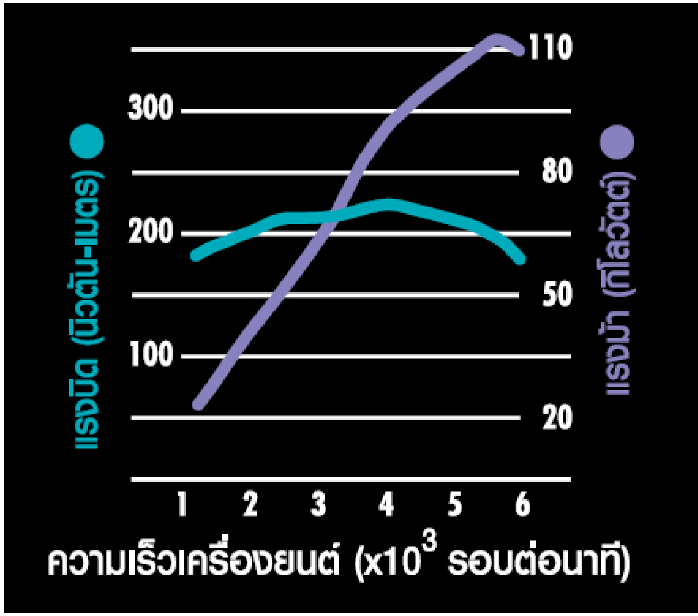
ค่าสุดขีดและจุดอานม้า

Extreme Values and Saddle Points

ในการศึกษาที่ผ่านมา เราทราบวิธีการหา<u>**ค่าสูงสุด**</u> และ<u>**ค่าต่ำสุด**</u>ของฟังก์ชัน 1 ตัวแปร เนื้อหาที่จะกล่าวต่อไปนี้ เป็นการขยายแนวความคิดดังกล่าว เพื่อใช้หา <u>**ค่าสูงสุด**</u> และ<u>**ต่ำสุด**</u> ของ<u>*ฟังก์ชัน 2 ตัวแปร*</u>

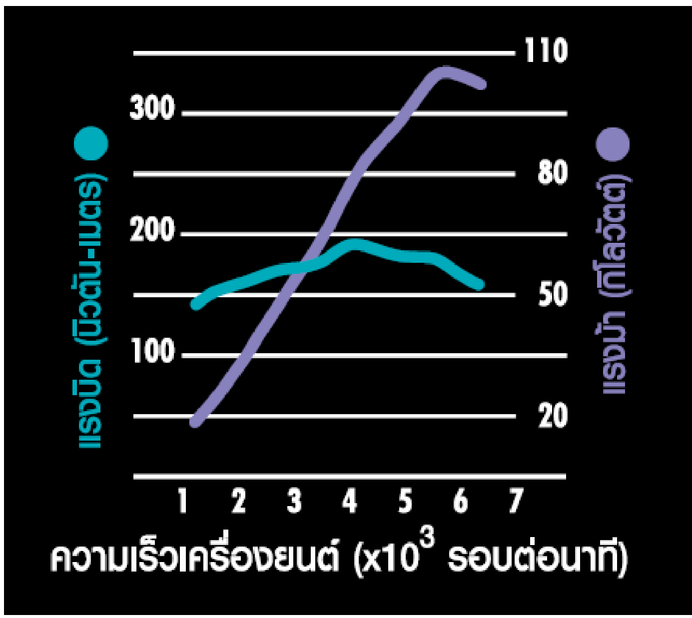
ตัวอย่างการประยุกต์ การหาค่าสูงสุดต่ำสุด



เครื่องยนต์ 2AZ-FE VVT-i 2.4 ลิตร

แรงม้าสูงสุด(EEC net)
112 กิโลวัตต์ (152 แรงม้า) ที่ 5600 รอบต่อนาที
แรงบิดสูงสุด(EEC net)
218 นิวตัน-เมตร (22.2 กิโลกรัม-เมตร) ที่ 3800-4200 รอบต่อนาที

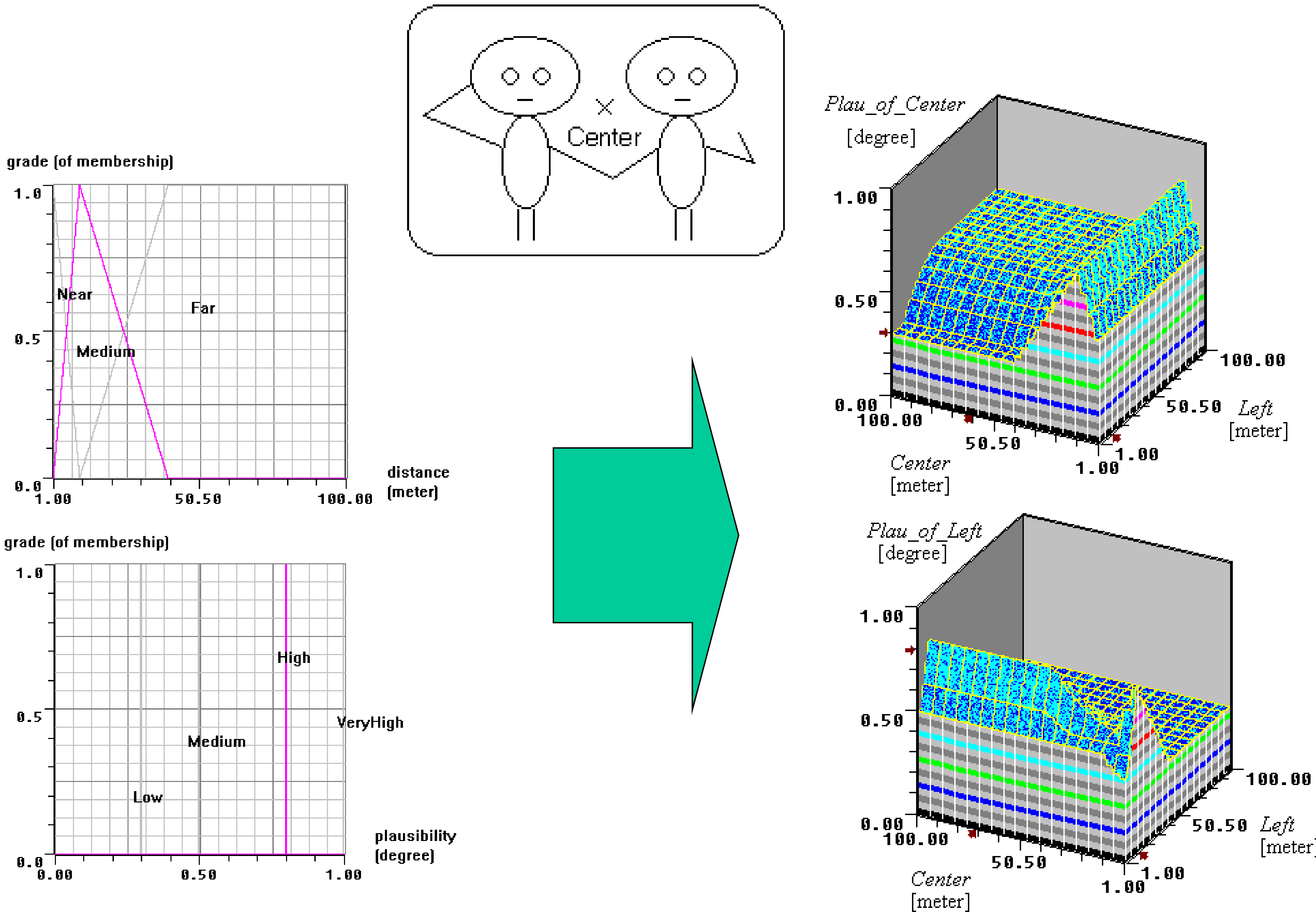
รุ่น 2.4Q, 2.4G



เครื่องยนต์ 1AZ-FE VVT-i 2.0 ลิตร

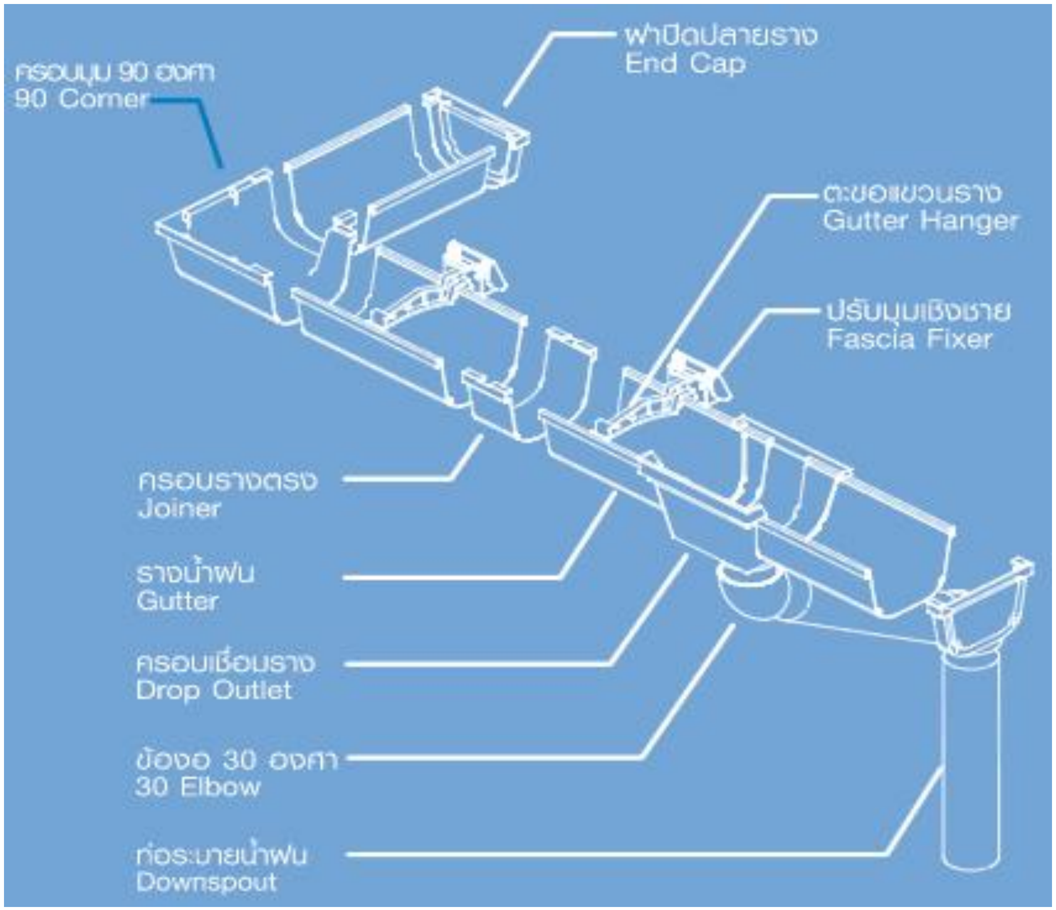
แรงม้าสูงสุด(EEC net)
106 กิโลวัตต์ (144 แรงม้า) ที่ 5600 รอบต่อนาที
แรงบิดสูงสุด(EEC net)
190 นิวตัน-เมตร (19.4 กิโลกรัม-เมตร) ที่ 4000 รอบต่อนาที

