ฟังก์ชันหลายตัวแปรและการหาอนุพันธ์

(Multivariable Functions and Their Deriatives)

เราทราบถึงกราฟและอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ขึ้นกับ***ตัวแปรอิสระ***เพียง ***1 ตัว***มาแล้ว (calculus I) และเราสามารถขยายแนวความคิดดังกล่าวไปสู่ฟังก์ชันที่ขึ้นกับ***ตัวแปรอิสระหลายตัวแปร*** และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ซึ่งความรู้ในเรื่องนี้ สามารถนำไปใช้อธิบายปรากฏการณ์ต่างๆ ที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวันได้เป็นอย่างดี

ฟังก์ชันสองตัวแปร

ฟังก์ชันสองตัวแปรเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปรอิสระสองตัวแปร

ปริมาตร

เป็นฟังก์ชันของรัศมี และ ความสูง

$$V = V(r,h) = \pi r^2 h$$

สมการวงกลมรัศมี 1

เป็นฟังก์ชันของ x และ y

$$x^2 + y^2 = 1$$

ระยะทางของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวดิ่ง

เป็นฟังก์ชันของความเร็วต้น และเวลา

$$S = S(u,t) = ut + \frac{1}{2}gt^2$$

$$g = 9.8m/\sec^2$$

ฟังก์ชันสองตัวแปร

$$z = f(x, y)$$

เรียก x และ y ว่า<ins>**ตัวแปรอิสระ**</ins>

เรียกเซตของคู่ลำดับ (x,y) ซึ่งเป็นคู่ลำดับของจำนวนจริงใดๆ ว่า <ins>**โดเมน (domain)**</ins> ของฟังก์ชัน f

เรียก z ที่หาได้ว่า<ins>**ตัวแปรไม่อิสระ**</ins>

เรียกเซตของ z ที่หาได้จาก f ว่า<ins>**พิสัย**</ins> หรือ <ins>**เรนจ์ (Range)**</ins>

ถูกสุดๆ ผ่อนคอมพิวเตอร์ notebook รุ่น

HENG&HANG

ราคา 34,999

ดอกเบี้ย 0.8%!!!

ดอกเบี้ยต่ำกว่านี้ไม่มีอีกแล้ว

ถูกสุดๆ ผ่อนคอมพิวเตอร์ notebook รุ่น HENG&HANG
ราคา 34,999 ดอกเบี้ย 0.8%!!! ดอกเบี้ยต่ำกว่านี้ไม่มีอีกแล้ว

พบว่า ราคาของการผ่อนต่อ 1 เดือน ขึ้นกับ

เงินดาวน์ และ**จำนวนเดือนที่จะผ่อน**

***f*(เงินดาวน์, จำนวนเดือนที่จะผ่อน)**

เงินผ่อนต่อ 1 เดือน = (34999-เงินดาวน์)*0.8/(100*12)
+(34999-เงิน ดาวน์)/จำนวนเดือนที่จะผ่อน

เงินผ่อนต่อ 1 เดือน =***f*****(เงินดาวน์, จำนวนเดือนที่จะผ่อน)**

= (34999-เงินดาวน์)*0.8/(100*12)

+(34999-เงินดาวน์)/จำนวนเดือนที่จะผ่อน

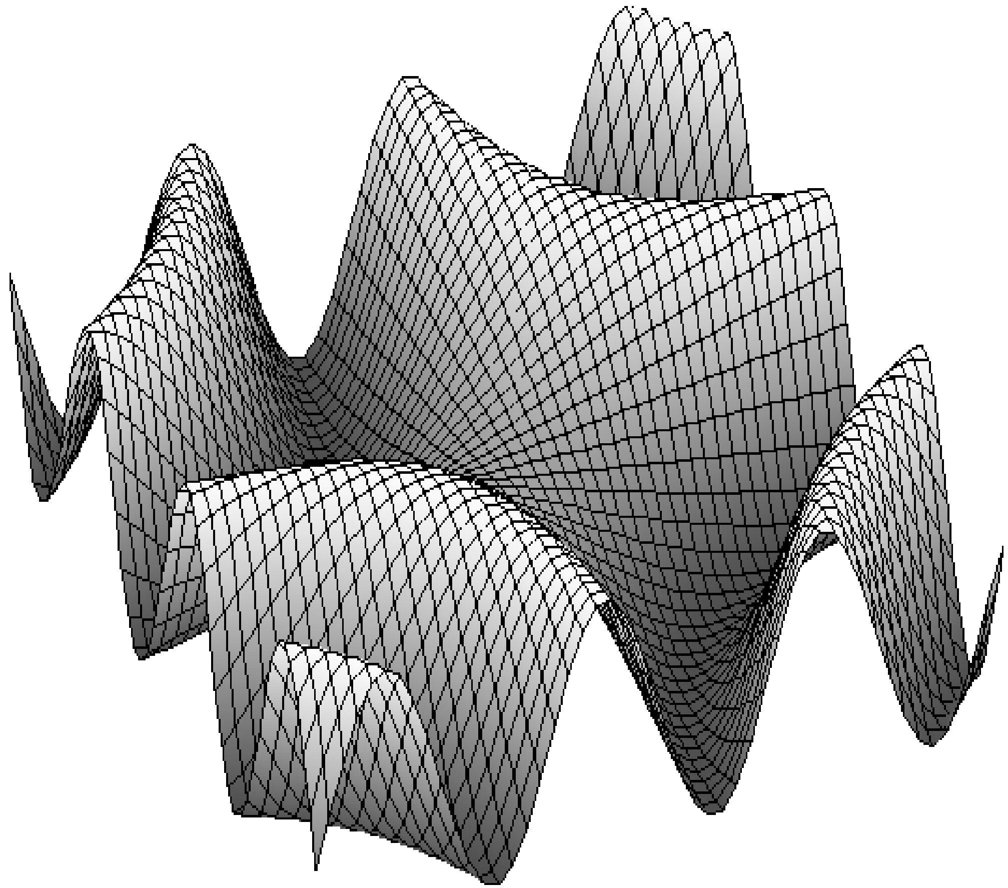
<u>โดเมน (domain)</u>

เงินดาวน์

จำนวนเดือนที่จะผ่อน

<u>เรนจ์ (Range)</u>

$$z = \sin(xy)$$



$$f(x, y) = x + \sqrt{xy}$$

จงหา $f(1, 4)$

$$f(x, x)$$

$$f(x^2, 4x)$$

$$f(2y, 4y^3)$$

$$f(x + y, x - y)$$

ฟังก์ชันสามตัวแปร

$$w = f(x, y, z)$$

ถูกสุดๆ ผ่อนคอมพิวเตอร์ notebook รุ่น HENG&HANG

แบบ A ราคาดูหนังฟังเพลงได้ 34,999

แบบ B ราคาดูหนังฟังเพลงได้<u>ดีกว่า</u> 44,999

แบบ C ราคาดูหนังฟังเพลงได้<u>ดีสุดๆ</u> 54,999

ดอกเบี้ย 0.8%!!!

ดอกเบี้ยต่ำกว่านี้ไม่มีอีกแล้ว!!!

พบว่า ราคาของการผ่อนต่อ 1 เดือน ขึ้นกับ

แบบของเครื่อง, เงินดาวน์ และ**จำนวนเดือนที่จะผ่อน**

$\boldsymbol{w = f}$**(แบบของเครื่อง, เงินดาวน์, จำนวนเดือนที่จะผ่อน)**

โดเมน (domain)

แบบของเครื่อง 34,999 44,999 54,999

เงินดาวน์

จำนวนเดือนที่จะผ่อน

ฟังก์ชันแนวผิวโค้งของฟังก์ชัน 3 ตัวแปร

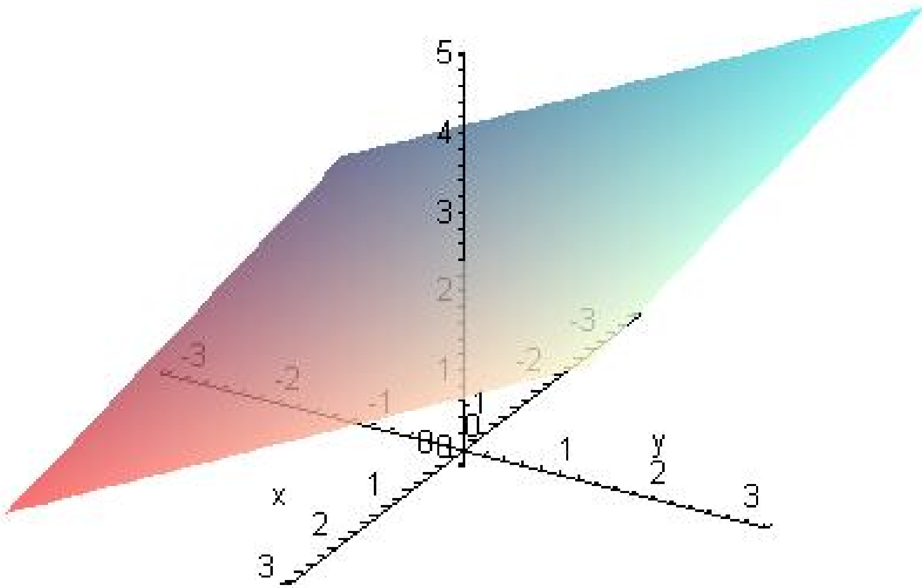
Level Surfaces of Functions of Three Variables

เรียกฟังก์ชันของตัวแปร (x,y,z) ที่เป็นค่าคงตัวว่า **<u>แนวผิวโค้ง (Level Surface)</u>**

