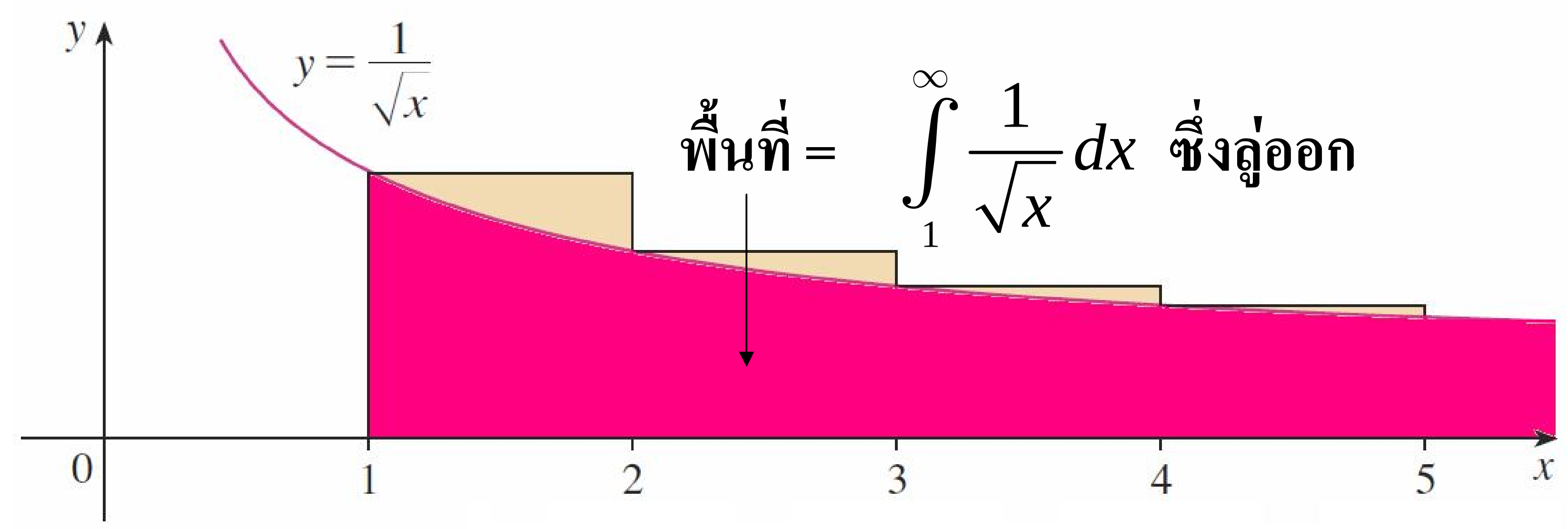
โดยเราสามารถใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series)
ซึ่งจะได้เรียนถัดไปมาช่วยในการแสดงการหาค่าดังกล่าวได้

แนวคิด

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \cdots$$




y
$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
0
1
2
3
4
5
x
พื้นที่ $= \frac{1}{\sqrt{1}}$
พื้นที่ $= \frac{1}{\sqrt{2}}$
พื้นที่ $= \frac{1}{\sqrt{3}}$
พื้นที่ $= \frac{1}{\sqrt{4}}$


y
$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$
พื้นที่ $= \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ ซึ่งลู่ออก
0
1
2
3
4
5
x

จากตัวอย่างพบว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots>\int_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง มีค่าไม่ติดลบ และ เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง $[1,\infty)$ โดยที่ $f(n)=a_n, n=1,2,3,\ldots$ ดังนั้น

1) ถ้า $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

2) ถ้า $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

หมายเหตุ โดยทั่วไปแล้ว $\int_1^{\infty} f(x)\,dx \neq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

ตัวอย่าง พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

ตัวอย่าง พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

ทฤษฎีบท อนุกรม p (p-series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

ลู่เข้าถ้า $p > 1$ **ลู่ออก**ถ้า $p \leq 1$

การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ
(The Comparison Test)

ถ้าทราบว่าอนุกรมที่เราสนใจ มีรูปแบบใกล้เคียง หรือค่าประมาณใกล้เคียงกับอนุกรมที่เรารู้จักหรือทราบคุณสมบัติก่อนหน้านี้แล้ว เราสามารถใช้การทดสอบด้วยการเปรียบเทียบ เชื่อมโยงความสัมพันธ์ของสองอนุกรมดังกล่าวด้วยกันได้

ทฤษฎีบท ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมที่มีพจน์แต่ละพจน์เป็นค่าบวกแล้ว

1) ถ้า $\sum a_n$ **ลู่เข้า**และ $a_n \geq b_n$ ทุก ๆ ค่า n แล้ว $\sum b_n$ **ลู่เข้า**ด้วย

2) ถ้า $\sum a_n$ **ลู่ออก**และ $a_n \leq b_n$ ทุก ๆ ค่า n แล้ว $\sum b_n$ **ลู่ออก**ด้วย