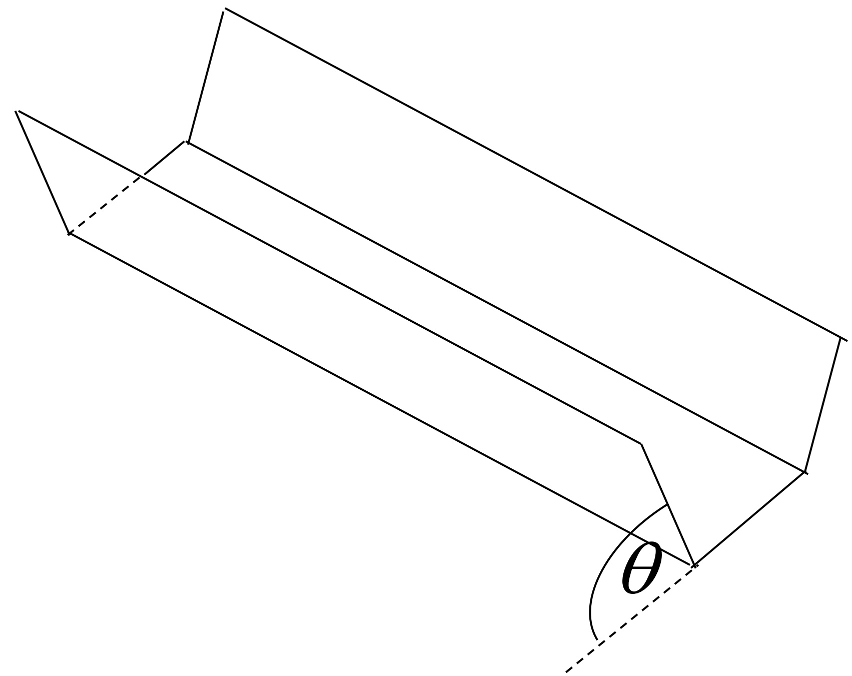
รุ่น 2.0G, 2.0E

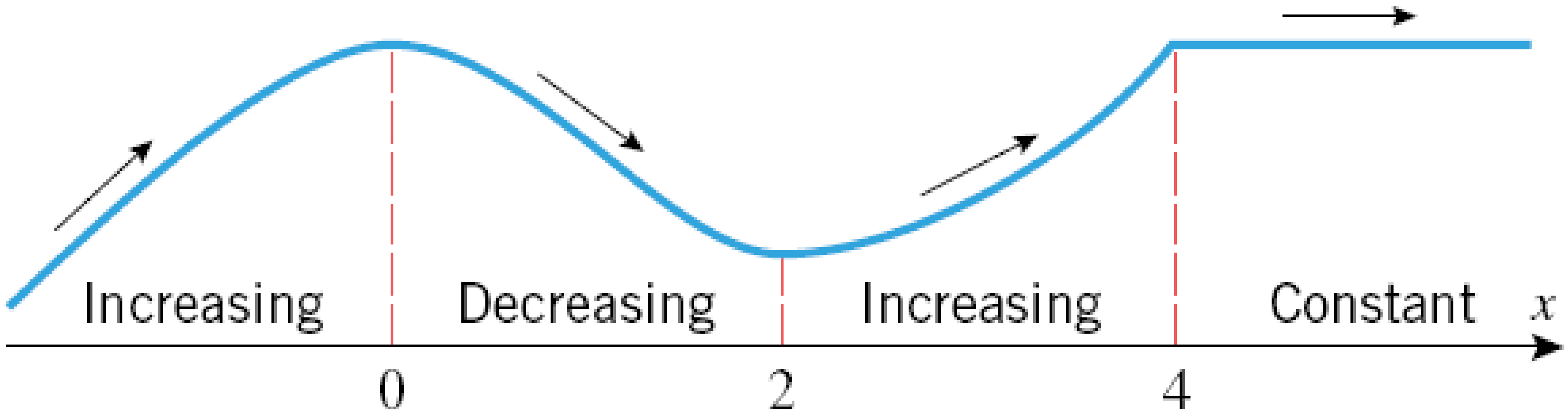


grade (of membership)
1.0
0.5
0.0
Near
Medium
Far
1.00
50.50
100.00
distance
(meter)
grade (of membership)
1.0
0.5
0.0
High
VeryHigh
Medium
Low
0.00
0.50
1.00
plausibility
(degree)
Center
Plau_of_Center
[degree]
1.00
0.50
0.00
100.00
50.50
1.00
Left
[meter]
Center
[meter]
Plau_of_Left
[degree]
1.00
0.50
0.00
100.00
50.50
1.00
Left
[meter]
Center
[meter]