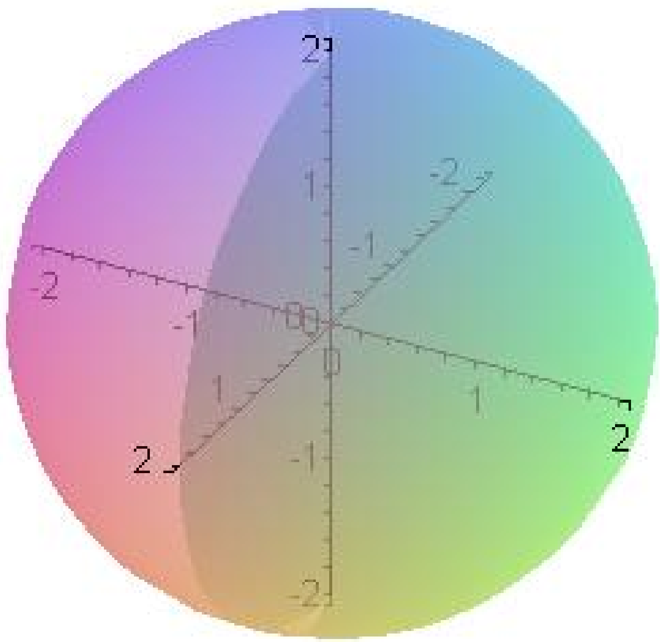
เรียก $f(x,y,z) = c$ ว่า **<u>แนวผิวโค้ง (Level Surface)</u>**

ตัวอย่าง

$x\text{-}3y+5z=12$



$x^2+y^2+z^2=4$



ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปร

Limit and Continuity of Functions of two variables

เราใช้สัญลักษณ์

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

แทน ลิมิตของฟังก์ชัน $f(x,y)$ มีค่าเท่ากับ L

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ x_0 และ y มีค่าเข้าใกล้ y_0 พร้อมๆ กัน

คุณสมบัติของลิมิตของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร

ให้ L,M และ K เป็นจำนวนจริง และ

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad \text{และ} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

1. กฎการบวก $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y) + g(x,y) \right] = L + M$

2. กฎการลบ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y) - g(x,y) \right] = L - M$

3. กฎการคูณ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y) \bullet g(x,y) \right] = L \bullet M$

4. กฎการหาร $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L}{M}$ ถ้า $M \neq 0$

5. กฎการคูณด้วยค่าคงตัว $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[kf(x,y)\right]=kL$

6. กฎการยกกำลัง

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y)\right]^a=L^a \quad \text{ถ้า} \quad L>0$$

จงหาค่า $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

จงหาค่าของ $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^4 - y^4}{x - y}$

(1) 0

(2) 1

(3) 2

(4) 4

(5) หาค่าไม่ได้

ค่าของ $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ คือข้อใด

(1) -1

(2) -2

(3) 0

(4) 2

(5) ไม่มีลิมิต

แนวความคิดเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปร สามารถขยายไปสู่ แนวความคิดเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันหลายตัวแปร (ตัวแปรอิสระตั้งแต่ 2 ตัวแปร) ได้ด้วย

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{\ln(x+y+z)}{x\cos z} + e^{\frac{1-y}{2}} =$$

อนุพันธ์ย่อย

(Partial Derivatives)

สำหรับฟังก์ชันตั้งแต่ 2 ตัวแปรเป็นต้นไป เราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้นๆ เทียบกับตัวแปรอิสระแต่ละตัวแปรได้ และ จะหมายถึง **<u>อัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน เทียบกับการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรนั้นๆ</u>** เมื่อจุดอื่นถูก**<u>ตรึง</u>**อยู่

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x,y)=\sqrt{x+y}$

เมื่อ y=8 พบว่า $f(x,8)=$

เป็นเฉพาะฟังก์ชันที่จะแปรผันได้**<u>เมื่อค่า x เปลี่ยนไป</u>**

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ x=2 พบว่า $f(2,y)=$

เป็นเฉพาะฟังก์ชันที่จะแปรผันได้**<u>เมื่อค่า y เปลี่ยนไป</u>**

$$f(x, y) = \sqrt{x + y}$$

$$\frac{df(x,8)}{dx} =$$

$$\frac{df(2, y)}{dy} =$$

เราใช้สัญลักษณ์

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}\left[f(x, y_0) \right]\Bigg|_{x=x_0} = \frac{df(x, y_0)}{dx}\Bigg|_{x=x_0}$$

แทนอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ x เมื่อ พิจารณาที่จุด (x_0, y_0)

จงหา $f_x(1,3)$ เมื่อ $f(x, y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$

เราใช้สัญลักษณ์

$$f_y(x_0, y_0) = \frac{d}{dy}\left[f(x_0, y) \right]\Bigg|_{y=y_0} = \frac{df(x_0, y)}{dy}\Bigg|_{y=y_0}$$

แทนอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ y เมื่อ พิจารณาที่จุด (x_0, y_0)

จงหา $f_y(1,3)$ เมื่อ $f(x, y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$