อนุกรมที่มักจะนำมาใช้เปรียบเทียบ

1. อนุกรมเรขาคณิต $\sum r_1 r^{n-1}$

ลู่เข้า ถ้า $|r| < 1$

ลู่ออก ถ้า $|r| > 1$

2. อนุกรม p $\sum \frac{1}{n^p}$

ลู่เข้า ถ้า $p > 1$

ลู่ออก ถ้า $p \le 1$

ตัวอย่าง พิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n^2 + 7n + 1}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง พิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง พิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 3^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ทฤษฎีบท ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ และ$\sum b_n$ เป็นอนุกรมที่มีพจน์แต่ละพจน์เป็นค่าบวกแล้ว และ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวที่**ไม่เป็นศูนย์** (เป็นตัวเลขและไม่ใช่ค่า ∞ หรือ 0)

1) ถ้า $\sum a_n$ **ลู่เข้า** แล้ว $\sum b_n$ **ลู่เข้า**ด้วย

2) ถ้า $\sum a_n$ **ลู่ออก**แล้ว $\sum b_n$ **ลู่ออก**ด้วย

ตัวอย่าง พิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง พิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{\sqrt{7+n^5}}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

อนุกรมสลับ (alternating series)

อนุกรมสลับ หมายถึงอนุกรมที่มีพจน์สลับไปมาระหว่างค่าบวกและลบ

ตัวอย่างเช่น

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$$

โดยทั่วไปเรามักใช้สัญกรณ์

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

แทนอนุกรมสลับ เมื่อ $b_n=|a_n|$

ตัวอย่างเช่น

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \qquad a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n},b_n=\frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\frac{5}{6}+\frac{6}{7}-\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$$

$$a_n=(-1)^{n}\frac{n}{n+1},b_n=\frac{n}{n+1}$$

ทฤษฎีบท ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ หรือ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}b_n$ $\left(b_n \geq 0\right)$

เป็นอนุกรมสลับ และ

1) $b_n \geq b_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ $n = 1, 2, 3, \ldots$

2) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

แล้วอนุกรมสลับดังกล่าวจะเป็นอนุกรม**ที่ลู่เข้า**

ตัวอย่าง

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$$

พบว่า $b_1=1>b_2=\frac{1}{2}>b_3=\frac{1}{3}>b_4=\frac{1}{4}>\cdots$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

ดังนั้นอนุกรมสลับนี้เป็นอนุกรมสลับที่ลู่เข้า

แต่ !!! อนุกรมฮาร์โมนิก $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ ลู่ออก

ตัวอย่าง $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}$

ตัวอย่าง $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{4n-1}$

การลู่เข้าสัมบูรณ์ (absolute convergence)

พิจารณาอนุกรม $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

ดังนั้น $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ **ลู่เข้า** เราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ มีสมบัติ**ลู่เข้าสัมบูรณ์**

ตัวอย่าง

อนุกรม	ลู่เข้า	ลู่เข้าสัมบูรณ์
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$	✓	✓
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$	✓	×
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{\sqrt{n}}$	×	×

การลู่เข้ามีเงื่อนไข (conditionally convergence)

พิจารณาอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$

ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ **ไม่ลู่เข้า** แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่เข้า**

เราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ มีสมบัติ**ลู่เข้ามีเงื่อนไข**

ตัวอย่าง

อนุกรม	ลู่เข้า	ลู่เข้าสัมบูรณ์	ลู่เข้ามีเงื่อนไข
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$	✓	✓	×
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$	✓	×	✓
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{\sqrt{n}}$	×	×	×

ทฤษฎีบท ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอุนกรมลู่เข้าสมบูรณ์ แล้วจะเป็นอนุกรม**ลู่เข้า**ด้วย

ตัวอย่าง จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

การทดสอบด้วยอัตราส่วน
(The Ratio Test)

การทดสอบด้วยอัตราส่วน เป็นหนึ่งในวิธีการทดสอบอนุกรมว่าอนุกรมที่พิจารณาจะลู่เข้าหรือไม่ โดยพิจารณาจากลิมิตของอัตราส่วนของค่าของพจน์ที่อยู่ติดกันในอนุกรมนั้น

การทดสอบด้วยอัตราส่วน

1) ถ้า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่เข้าสมบูรณ์**

(และ**ลู่เข้า**ด้วย)

2) ถ้า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r > 1$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **ลู่ออก**

3) ถ้า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ แล้ว ด้วยวิธีการนี้**ไม่สามารถสรุป**ได้ว่าอนุกรม

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้าหรือไม่

ตัวอย่าง พิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง พิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

แบบฝึกหัด

จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{k^2-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+2)}{(k+3)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\cos 1)^k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n}+\frac{2}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(0.8)^{n-1} - (0.3)^n]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$$

$$1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\frac{1}{125}+\cdots$$

$$1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\cdots$$

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\frac{1}{14}+\frac{1}{17}+\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 2\sqrt{n}}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + 2}{n(n + 1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+1} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{n^4-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n4^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\sin n}{10^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^{1.2}} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{3+10^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3^n}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{n\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{3n^4+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$$

$$-\frac{1}{3}+\frac{2}{4}-\frac{3}{5}+\frac{4}{6}-\frac{5}{7}+\cdots$$

$$\frac{4}{7}-\frac{4}{8}+\frac{4}{9}-\frac{4}{10}+\frac{4}{11}-\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}-\cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+4)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n-1}{2n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{\sqrt{n^{3}+2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{10^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1 + 2\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{e^{1/n}}{n}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\ln n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^{3/4}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n}{5}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^k \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{100^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n^4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1.1)^n}{n^4} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\sqrt{n^3+2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 4n}{4^n}$$