มุมและรูปร่างที่เหมาะสมสำหรับการทำรางน้ำ

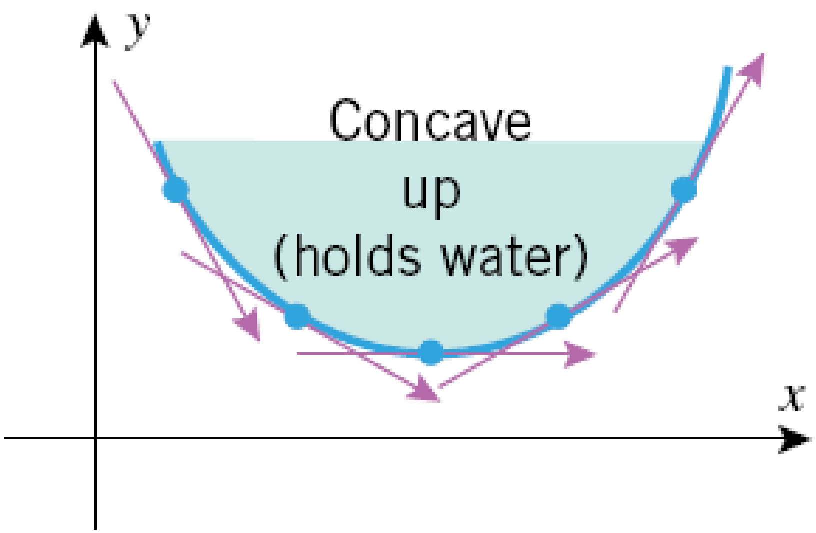


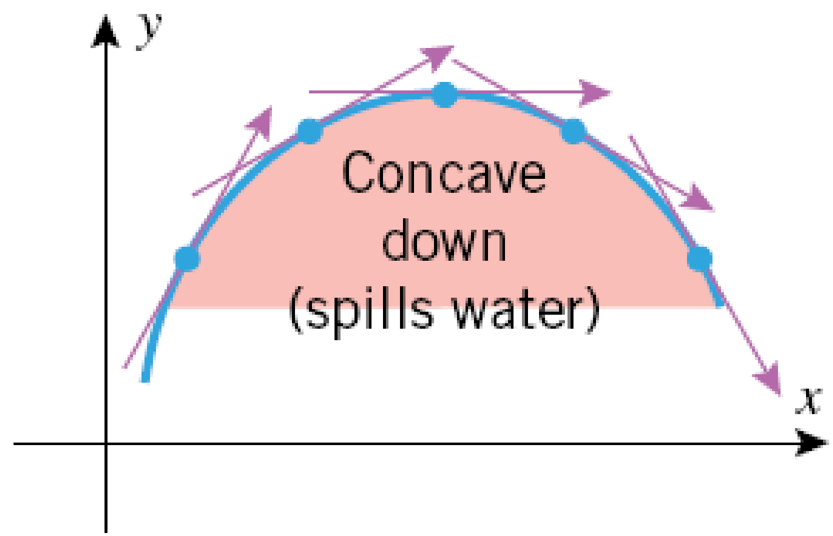



Increasing
Decreasing
Increasing
Constant
x
0
2
4

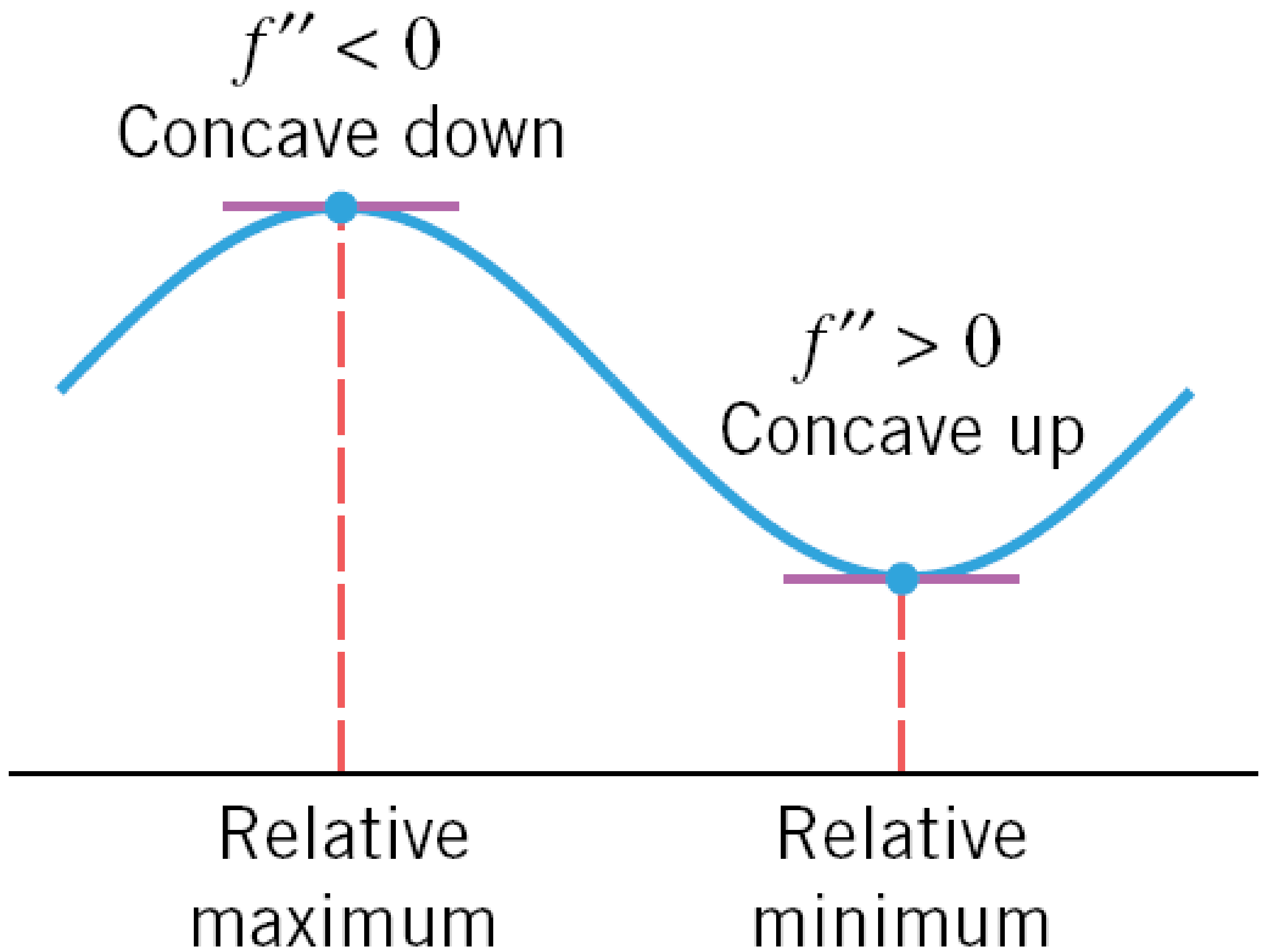
$f'(x)$ ➡ อนุพันธ์ ➡ ความชัน

$f''(x)$ ➡ $\dfrac{d}{dx} f'(x)$ ➡ การเปลี่ยนแปลงความชัน





$f''(x)......0$ $\qquad$ $f''(x)......0$


$f'' < 0$
Concave down
$f'' > 0$
Concave up
Relative maximum
Relative minimum

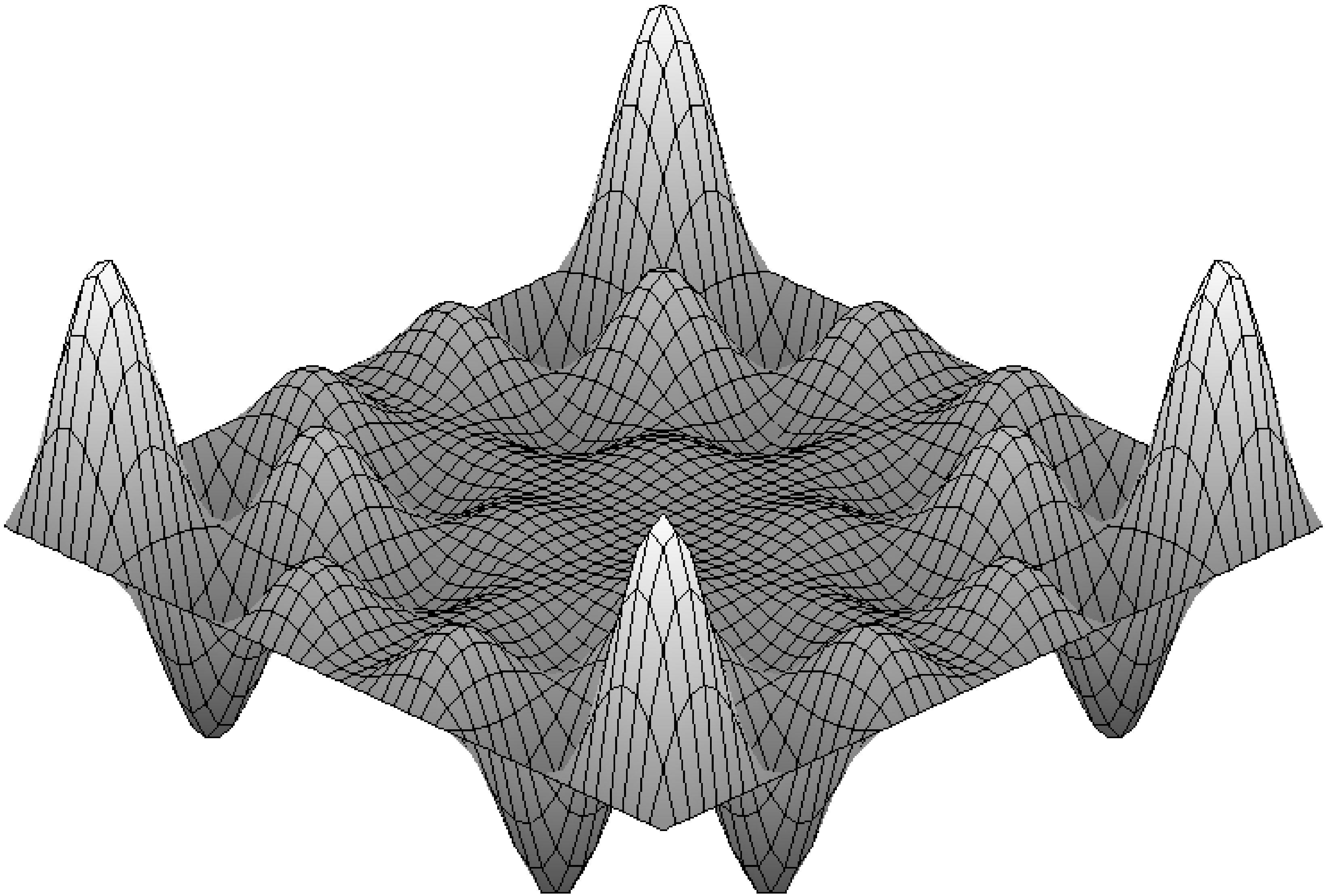
บทนิยาม

ให้ $f(x,y)$ นิยามบนบริเวณ R โดยที่ เป็นสมาชิกใดๆ ใน R

$f(a,b)$ เป็น<u>**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์**</u> (relative maximum) ของ f ถ้าจุด(a,b) อยู่ในบริเวณ R และ

$$f(a,b) \geq f(x,y)$$

สำหรับจุด(x,y)ทุกๆ จุดที่อยู่รอบๆ (a,b)