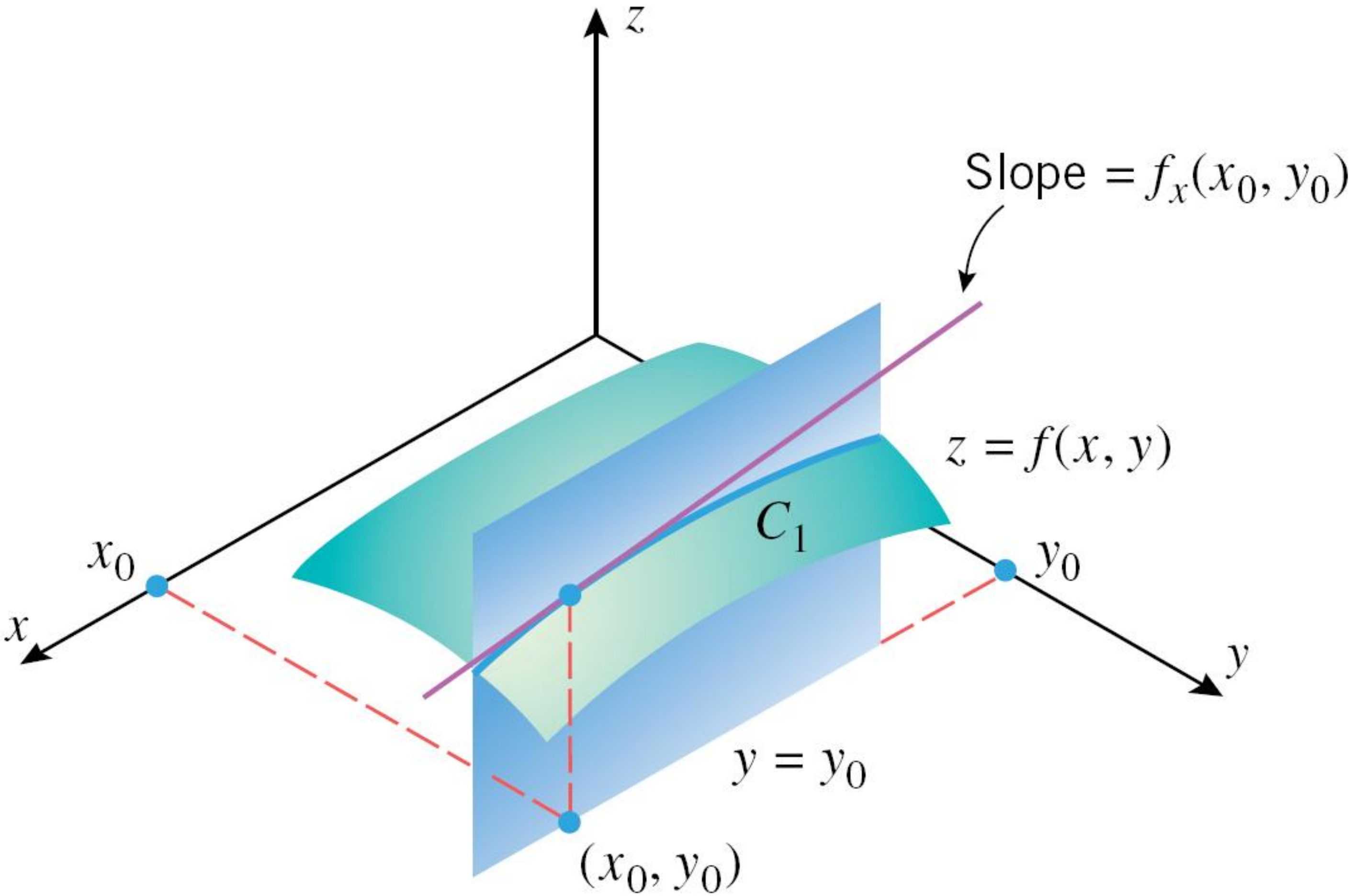
บางครั้งเราใช้สัญลักษณ์

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ แทน } f_x(x, y)$$

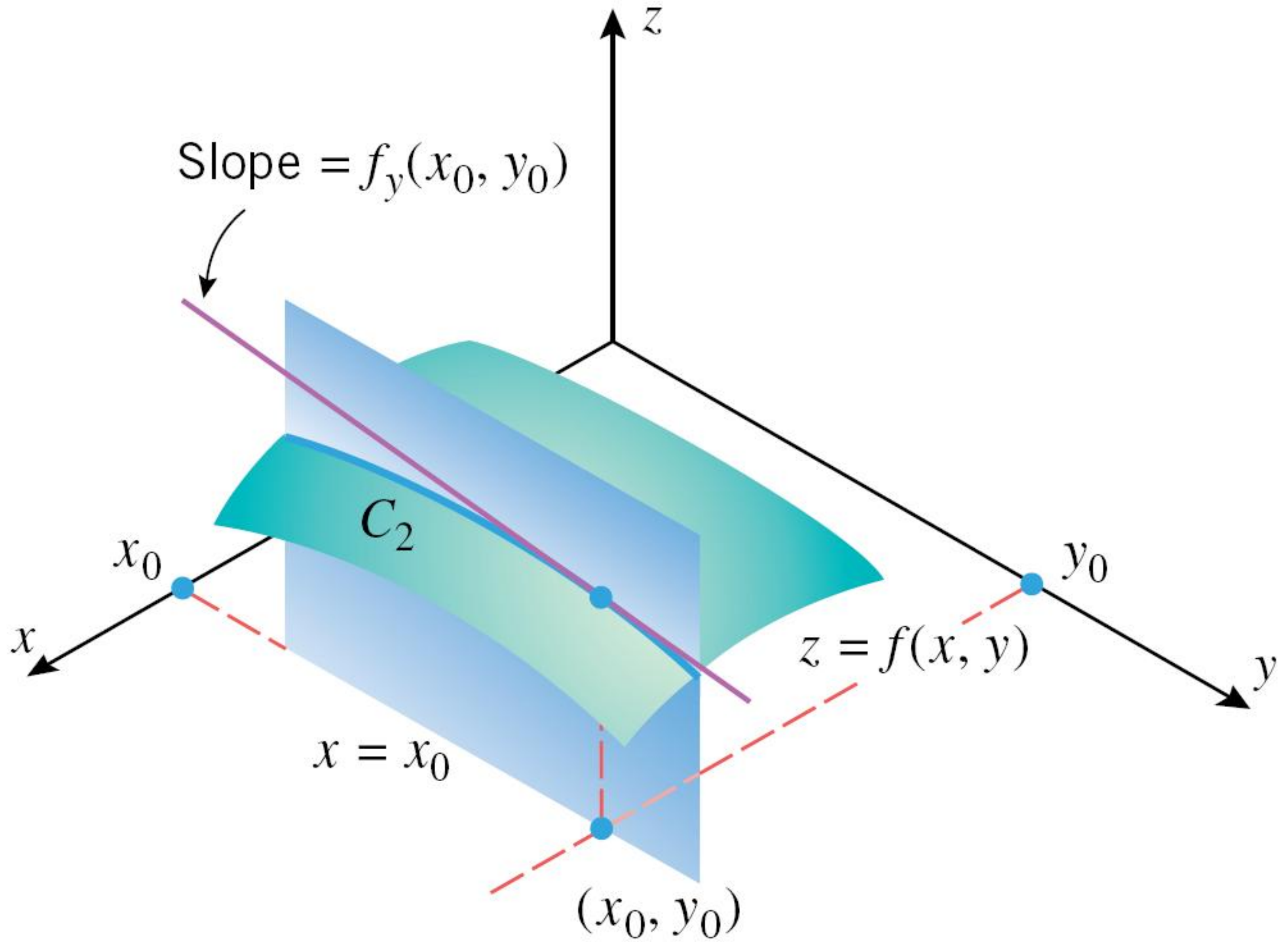
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ แทน } f_y(x, y)$$

∂ เป็นตัวอักษรจาก Cyrillic อ่านว่า “ดี”

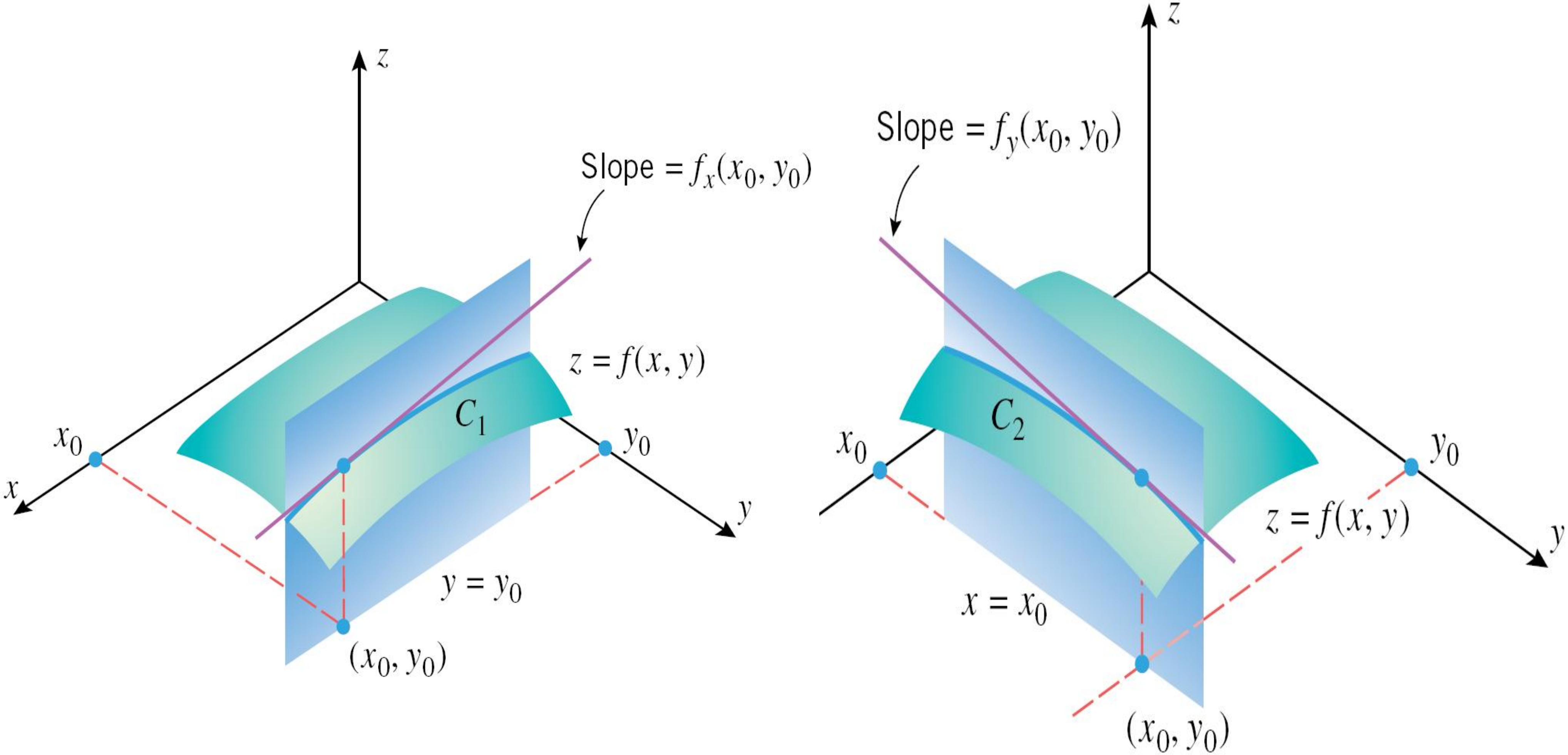
ความหมายของอนุพันธ์ย่อยในเชิงเรขาคณิต



$f_x(x_0, y_0)$ หมายถึงความชันของผิวโค้ง $z=f(x,y)$ ณ จุด (x_0,y_0) ในทิศทางที่ขนานกับแกน x



$f_y(x_0, y_0)$ หมายถึงความชันของผิวโค้ง $z=f(x,y)$ ณ จุด (x_0,y_0) ในทิศทางที่ขนานกับแกน y



z
Slope = $f_x(x_0, y_0)$
$z = f(x, y)$
C_1
x_0
y_0
x
y
$y = y_0$
(x_0, y_0)
z
Slope = $f_y(x_0, y_0)$
C_2
x_0
y_0
$z = f(x, y)$
y
$x = x_0$
(x_0, y_0)

กฎการหาอนุพันธ์ย่อย

1. กฎการบวก

$$\frac{\partial\left(f+g\right)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial\left(f+g\right)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}$$

2. กฎการลบ

$$\frac{\partial\left(f-g\right)}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial g}{\partial x} \qquad \frac{\partial\left(f-g\right)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial y}$$

3. กฎการคูณ

$$\frac{\partial f \bullet g}{\partial x} = f\,\frac{\partial g}{\partial x} + g\,\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial f \bullet g}{\partial y} = f\,\frac{\partial g}{\partial y} + g\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

4. กฎการหาร

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\frac{\partial f}{\partial x} - f\,\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,\frac{\partial f}{\partial y} - f\,\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2}$$

5. กฎการคูณด้วยค่าคงตัว

$$\frac{\partial(kf)}{\partial x} = k\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(kf)}{\partial y} = k\frac{\partial f}{\partial y}$$

k เป็นค่าคงตัวใดๆ

6. กฎการยกกำลัง

$$\frac{\partial x^m y^n}{\partial x} = mx^{m-1}y^n$$

$$\frac{\partial x^m y^n}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$$

7. กฎลูกโซ่

ถ้า $x = g(t)$ $y = h(t)$ $w = f(x, y)$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ให้ $z = x^4 \sin(xy^3)$

จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$

ให้ $f(x,y) = x^2 y + 5xy^3$

จงหาความชันของ พื้นผิว $z=f(x,y)$ ในทิศทางของ**<u>แกน x</u>**

ณ จุด (1,-2)

ให้ $f(x,y) = x^2y + 5xy^3$

จงหาความชันของ พื้นผิว $z=f(x,y)$ ในทิศทางของ**แกน y**

ณ จุด (1,-2)

ให้ $yz - \ln z = x + y$ ถ้า z เป็นฟังก์ชันของ x,y และหาอนุพันธ์ย่อยได้ จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

จงใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ของ $w = xy$ เทียบกับ t

เมื่อ $x = \cos t \quad y = \sin t$

กำหนดให้ $f(x, y) = y^2 \ln x$

จงหาอนุพันธ์ของ f ณ (1, 2) ในทิศทางของแกน x

(1) 0

(2) 1

(3) 2

(4) 3

(5) 4

กำหนดให้ $f(x, y) = y^2 \ln x$

จงหาอนุพันธ์ของ f ณ (1, 2) ในทิศทางของแกน y

(1) 0

(2) 1

(3) 2

(4) 3

(5) 4

ความชันของพื้นผิว $f(x, y) = 5 - x + 2y - 3xy^2$ ในทิศทางของแกน y ณ $(-1, 2)$ คือข้อใด

(1) 0

(2) 4

(3) 10

(4) 14

(5) 22

กฎลูกโซ่

ถ้า $w = f(x, y)$ x, y เป็นฟังก์ชันของ t

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ถ้า $w = f(x, y, z)$ x, y, z เป็นฟังก์ชันของ t

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ถ้า $w = f(x, y)$ x, y เป็นฟังก์ชันของ t

$$
\begin{tikzcd}
 & w = f(x, y) \arrow[dl, "\dfrac{\partial f}{\partial x}"'] \arrow[dr, "\dfrac{\partial f}{\partial y}"] & \\
x = x(t) \arrow[dr, "\dfrac{dx}{dt}"'] & & y = y(t) \arrow[dl, "\dfrac{dy}{dt}"] \\
 & t &
\end{tikzcd}
$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ถ้า $w = f(x, y, z)$ x, y, z เป็นฟังก์ชันของ t

$$\begin{tikzcd}
 & w = f(x,y,z) \arrow[dl, "\frac{\partial f}{\partial x}"'] \arrow[d, "\frac{\partial f}{\partial y}"] \arrow[dr, "\frac{\partial f}{\partial z}"] & \\
x = x(t) \arrow[dr, "\frac{dx}{dt}"'] & y = y(t) \arrow[d, "\frac{dy}{dt}"] & z = z(t) \arrow[dl, "\frac{dz}{dt}"] \\
 & t &
\end{tikzcd}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ถ้า $w = f(x, y)$ x, y เป็นฟังก์ชันของ r และ s

$$x = f(r, s), \quad y = g(r, s)$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

ถ้า $w = f(x,y)$ x, y เป็นฟังก์ชันของ r และ s

$$
\begin{tikzcd}
& w = f(x,y) \arrow[dl, "\frac{\partial f}{\partial x}"'] \arrow[dr, "\frac{\partial f}{\partial y}"] & \\
x = x(r,s) \arrow[dr, "\frac{\partial x}{\partial r}"'] & & y = y(r,s) \arrow[dl, "\frac{\partial y}{\partial r}"] \\
& r &
\end{tikzcd}
$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

ถ้า $w = f(x, y)$ x, y เป็นฟังก์ชันของ r และ s

$$
\begin{tikzcd}
 & w = f(x, y) \arrow[dl, "\frac{\partial f}{\partial x}"'] \arrow[dr, "\frac{\partial f}{\partial y}"] & \\
x = x(r, s) \arrow[dr, "\frac{\partial x}{\partial s}"'] & & y = y(r, s) \arrow[dl, "\frac{\partial y}{\partial s}"] \\
 & s &
\end{tikzcd}
$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

จงใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ย่อยของ $w = 2x + 3y$

เทียบกับ r และ s โดยให้เขียนอนุพันธ์ดังกล่าวในรูปของฟังก์ชัน

ของ r และ s ด้วย

เมื่อ $x = \dfrac{r}{s}$ $\quad y = r^2 + \ln s$

จงใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ย่อยของ $w = x + 2y + z^2$ เทียบกับ r และ s โดยให้เขียนอนุพันธ์ดังกล่าวในรูปของฟังก์ชันของ r และ s ด้วย

เมื่อ $x = \dfrac{r}{s}$ $y = r^2 + \ln s$ $z = 2r$

จงใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ของ $w = xy + z$ เทียบกับ t ที่ $t=0$

เมื่อ $x = \cos t \quad y = \sin t \quad z = t$

จงใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ย่อยของ $w = x^2 + y^2$

เทียบกับ r และ s โดยให้เขียนอนุพันธ์ดังกล่าวในรูปของฟังก์ชัน

ของ r และ s ด้วย

เมื่อ $x = r - s$ $\quad y = r + s$

จงใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ย่อยของ $z = e^{xy}$
เทียบกับ r และ s โดยให้เขียนอนุพันธ์ดังกล่าวในรูปของฟังก์ชัน
ของ r และ s ด้วย

เมื่อ $x = 2r + s \qquad y = \dfrac{r}{s}$

จงใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ย่อยของ $z = \tan^{-1}(x^2 + y^2)$ เทียบกับ r และ s โดยให้เขียนอนุพันธ์ดังกล่าวในรูปของฟังก์ชันของ r และ s ด้วย

เมื่อ $x = e^s \sin r \qquad y = e^s \cos r$

ถ้า $w = z + \cos(xy)$ และ $x = \ln t,\ y = t$

และ $z = e^{t-1}$ แล้ว $\dfrac{dw}{dt}$ ณ $t = 1$ คือข้อใด

(1) -2

(2) $-\dfrac{3}{2}$

(3) 0

(4) 1

(5) $\dfrac{3}{2}$

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย
Derivatives of Implicit Functions

โดยกฎลูกโซ่ถ้า $w = f(x, y)$ x, y เป็นฟังก์ชันของ t

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

โดยกฎลูกโซ่ถ้า $w = f(x, y)$ y เป็นฟังก์ชันของ x

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

สำหรับ $w = F(x, y) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

สูตรการหาอนุพันธ์สำหรับฟังก์ชันโดยปริยาย

ถ้า $F(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และสมการ $F(x,y)=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ นิยามให้ y เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้ ณ จุดใด ๆ ที่ $F_y(x,y) \neq 0$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ถ้า $y^2 - x^2 - \sin xy = 0$

จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ถ้า $x^3 + y^2 x = 3 + xy$

จงหา $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(0,\ln 2)}$ ถ้า $xe^{y}+\sin xy+y-\ln 2=0$

ถ้า $y = f(x)$ และ $x^3 - 3xy^2 + y^3 + 19 = 0$

แล้ว $\frac{dy}{dx}$ ณ $(x_0, y_0) = (1, -2)$ คือข้อใด

(1) $-\frac{1}{2}$

(2) $\frac{3}{8}$

(3) $\frac{5}{8}$

(4) $\frac{9}{11}$

(5) $\frac{11}{15}$

จงใช้กฎลูกโซ่หาอนุพันธ์ย่อยของ $z = \tan^{-1}(\frac{x}{y})$
เทียบกับ u และ v โดยให้เขียนอนุพันธ์ดังกล่าวในรูปของฟังก์ชัน
ของ u และ v ด้วย

เมื่อ $x = u\cos v \qquad y = u\sin v$

อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ถ้า $f(x, y) = x^2 y^3 + x^4 y$ จงหา

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ถ้า $f(x,y) = x\cos y + ye^{x}$ จงหา

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

ถ้า $f(x, y) = xy + \dfrac{e^y}{y^2+1}$ จงหา $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

ค่าของ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ณ (2, 1) เมื่อ

$f(x, y) = x^2 + 2xy - \tan x + 7\ln x$ คือข้อใด

(1) $-\dfrac{\pi}{2}$

(2) 0

(3) 1

(4) 2

(5) $\ln 2$

ถ้า $h(x, y) = x^2e^{xy} + \sin(x^2 - y^2)$ แล้ว $h_{xy} - h_{yx}$ ณ จุด (3, 2) มีค่าดังข้อใด