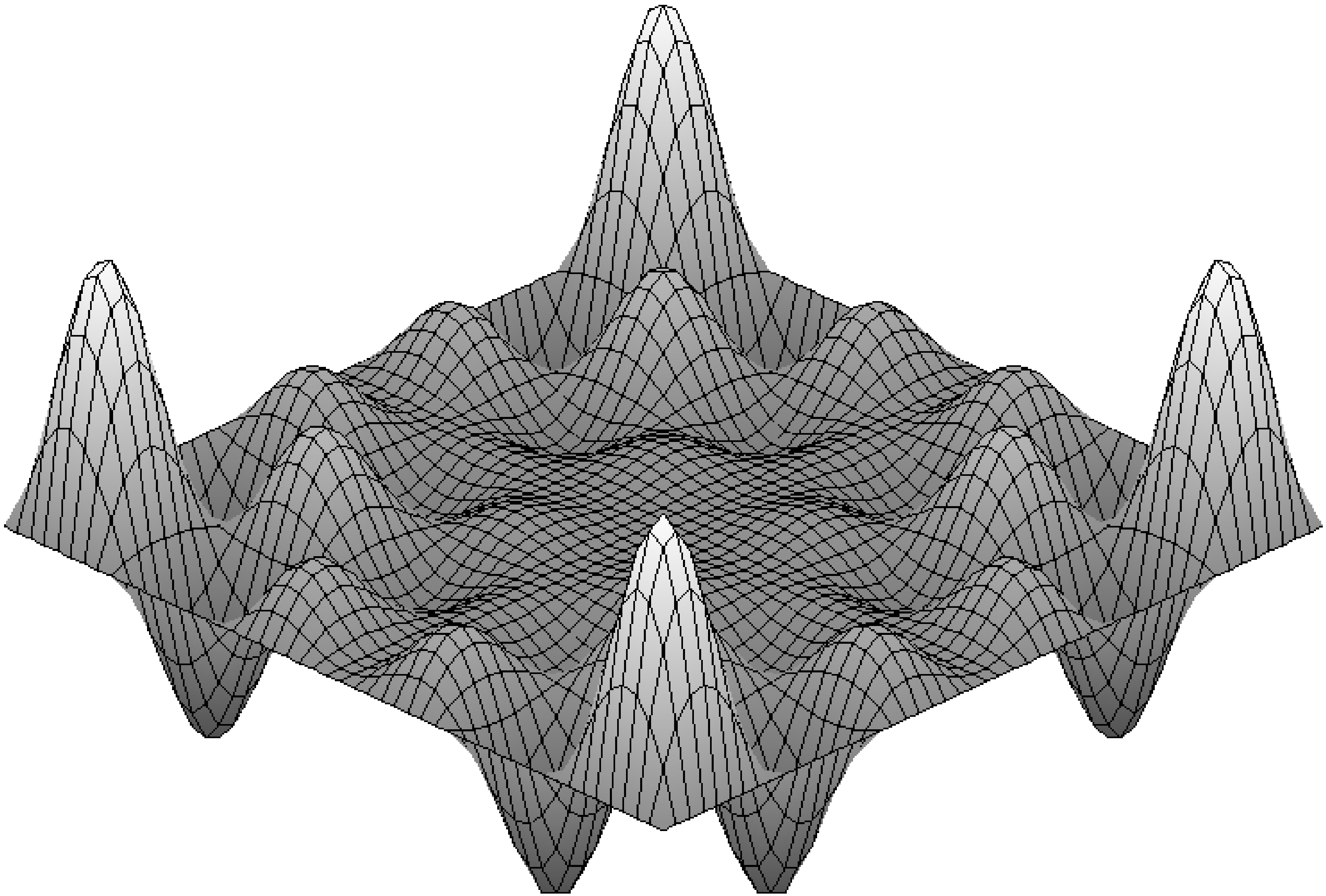
บทนิยาม

ให้ $f(x,y)$ นิยามบนบริเวณ R โดยที่ เป็นสมาชิกใดๆ ใน R

$f(a,b)$ เป็น<u>**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์**</u> (relative minimum) ของ f ถ้าจุด (a,b) อยู่ในบริเวณ R และ

$$f(a,b) \le f(x,y)$$

สำหรับจุด(x,y)ทุกๆ จุดที่อยู่รอบๆ (a,b)



เพื่อความสะดวกเราเรียก

<u>ค่าสูงสุดสัมพัทธ์</u> และ **<u>ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์</u>**

รวมกันเป็น

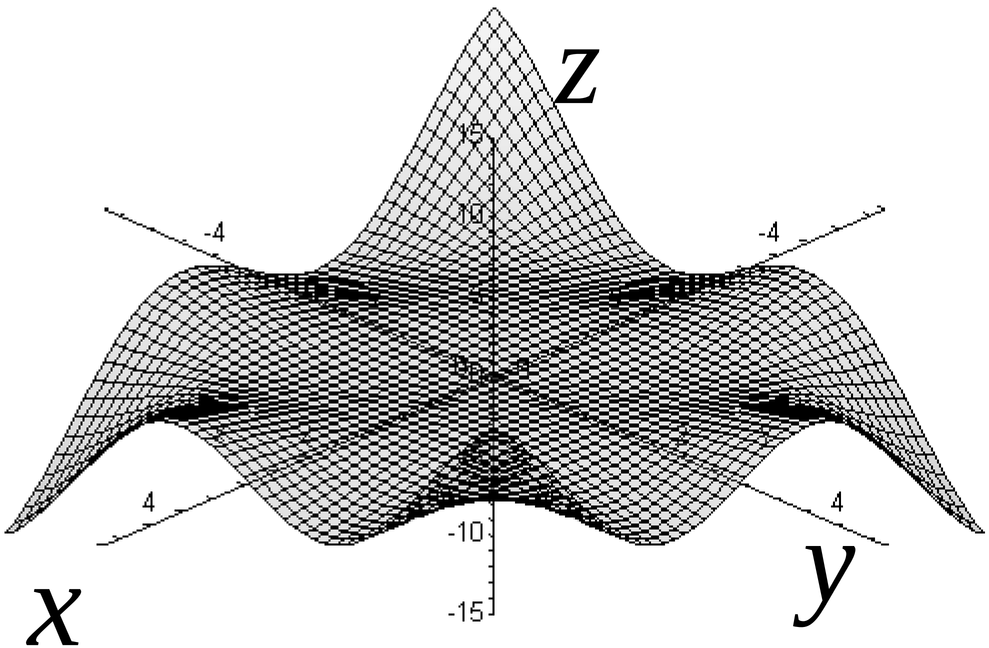
<u>ค่าสุดขีดสัมพัทธ์</u>

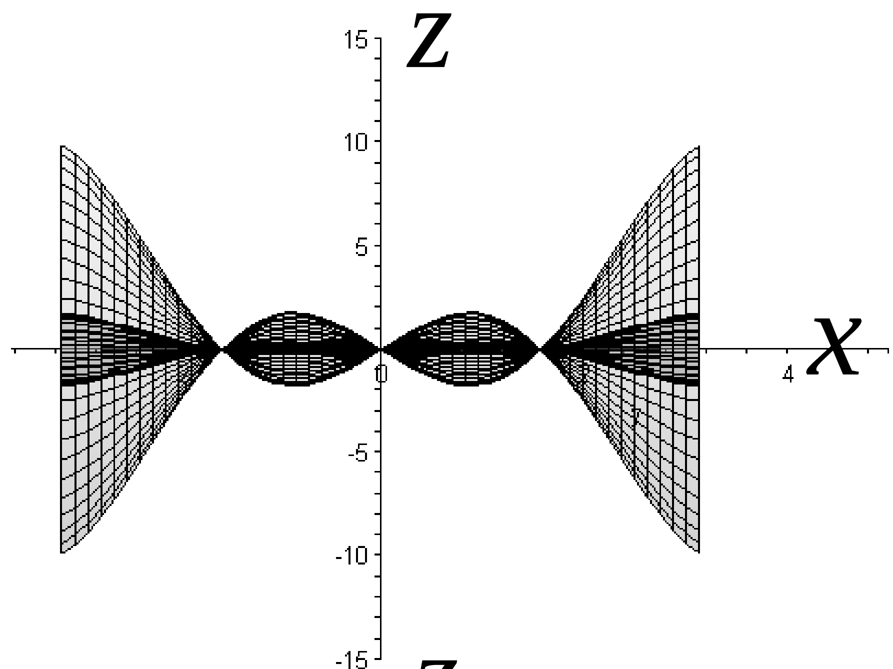
(relative extremum)

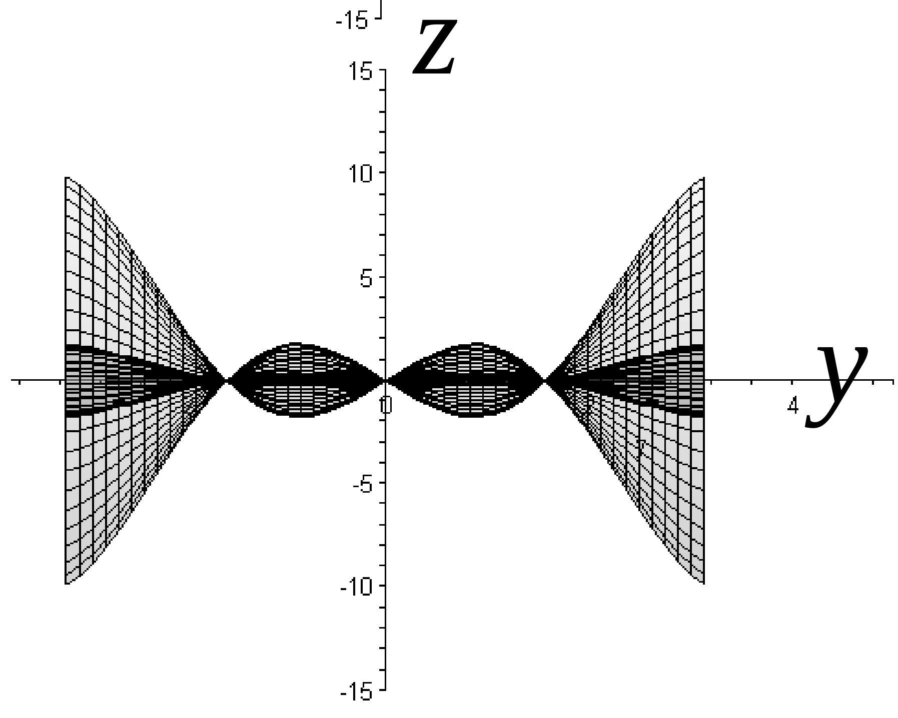
เรียนภาษาอังกฤษใน Calculus !!!!