(1) $-e+1$

(2) –1

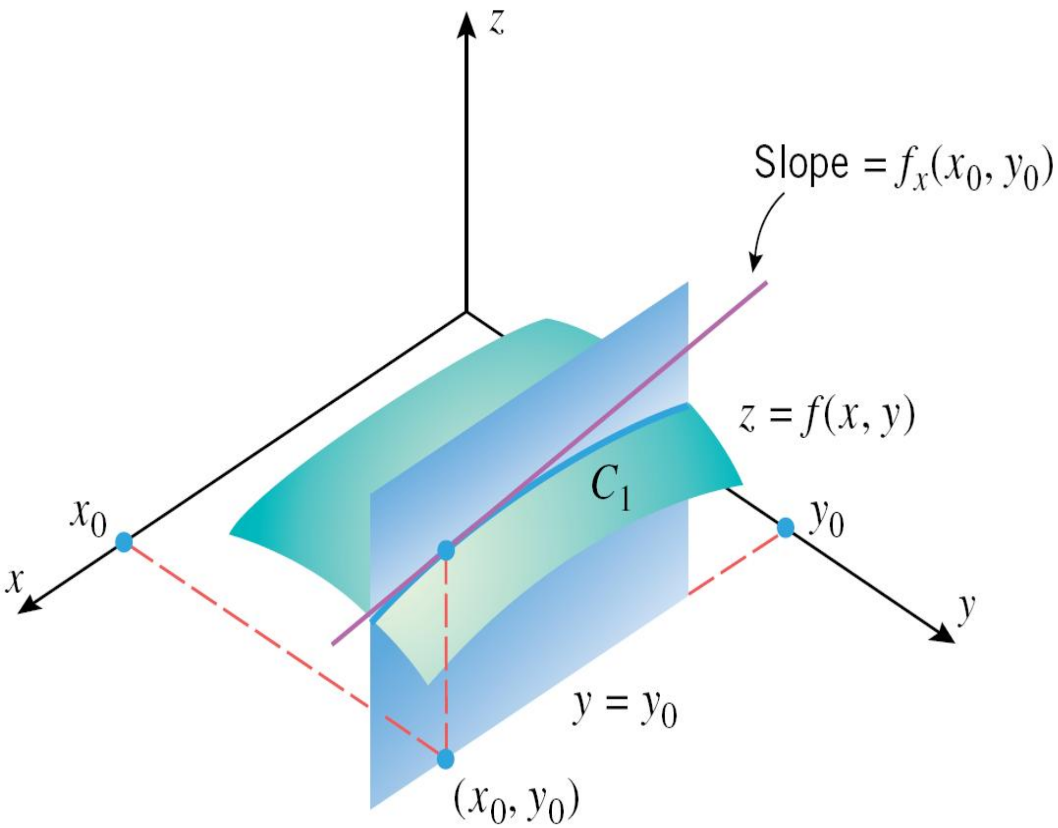
(3) 0

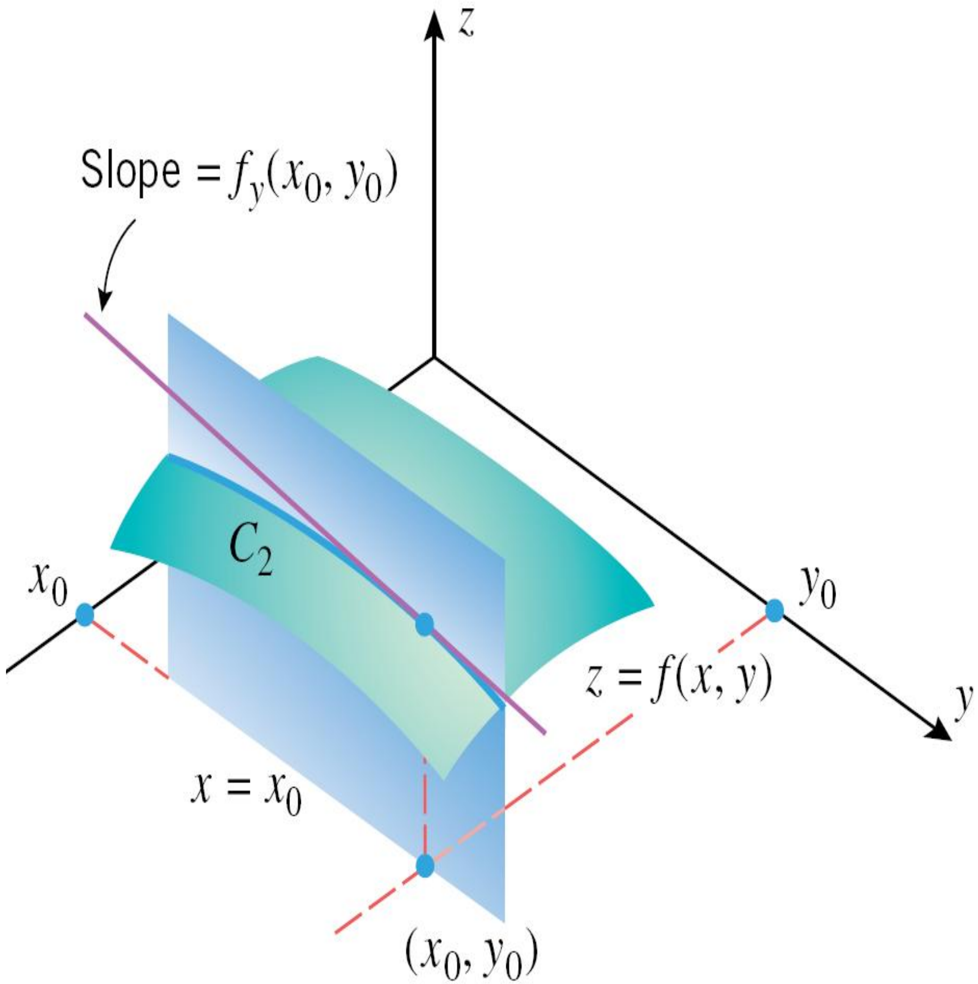
(4) $e^2 - 1$

(5) 2

ถ้า $f(x, y) = y^2 e^x + y$ จงหา f_{xyy}

ความหมายของอนุพันธ์ย่อยในเชิงเรขาคณิต



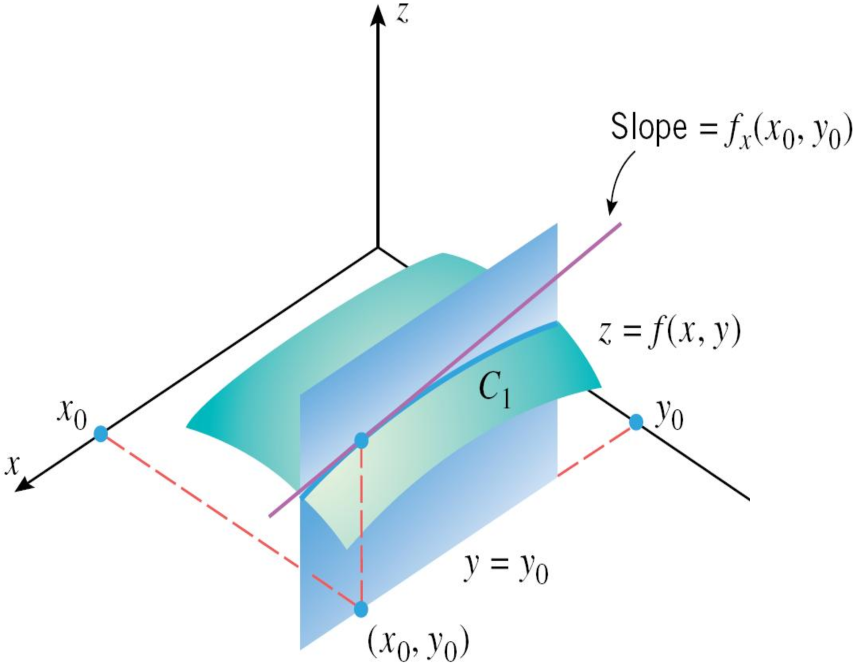


เราสามารถขยายแนวความคิดจาก

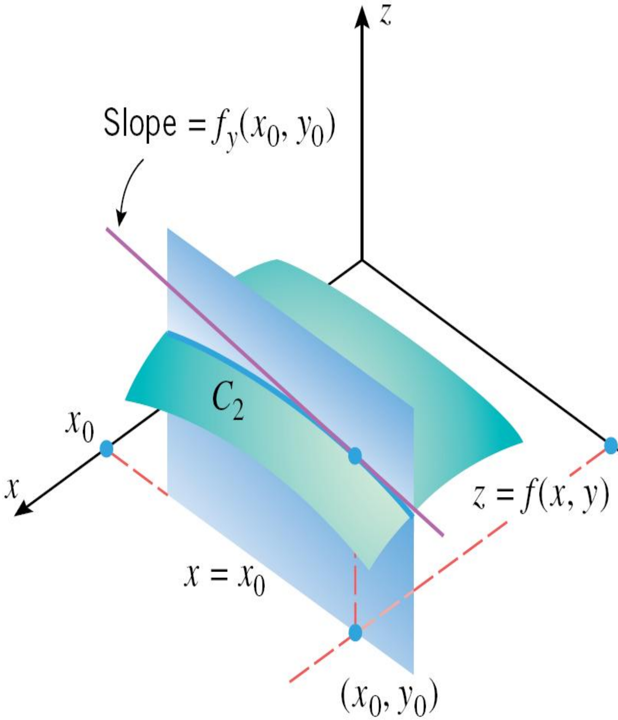
f_x ความชันของพื้นผิว $f(x,y)$ ในแนว**<u>แกน x</u>**

f_y ความชันของพื้นผิว $f(x,y)$ ในแนว**<u>แกน y</u>**

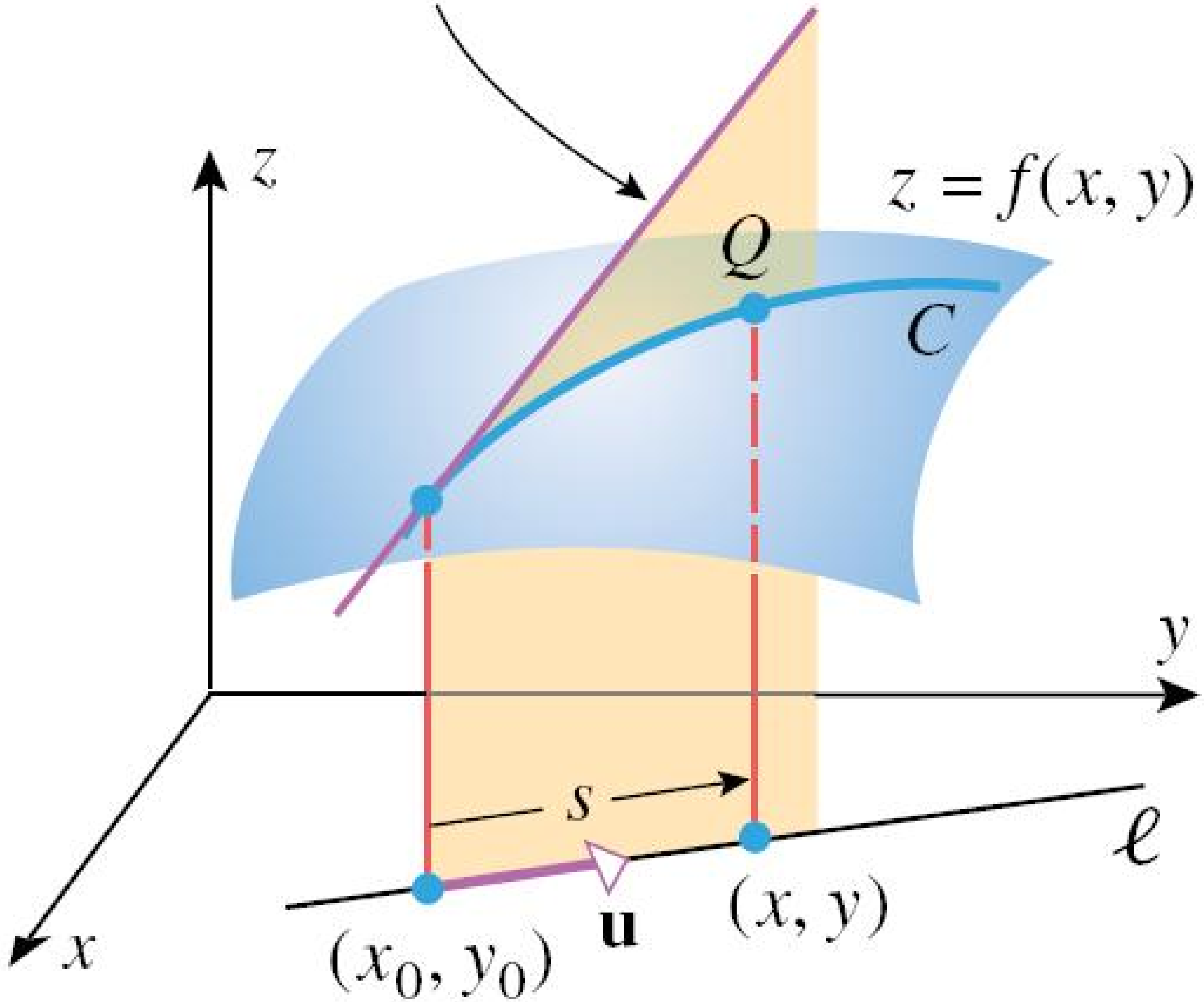
ความชันของพื้นผิว $f(x,y)$ ในแนวทิศทาง**<u>ใดๆ</u>** ที่กำหนด



z
Slope = $f_x(x_0, y_0)$
$z = f(x, y)$
C_1
x_0
y_0
x
$y = y_0$
(x_0, y_0)



z
Slope = $f_y(x_0, y_0)$
C_2
x_0
y_0
x
y
$z = f(x, y)$
$x = x_0$
(x_0, y_0)

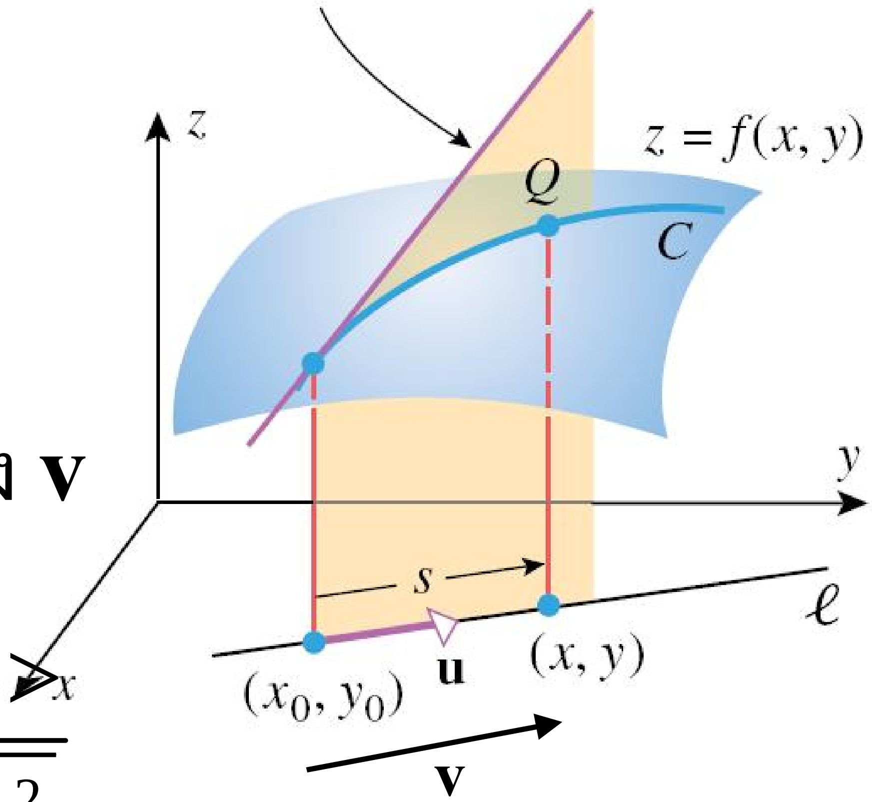


z
$z = f(x, y)$
Q
C
y
s
ℓ
x
$\mathbf{u}$
(x, y)
(x_0, y_0)

$$\mathbf{V} = < v_1, v_2 >$$

ให้ **u** เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วยในทิศทาง **v**

$$\mathbf{u} = < u_1, u_2 > = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = \frac{< v_1, v_2 >}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$



สมการเส้นตรง L

$$x = x_0 + u_1 t$$

$$y = y_0 + u_2 t$$

$$\frac{df}{dt}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{df}{dt}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d(x_0 + u_1 t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d(y_0 + u_2 t)}{dt}$$

$$\frac{df}{dt}(x_0, y_0) =$$

ถ้าสามารถหาอนุพันธ์ของ $f(x,y)$ ได้ที่จุด (x_0, y_0)

และ $\mathrm{u} =< u_1, u_2 >$ เป็น***เวกเตอร์ 1 หน่วย***

แล้ว **อนุพันธ์ระบุทิศทาง**ของ f ที่จุด (x_0, y_0) ในทิศทาง

ของ u คือ

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$

จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน

$$f(x, y) = 3x^2 y$$

ที่จุด (1,2) ในทิศทางของเวกเตอร์ $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

จงหาอนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน

$$f(x,y) = y^2 \ln x$$

ที่จุด $(e,2)$ ในทิศทางของเวกเตอร์ $\mathrm{v} = \sqrt{3}\mathrm{i} + \mathrm{j}$

<u>อนุพันธ์ระบุทิศทาง</u>ของ f ที่จุด (x_0,y_0) ในทิศทางของ $<u_1,u_2>$ คือ

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}u_1+\frac{\partial f}{\partial y}u_2\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$

สามารถเขียนใหม่ในรูปของเวกเตอร์ได้คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x}u_1+\frac{\partial f}{\partial y}u_2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{j}\right)\bullet\left(u_1\mathrm{i}+u_2\mathrm{j}\right)$$

$$=< f_x, f_y >\bullet< u_1,u_2 >$$

เวกเตอร์ดังกล่าวมีชื่อเฉพาะว่า

<u>**แกรเดียนของ *f* (gradient of *f*)**</u> และใช้สัญลักษณ์

$$\nabla f(x,y)=$$

สัญลักษณ์ ∇ อ่านว่า “เดล” (del)

ในเอกสารบางฉบับอาจจะอ่านว่า “นาบลา” (nabla)

จงหาแกรเดียนของ $\boldsymbol{f}$ และ**อนุพันธ์**ของ $\boldsymbol{f}$ $(x,y)=xe^{y}$ ที่จุด (2,0) ในทิศทางจากจุด $P(2,0)$ ไปยังจุด $Q(4,1)$

<u>อนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร</u> $f(x,y)$

ถ้าสามารถหาอนุพันธ์ของ $f(x,y)$ ได้ที่จุด (x_0, y_0)

และ $\mathrm{u} = < u_1, u_2 >$ เป็น***<u>เวกเตอร์ 1 หน่วย</u>***

แล้ว **<u>อนุพันธ์ระบุทิศทาง</u>**ของ f ที่จุด (x_0, y_0) ในทิศทาง

ของ u คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2$$

<u>แกรเดียนของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร</u> $f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = \left\langle f_x, f_y \right\rangle$$

$$= f_x\mathrm{i} + f_y\mathrm{j}$$

<u>อนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน 2 ตัวแปร</u>

$$\nabla f(x,y)\cdot\mathrm{u}$$

เมื่อ $\mathrm{u} = < u_1, u_2 >$ เป็น***<u>เวกเตอร์ 1 หน่วย</u>***

<u>อนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน 3 ตัวแปร</u> $f(x, y, z)$

ถ้าสามารถหาอนุพันธ์ของ $f(x, y, z)$ ได้ที่จุด (x_0, y_0, z_0)

และ $\mathrm{u} = < u_1, u_2, u_3 >$ เป็น***<u>เวกเตอร์ 1 หน่วย</u>***

แล้ว **<u>อนุพันธ์ระบุทิศทาง</u>**ของ f ที่จุด (x_0, y_0, z_0) ในทิศทาง

ของ u คือ

$$\frac{\partial f}{\partial x} u_1 + \frac{\partial f}{\partial y} u_2 + \frac{\partial f}{\partial z} u_3$$

<u>แกรเดียนของฟังก์ชัน 3 ตัวแปร</u> $f(x,y,z)$

$$\nabla f(x,y,z) = \left\langle f_x, f_y, f_z \right\rangle$$

$$= f_x\mathrm{i} + f_y\mathrm{j} + f_z\mathrm{k}$$

<u>อนุพันธ์ระบุทิศทางของฟังก์ชัน 3 ตัวแปร</u>

$$\nabla f(x,y,z)\cdot \mathrm{u}$$

เมื่อ $\mathrm{u} = < u_1, u_2, u_3 >$ เป็น***<u>เวกเตอร์ 1 หน่วย</u>***

<u>จงหาแกรเดียนของ f</u> (∇f) ที่จุด $(1,1,1)$

เมื่อ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2 + z\ln x$

จงหาแกรเดียนของ *f* และ**อนุพันธ์**ของ $\boldsymbol{f}(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ ที่จุด (1,1,0) ในทิศทาง v=2i-3j+6k

ค่าของเกรเดียนท์ของ $f(x, y, z) = y \ln(x + y + z)$ ณ จุด $(-3, 4, 0)$ คือข้อใด

(1) $4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$

(2) $2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$

(3) $-4\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

(4) $2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$

(5) $\vec{0}$

ถ้า $f(x,y) = 3x^2 - y^2$ แล้ว

$\left|\nabla\vec{f}\right| = 6$ ณ จุดในข้อใด

(1) $\left\{(x,y) \middle| \, x^2 + y^2 = 1\right\}$

(2) $\left\{(x,y) \middle| \, x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}$