เอกพจน์ (singular)	**พหูพจน์ (plural)**
minimum	minima
maximum	maxima
extremum	extrema
phenomenon	phenomena

$$z = xy(\cos x)(\cos y)$$







การทดสอบอนุพันธ์อันดับหนึ่ง
สำหรับค่าสุดขีดสัมพัทธ์

ให้ $f(x,y)$ นิยามบนบริเวณ R โดยที่
เป็นสมาชิกใดๆ ใน R

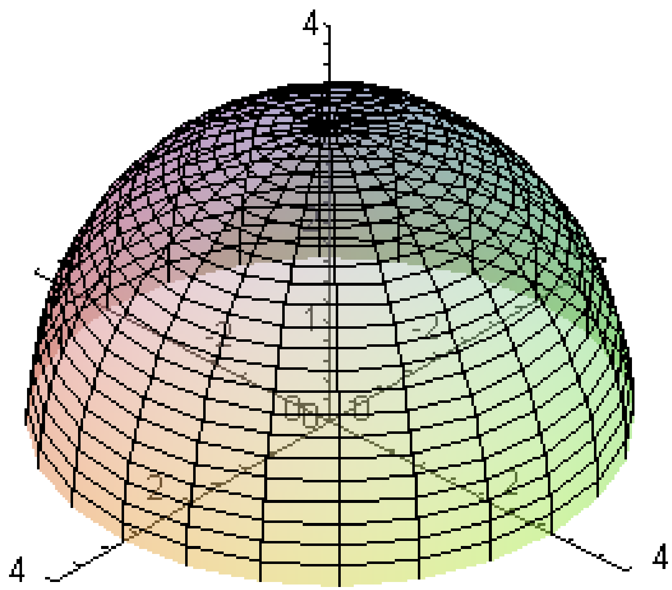
ถ้า $f(a,b)$ เป็น**ค่าสุดขีดสัมพัทธ์**และ สามารถ
หาอนุพันธ์ของ f ที่จุด (a,b) ได้แล้ว

$$f_x(a,b)=0 \quad \text{และ} \quad f_y(a,b)=0$$

จงหาค่าของอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน

$$f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$$

เทียบกับตัวแปร x และ y โดยพิจารณาที่จุด $(0,0)$



4
4
4

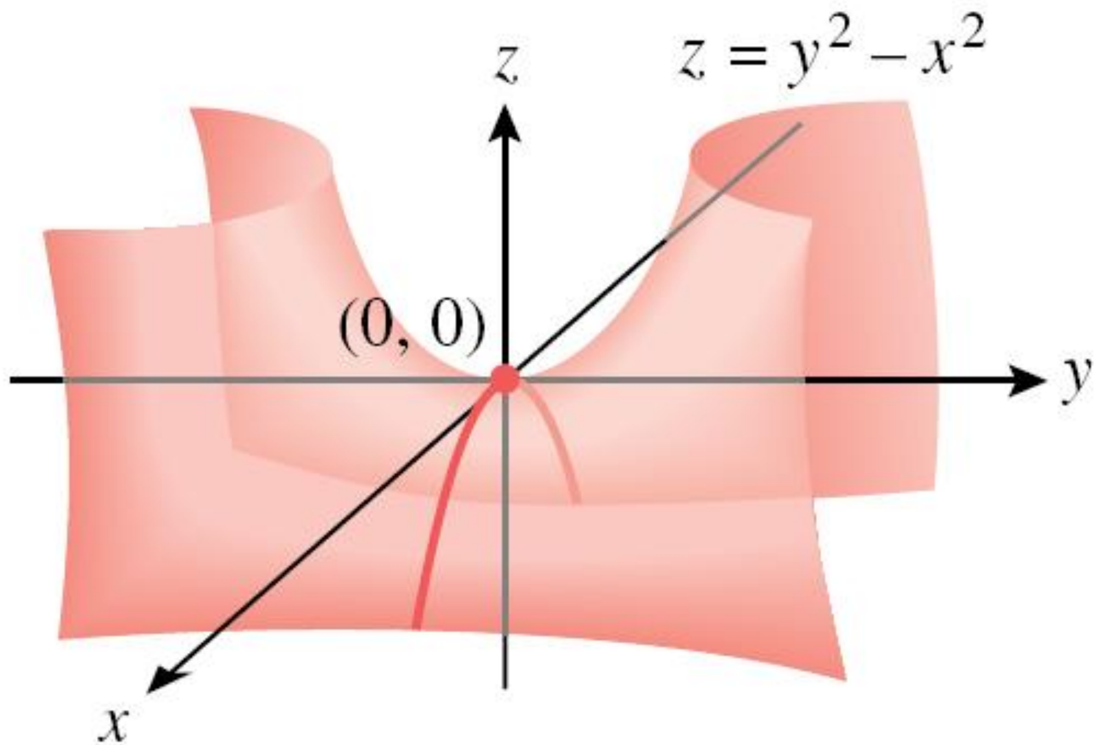
ระวังบทกลับของทฤษฎีดังกล่าวไม่เป็นจริง!!!

ถ้า $f_x(a,b)=0$ และ $f_y(a,b)=0$

<u>**ไม่ได้**</u>หมายความว่า $f(a,b)$ เป็น<u>**ค่าสุดขีดสัมพัทธ์**</u>

ตัวอย่าง ให้ $f(x,y)=y^2-x^2$

จงหาอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x และ y โดยพิจารณาที่จุด (0,0) และแสดงว่า $f(0,0)$ ไม่ใช่ค่าสุดขีด



z
$z = y^2 - x^2$
(0, 0)
y
x

บทนิยาม

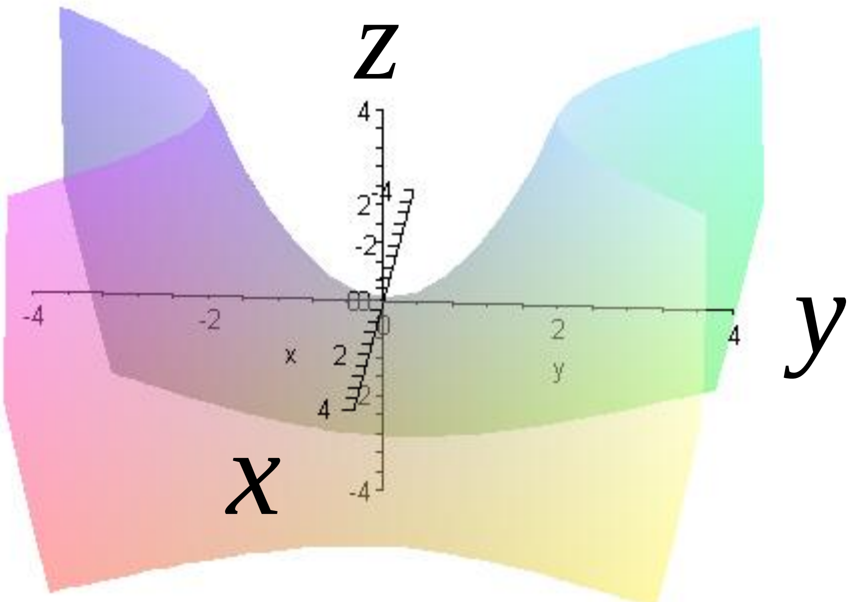
เราเรียกจุด (a,b) บนพื้นผิว $z = f(x,y)$ ว่าจุด**<u>อานม้า</u>**

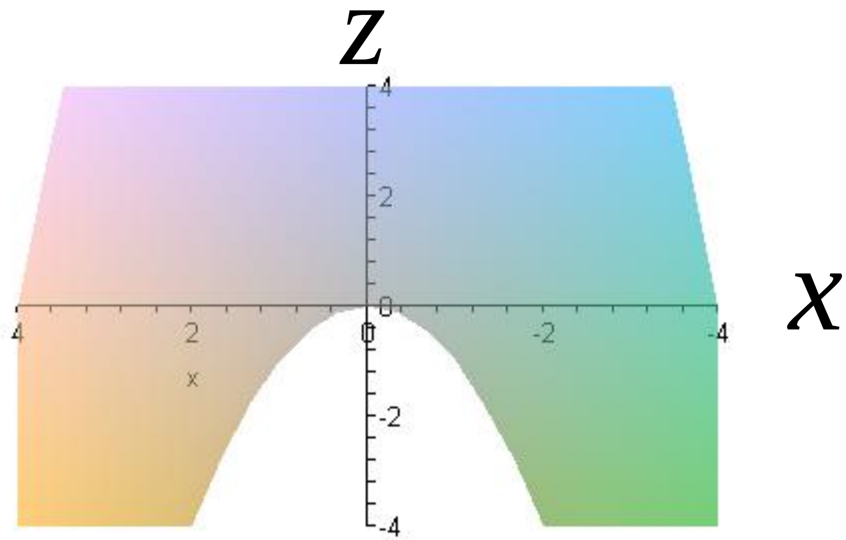
ถ้าสามารถหาระนาบใน**<u>แนวตั้ง</u>** 2 แนว ที่ผ่านจุด

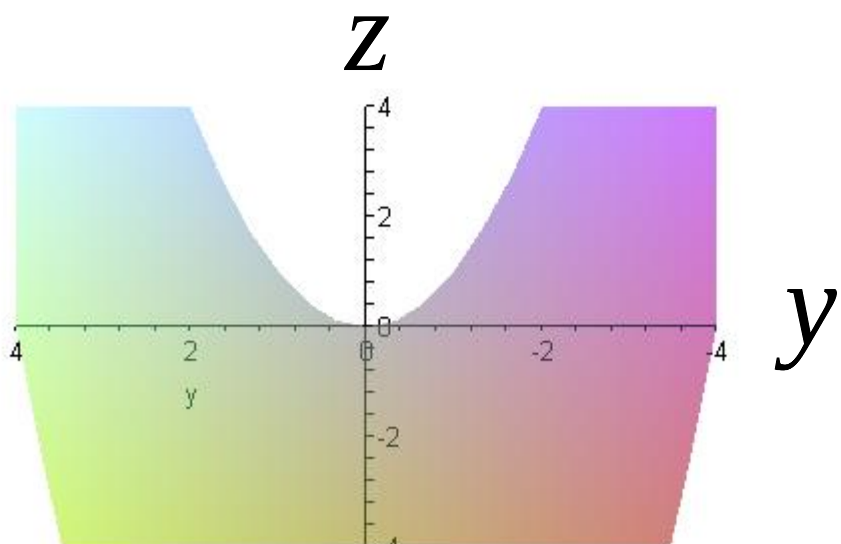
(a,b) โดยเส้นทางที่**<u>พื้นผิวตัดกับระนาบทั้งสอง</u>**

แสดงให้เห็นค่า**<u>สูงสุดสัมพัทธ์</u>**ในระนาบหนึ่ง แต่

แสดงให้เห็นค่า**<u>ต่ำสุดสัมพัทธ์</u>**ในอีกระนาบหนึ่ง


z
y
x
4
2
-2
-4
-2
2
4
x
y


z
x
4
2
0
-2
-4
x


z
y
4
2
0
-2
-4
y

บทนิยาม

ให้ $f(x,y)$ นิยามบนบริเวณ R โดยที่
เป็นสมาชิกใดๆ ใน R

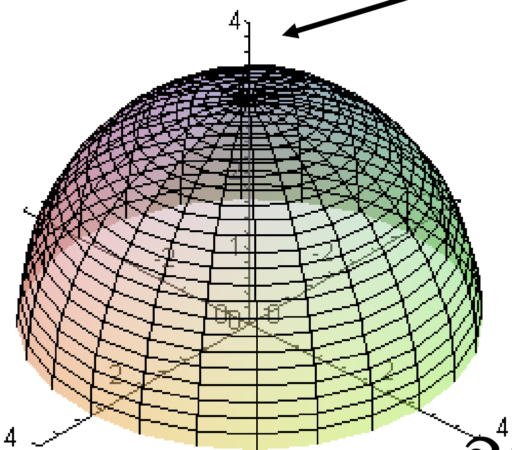
ถ้า $\boxed{f_x(a,b)=0 \quad \text{และ} \quad f_y(a,b)=0}$

หรือ หาอนุพันธ์ของ f ที่จุด (a,b) **ไม่ได้**

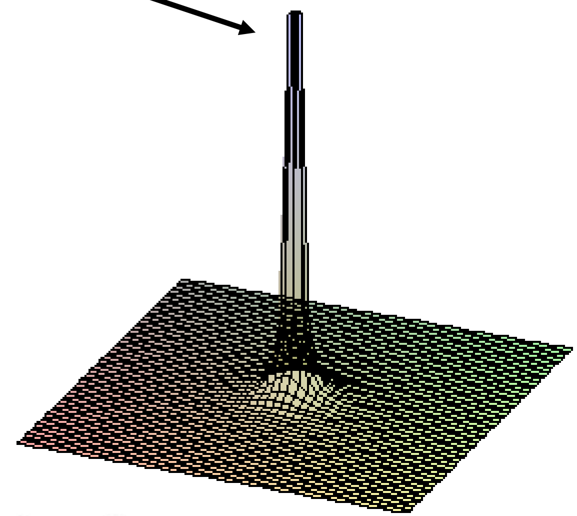
เราเรียกจุด (a,b) นั้นว่า **จุดวิกฤต** (critical point)

<u>จุดวิกฤต</u>

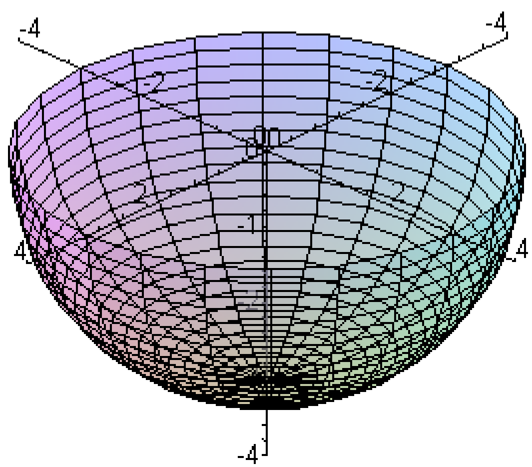
จุดสูงสุดสัมพัทธ์

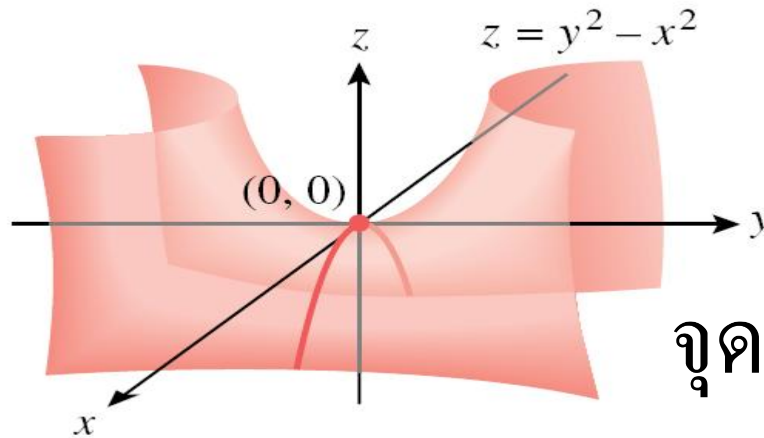


????????????



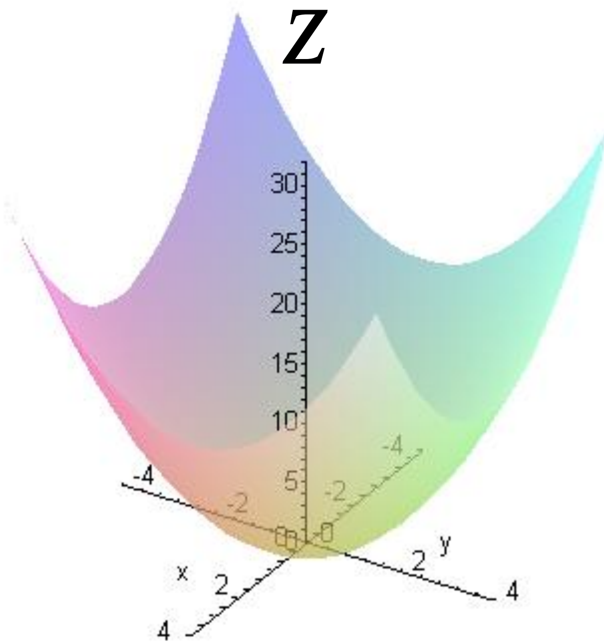
จุดต่ำสุดสัมพัทธ์

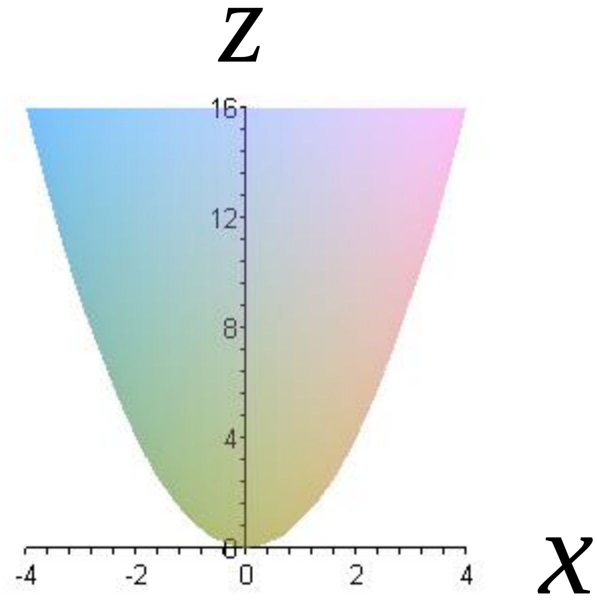


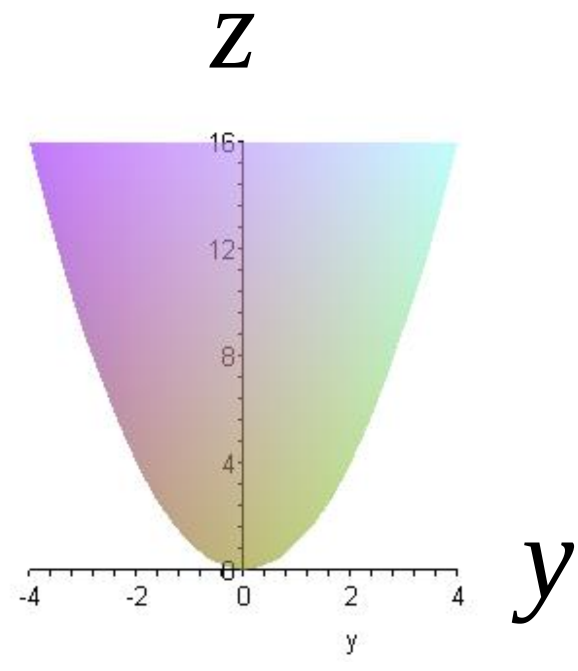


จุดอานม้า

จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x, y) = x^2 + y^2$


z
30
25
20
15
10
5
0
-4
-2
0
2
4
x
y


z
16
12
8
4
0
-4
-2
0
2
4
x


z
16
12
8
4
0
-4
-2
0
2
4
y
y

ทฤษฎีบทการหาจุดสูงสุด-ต่ำสุดโดยใช้
<u>อนุพันธ์ย่อยอันดับที่สอง</u>

ถ้า $f(x, y)$ มีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่สองซึ่ง**<u>ต่อเนื่อง</u>** ในบริเวณที่พิจารณา รอบจุด (a,b) โดยที่จุด (a,b) เป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x, y)$

ให้

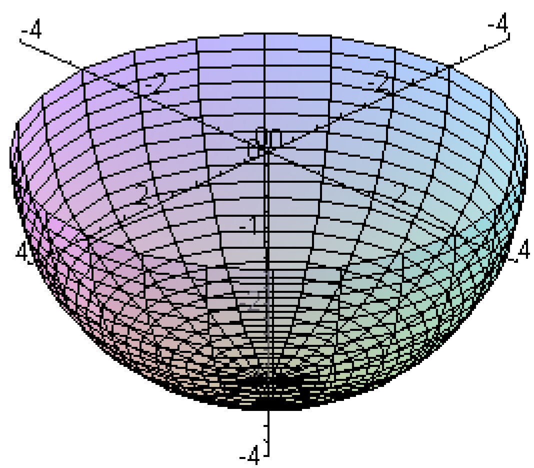
$$D = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b) \right]^2$$

$$D = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - \left[\, f_{xy}(a,b) \,\right]^2$$