(3) $\left\{(x,y) \middle| \, y = x^2\right\}$

(4) $\left\{(x,y) \middle| \, x^2 - \dfrac{y^2}{9} = 1\right\}$

(5) $\left\{(x,y) : \, y = 3x\right\}$

ทิศทางที่ $f(x,y,z) = \frac{x}{z} + \frac{z}{y^2}$

เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วที่สุด ณ จุด $(1, 2, -2)$ คือข้อใด

(1) $\frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$

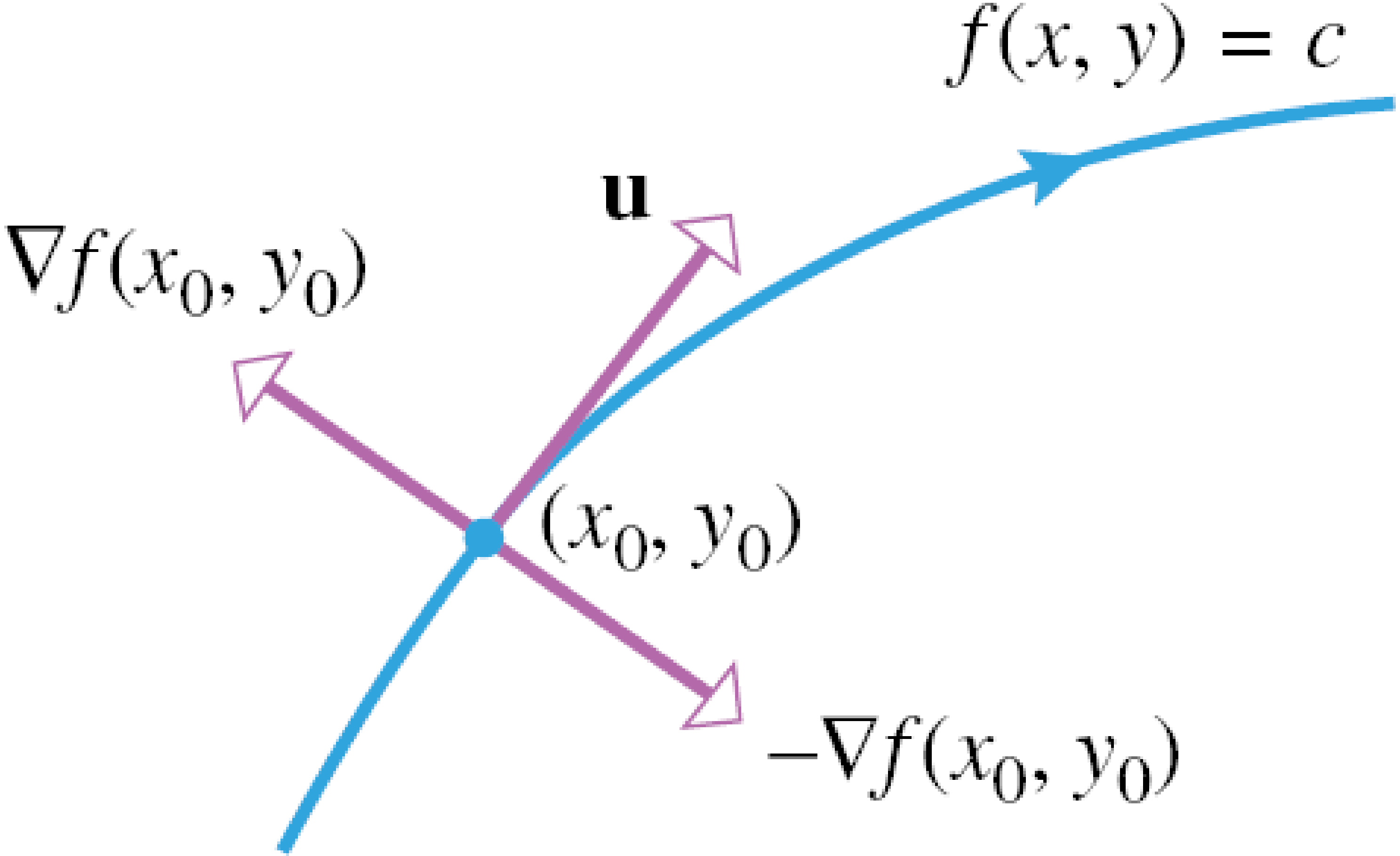
(2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

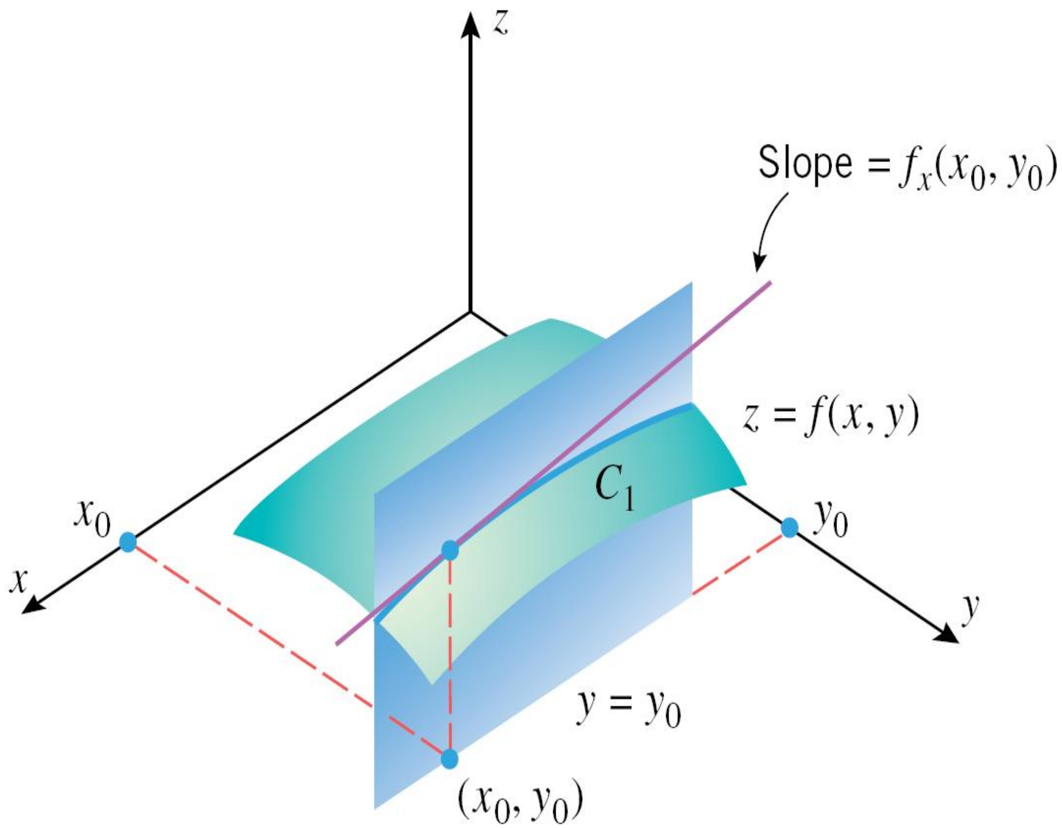
(4) $-\frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$

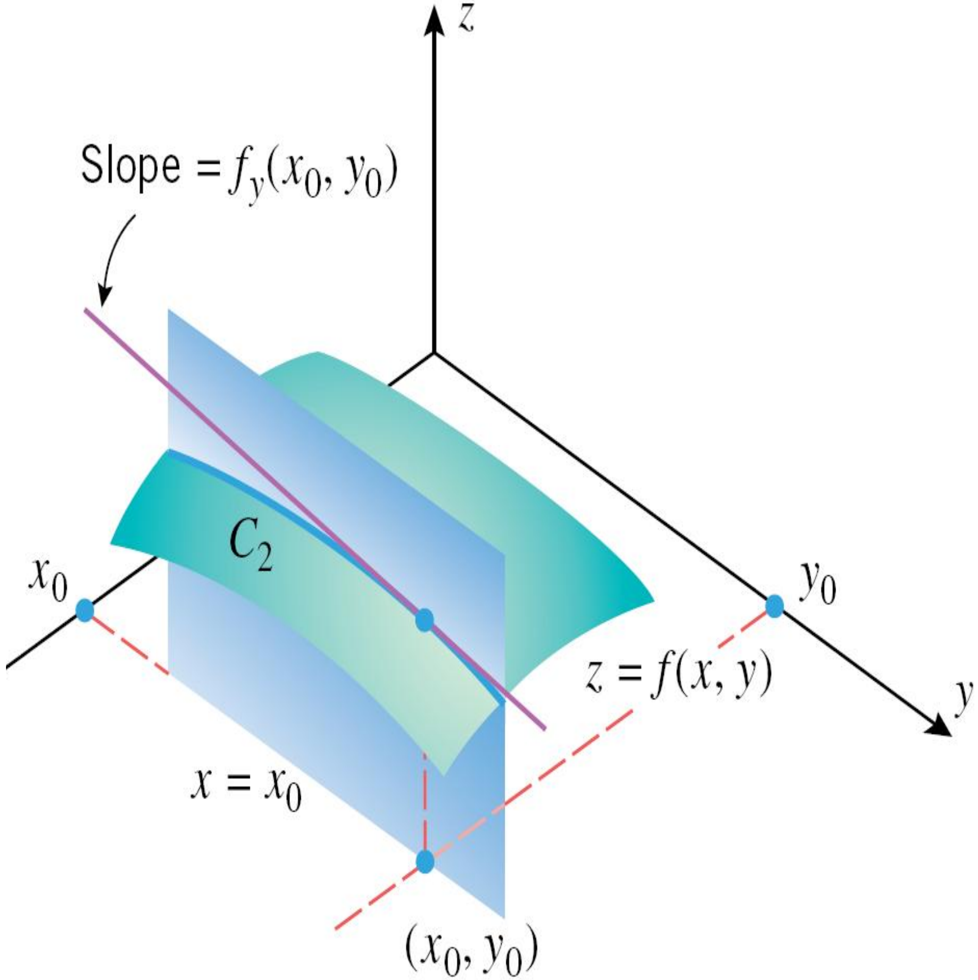
(5) $\frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{k}$