•ถ้า $D > 0$ และ $f_{xx}(a,b) > 0$

(หรือ $f_{yy}(a,b) > 0$)

f ให้ค่า<u>**ต่ำสุดสัมพัทธ์**</u>ที่จุด (a,b)

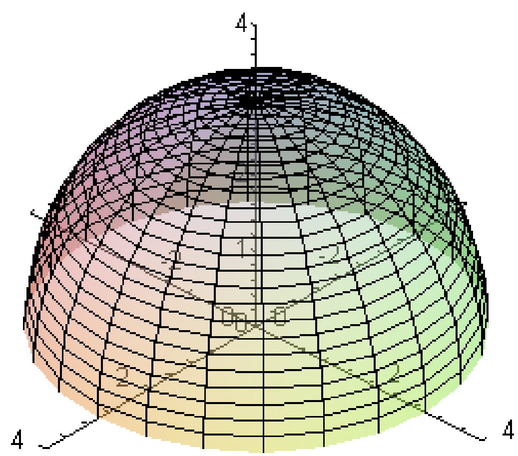


$$D = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b) \right]^2$$

- ถ้า $D > 0$ และ $f_{xx}(a,b) < 0$

  (หรือ $f_{yy}(a,b) < 0$)

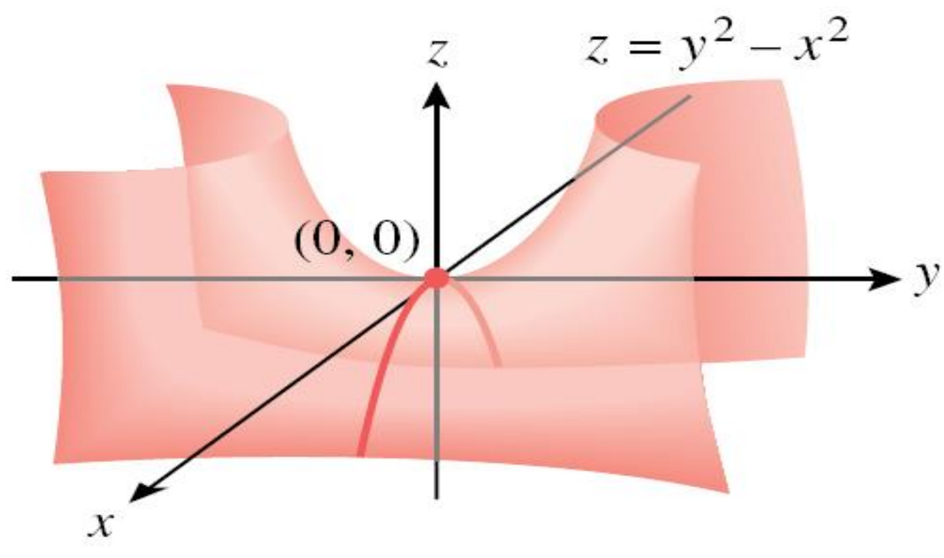
  f ให้ค่า**สูงสุดสัมพัทธ์**ที่จุด (a,b)



$$D = f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b) - \left[\, f_{xy}(a,b) \,\right]^2$$

- ถ้า $D < 0$

จุด (a,b) เป็นจุด<u>อานม้า</u>



$$D = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b) \right]^2$$

- ถ้า $D = 0$

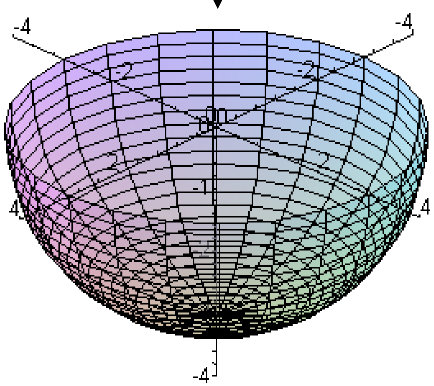
สรุปอะไรไม่ได้ !!!!

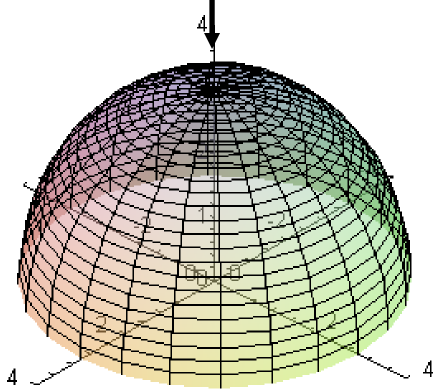
$$D = f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b) - \left[f_{xy}(a,b) \right]^2$$

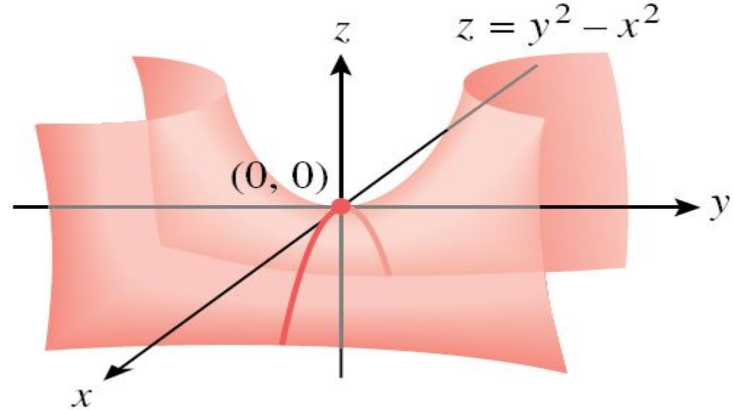
$D > 0$ $\qquad$ $D < 0$ $\qquad$ $D = 0$

?????????????

$f_{xx}(a,b) > 0$ $\qquad$ $f_{xx}(a,b) < 0$

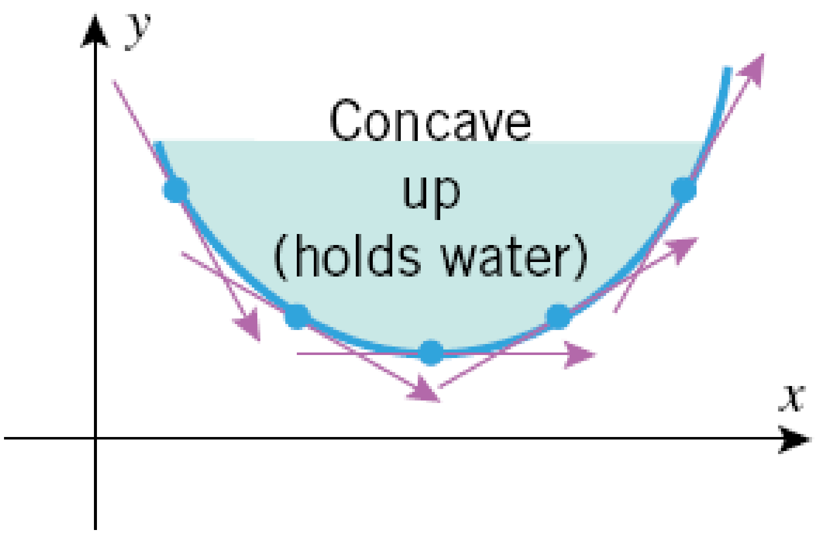




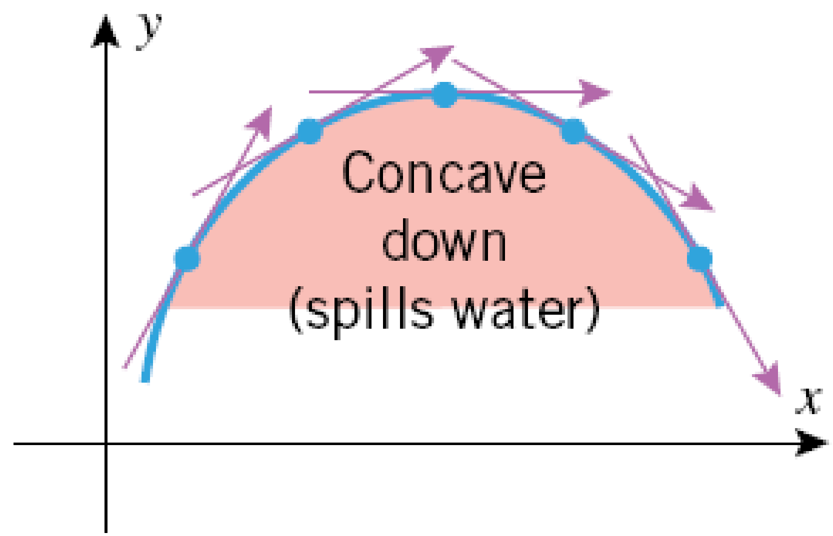


$f'(x)$ ➡ อนุพันธ์ ➡ ความชัน

$f''(x)$ ➡ $\frac{d}{dx} f'(x)$ ➡ การเปลี่ยนแปลงความชัน



$f''(x) > 0$



$f''(x) < 0$

จงหาจุดสุดขีดเฉพาะที่ และ ค่าสุดขีดเฉพาะที่ของฟังก์ชัน

$$f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

และระบุว่าจุดสุดขีดนั้นเป็นจุดสุดขีดชนิดใด

จงหาจุดสุดขีด เฉพาะที่ และ ค่าสุดขีดเฉพาะที่ของฟังก์ชัน

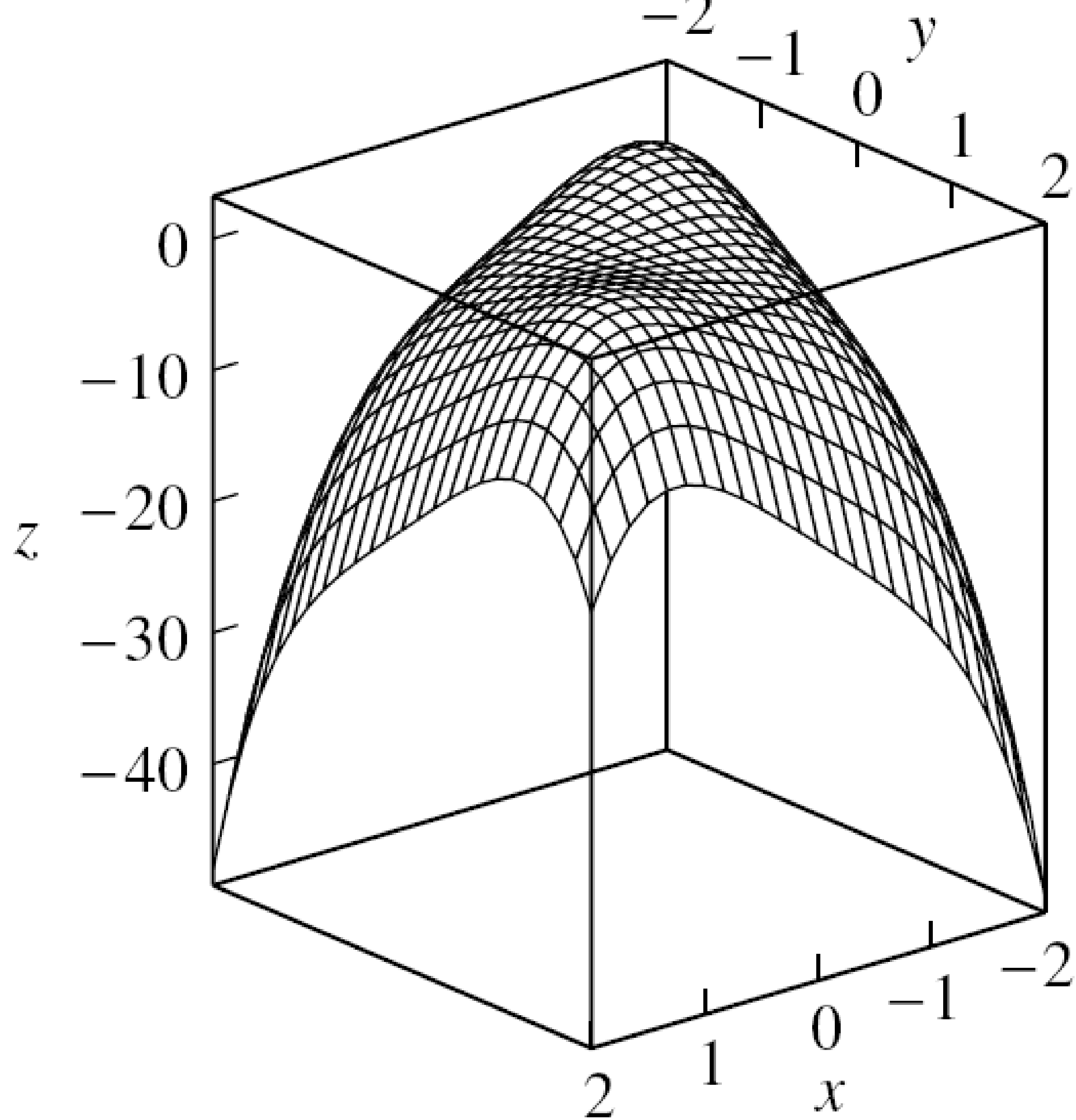
$$f(x,y)=3x^2-2xy+y^2-8y$$

และระบุว่าจุดสุดขีดนั้นเป็นจุดสุดขีดชนิดใด

จงหาจุดสุดขีดเฉพาะที่ และ ค่าสุดขีดเฉพาะที่ของฟังก์ชัน

$$f(x, y) = 4xy - x^4 - y^4$$

และระบุว่าจุดสุดขีดนั้นเป็นจุดสุดขีดชนิดใด



z
0
−10
−20
−30
−40
y
−2
−1
0
1
2
x
2
1
0
−1
−2

จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$$

(1) (1, 2)

(2) (2, 1)

(3) (2, –1)

(4) (–1, 2)

(5) (1, –1)

จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชัน $f(x,y) = xy - x^3 - y^2$

(1) $\left(0,\ \frac{1}{12}\right),\ \left(0,\ \frac{1}{6}\right)$

(2) $(0,\ 0),\ \left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{12}\right)$

(3) $(0,\ 0),\ \left(\frac{1}{12},\ \frac{1}{6}\right)$

(4) $\left(\frac{1}{12},\ 0\right),\ \left(\frac{1}{6},\ 0\right)$

(5) $(0,\ 1),\ (-2,\ 0)$

ข้อใดเป็นจุดวิกฤตของฟังก์ชัน

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 12x + y^2$$

1.) $(0,0)$ และ $(1,2)$

2.) $(1,2)$ และ $(3,6)$

3.) $(1,1)$ และ $(2,4)$

4.) $(1,3)$ และ $(2,6)$

5.) $(-1,1)$ และ $(1,1)$

จงหาจุดวิกฤต, จุดสุดขีดเฉพาะที่

และ ค่าสุดขีดเฉพาะที่ของฟังก์ชัน

$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 12x + y^2$$

และระบุว่าจุดสุดขีดนั้นเป็นจุดสุดขีดชนิดใด

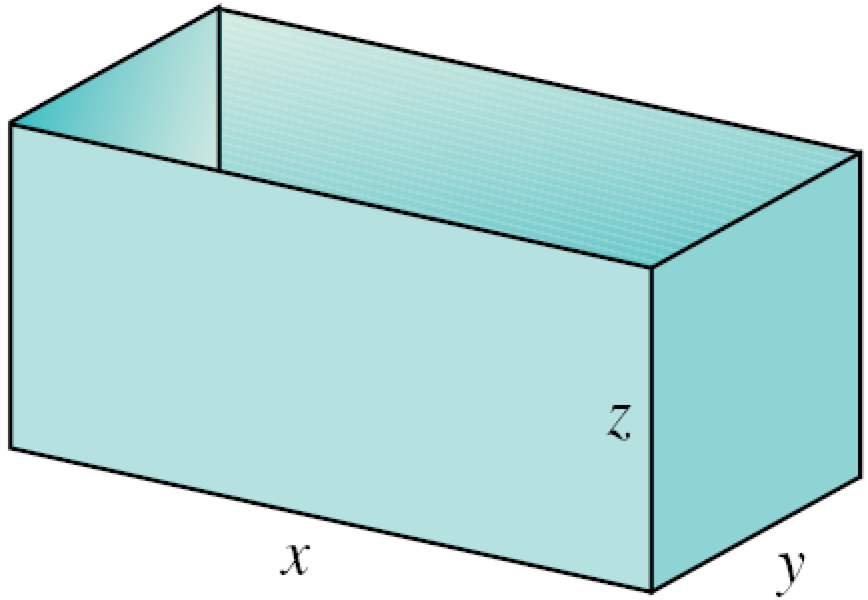
จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งจำแนกจุดวิกฤต

$$F(x, y) = 2x^3 + 16y^3 - 9xy$$

จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งจำแนกจุดวิกฤต

$$F(x,y) = 4x^2e^y - 2x^4 - e^{4y}$$

จงหาความกว้าง ความยาว และความสูงของกล่อง ซึ่งไม่มีฝา (ดังรูป)



โดยกล่องดังกล่าวมีปริมาตร 32 ลูกบาศก์เซนติเมตร แต่มีพื้นที่**ผิวน้อยที่สุด**

จงหาจุดสุดขีดเฉพาะที่ และ ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน

$$f(x, y) = x^2 + y - e^y$$

และระบุว่าจุดสุดขีดนั้นเป็นจุดสุดขีดชนิดใด

บทนิยาม

ให้ $f(x,y)$ นิยามบนบริเวณ**<u>ปิด</u>** R โดยที่ เป็นสมาชิกใดๆ ใน R

$f(a,b)$ เป็น**<u>ค่าสูงสุดสัมบูรณ์</u>** (absolute maximum) ของ f ถ้าจุด(a,b) อยู่ในบริเวณ R และ

$$f(a,b) \geq f(x,y)$$

สำหรับจุด(x,y)ทุกๆ จุดที่อยู่ใน R

บทนิยาม

ให้ $f(x,y)$ นิยามบนบริเวณ**<u>ปิด</u>** R โดยที่ เป็นสมาชิกใดๆ ใน R

$f(a,b)$ เป็น**<u>ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์</u>** (absolute minimum) ของ f ถ้าจุด(a,b) อยู่ในบริเวณ R และ

$$f(a,b) \leq f(x,y)$$

สำหรับจุด(x,y)ทุกๆ จุดที่อยู่ใน R

เพื่อความสะดวกเราเรียก

<u>ค่าสูงสุดสัมบูรณ์</u> และ **<u>ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์</u>**

รวมกันเป็น

<u>ค่าสุดขีด สัมบูรณ์</u>

(absolute extremum)

ขั้นตอนการหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์

1. พิจารณาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ในบริเวณ R

2. พิจารณาค่าสุดขีดที่ขอบของ R

3. เปรียบเทียบค่าสุดขีดที่ได้จากข้อ 1 และข้อ 2 เพื่อหาค่าสุดขีดสัมบูรณ์

จงหาค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมบูรณ์ของ

$$f(x,y)=2+2x+2y-x^2-y^2$$

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันบนพื้นที่สามเหลี่ยมซึ่งถูกล้อมรอบด้วยเส้นตรง

$$x=0, y=0, y=9-x$$