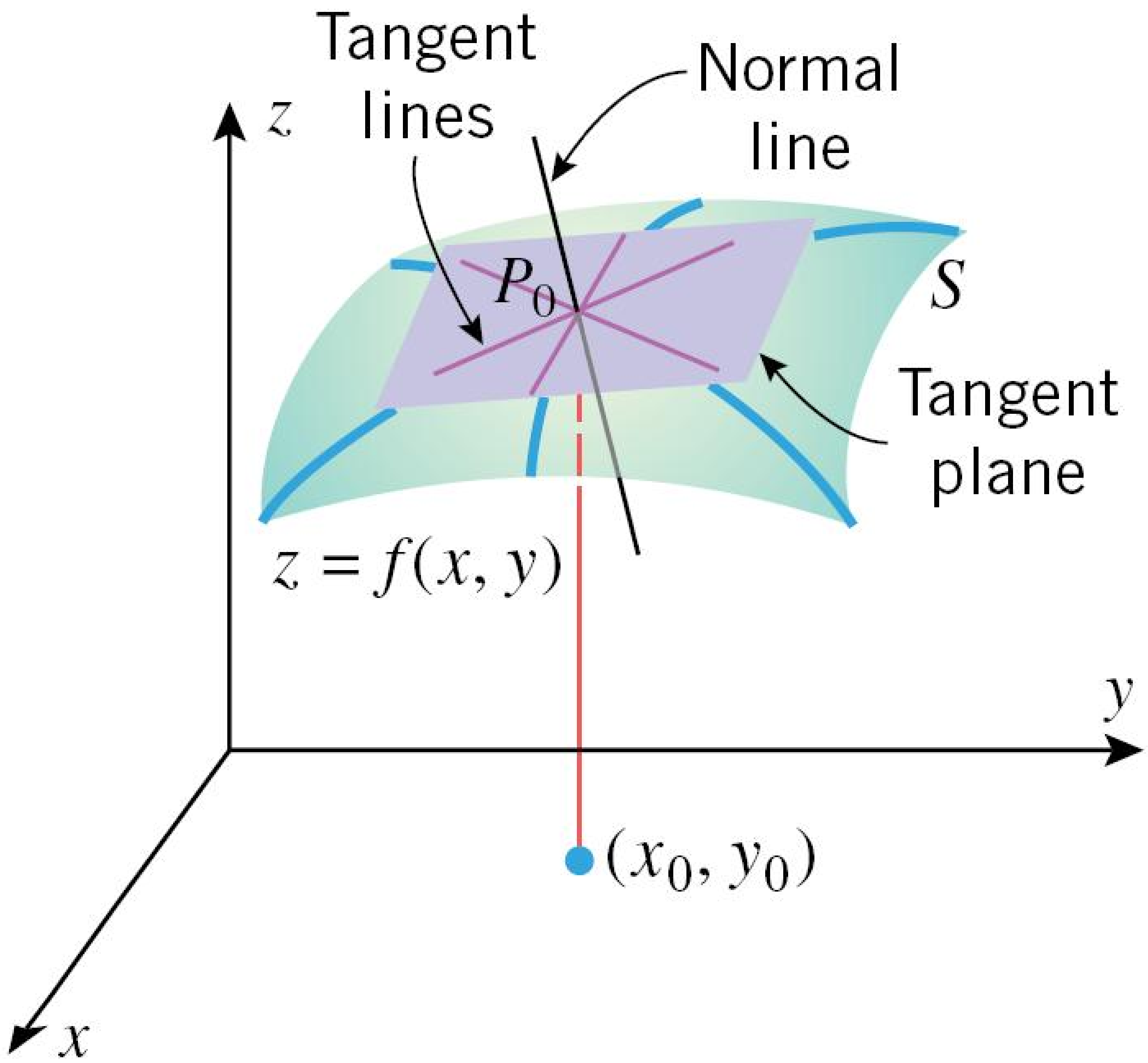
การประยุกต์ใช้แกรเดียน (Application of gradients)



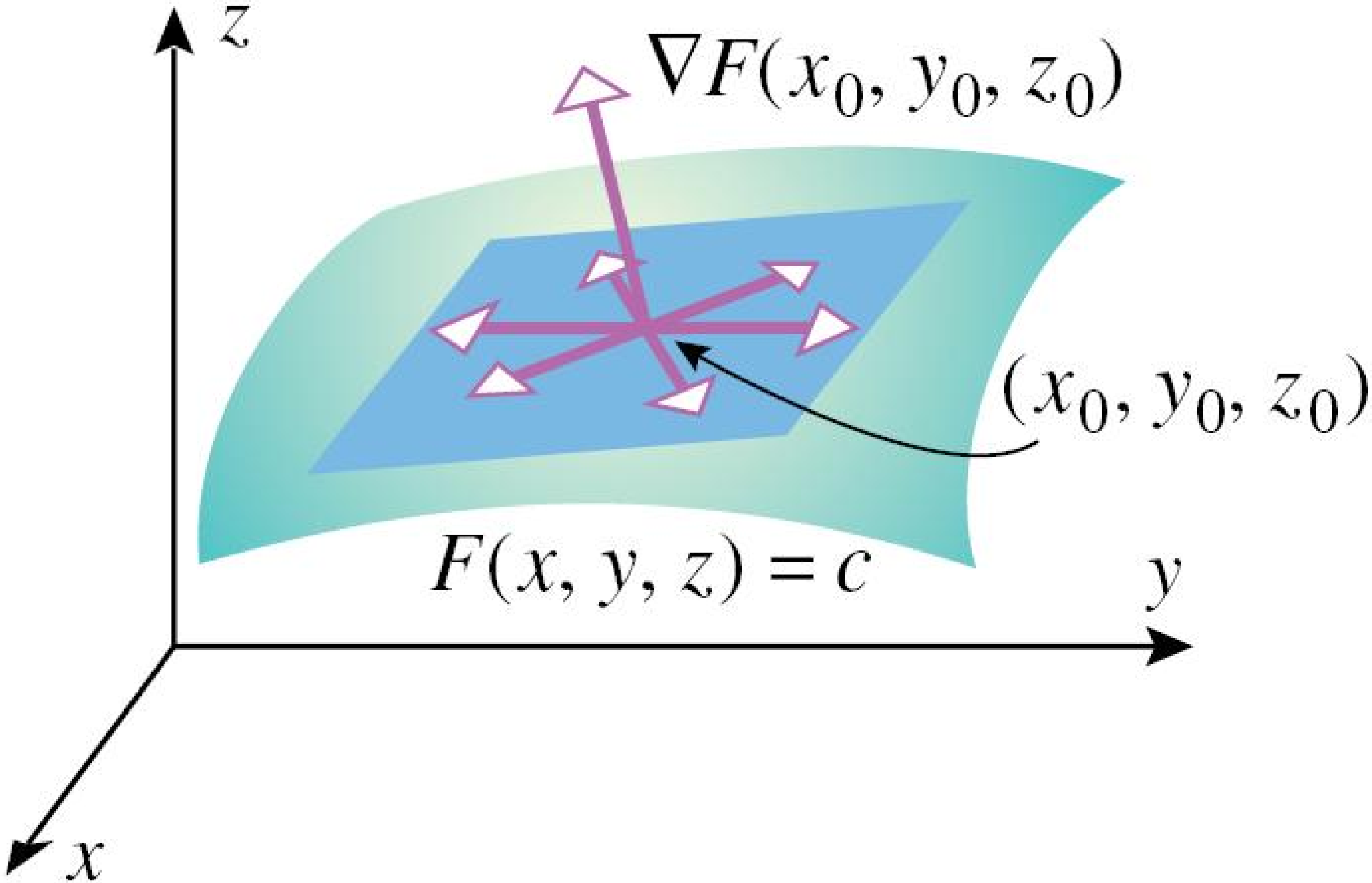
ความหมายของอนุพันธ์ย่อยในเชิงเรขาคณิต






Tangent lines
Normal line
z
P_0
S
Tangent plane
$z = f(x, y)$
y
(x_0, y_0)
x

ระนาบสัมผัสกับผิวโค้ง



ระนาบสัมผัสกับผิวโค้ง

ถ้า $F(x, y, z) = c$ เป็นสมการผิวโค้งโดยที่ c เป็นค่าคงตัวใดๆ และ ถ้า $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ แล้ว ระนาบสัมผัสผิวโค้ง $F(x, y, z) = c$ ณ จุด (x_0, y_0, z_0) คือ

$$F_x\Big|_{(x_0, y_0, z_0)}(x - x_0) + F_y\Big|_{(x_0, y_0, z_0)}(y - y_0) + F_z\Big|_{(x_0, y_0, z_0)}(z - z_0) = 0$$

หรือ

$$\nabla F_{(x_0, y_0, z_0)} \cdot \left\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \right\rangle = 0$$

จงหาระนาบสัมผัสผิวโค้ง $z = x^2 y$ ณ จุด $(2,1,4)$

สมการของระนาบสัมผัสกับพื้นผิว

$z = xe^{-y}$ ณ (1, 0, 1) คือข้อใด

(1) $2x - 3y + 2 = -3$

(2) $3x - x - y = 5$

(3) $2x + 3y - z = -2$

(4) $x + y - z = 1$

(5) $x - y - z = 0$