ผศ.ดร.เจษฎา ตัณฑนุช

โทร. 4641 FAX. 4640

email: jessada@sut.ac.th

http://math.sut.ac.th/~jessada

เนื้อหาวิชา

-ทบทวนการหาค่าปริพันธ์ไม่จำกัดเขต การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า

-การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน

-เศษส่วนย่อยและการหาปริพันธ์โดยการแยกเศษส่วนย่อย

-การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และการหาปริพันธ์ด้วยการแทนค่า
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

-การหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ

-ลำดับ การลู่เข้า การลู่ออก

-อนุกรมอนันต์ การลู่เข้า การลู่ออก

-การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมอนันต์

-พหุนามเทย์เลอร์ และอนุกรมเทย์เลอร์

-การลู่เข้าของอนุกรมเทย์เลอร์

-การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข

การหาปริพันธ์ (Integration)

ถ้าฟังก์ชัน $F(x)$ มีอนุพันธ์คือ $f(x)$ หรือก็คือ

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

เราเรียกฟังก์ชัน $F(x)$ ว่าเป็น**<u>ปฏิยานุพันธ์</u>** (antiderivative)ของ $f(x)$

เช่น x^2 เป็น**ปฏิยานุพันธ์** ของ $2x$

เช่น $\sin x$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์** ของ $\cos x$

เช่น $(\sin x)+10$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์** ของ $\cos x$

ปฏิยานุพันธ์ ของ $f(x)$ อาจจะมีได้หลายตัวเช่น

x^2, x^2+1, x^2-1, x^2+e, $x^2-\frac{\pi}{2}$, ... เป็น**ปฏิยานุพันธ์** ของ $2x$

หมายเหตุ อนุพันธ์ของค่าคงตัวใดๆ มีค่าเท่ากับ 0

เราเรียกเซตของ**ปฏิยานุพันธ์**ดังกล่าวว่า

ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral) และใช้สัญลักษณ์ว่า

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์

$$\frac{d0}{dx} =$$

$$\frac{d1}{dx} =$$

$$\frac{d\pi}{dx} =$$

$$\frac{de}{dx} =$$

$$\frac{dc}{dx} =$$

ปริพันธ์

$$\int 0dx =$$

เมื่อ c เป็น<u>ค่าคงตัว</u>ใดๆ

อนุพันธ์	ปริพันธ์
$\frac{dx}{dx} =$	
$\frac{dx^2}{dx} =$	
$\frac{dx^5}{dx} =$	
$\frac{dx^{-8}}{dx} =$	
$\frac{dx^{\sqrt{2}}}{dx} =$	

เมื่อ c เป็น<u>ค่าคงตัว</u>ใดๆ

อนุพันธ์	ปริพันธ์
$\dfrac{d(x+2)}{dx} =$	
$\dfrac{d(x^2-5)}{dx} =$	
$\dfrac{d(x^5+\frac{\pi}{2})}{dx} =$	
$\dfrac{d(x^{-8}+x^{\frac{1}{2}})}{dx} =$	

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์

$$\frac{dx^n}{dx} =$$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} =$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{dx} =$$

ปริพันธ์

$$\int x^n dx =$$

ปริพันธ์

$$\int x^n dx =$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx =$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx =$$

อนุพันธ์

$$\frac{de^x}{dx} =$$

$$\frac{d \sin x}{dx} =$$

$$\frac{d \cos x}{dx} =$$

$$\frac{d \tan x}{dx} =$$

ปริพันธ์

$$\int e^x dx =$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์	ปริพันธ์
$\dfrac{d \ln x}{dx} =$	
$\dfrac{d \sec x}{dx} =$	
$\dfrac{d \csc x}{dx} =$	
$\dfrac{d \cot x}{dx} =$	

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

$$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

เมื่อ k เป็น<u>ค่าคงตัว</u>ใดๆ

$$\int \left[k_1 f(x) \pm k_2 g(x)\right] dx = k_1 \int f(x)dx \pm k_2 \int g(x)dx$$

เมื่อ k_1, k_2 เป็น<u>ค่าคงตัว</u>ใดๆ

ปริพันธ์

$$\int \frac{x^2 + e^x}{2} dx$$

$$\int \cos y - 2\sec^2 y dy$$

$$\int \frac{\pi \sin z - ez^{-1}}{\sqrt{2}} dz$$

$$\int \sqrt{u^3} + \sqrt[3]{u^2} - \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

ปริพันธ์

$$\int \left(4\sec^2\theta - 3\csc^2\theta\right) d\theta$$

$$\int \frac{t\sqrt{t} + \sqrt[4]{t}}{t^2}\, dt$$

$$\int \cos\omega(\tan\omega + \sec\omega)\, d\omega$$

$$\int \frac{\csc\phi}{\csc\phi - \sin\phi}\, d\phi$$

กฎลูกโซ่

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(1-x)^8}{dx} =$$

$$\frac{d\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{dx} =$$

$$\frac{d\sin^8 x}{dx} =$$

$$\frac{d\tan^4(3x)}{dx} =$$

$$\frac{d\sqrt{1-\cos^2 x}}{dx} =$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{dx} =$$

การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า

Integration by Substitution

การหาปริพันธ์โดย**การแทนค่า**เป็นเสมือน**บทกลับ**
ของการหาอนุพันธ์โดยใช้**กฎลูกโซ่**

พิจารณา $\int f(g(x))g'(x)dx$

ถ้าให้ $u = g(x)$ พบว่า $\frac{du}{dx} = \frac{dg}{dx}(x) = g'(x)$

ดังนั้น differential ของ u คือ

$$du = g'(x)dx$$

แสดงว่า

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

$$= F(u) + c$$

แทนค่า u กลับ $= F(g(x)) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$\int \cos(4x)dx =$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$\int \cos(4x+5)dx =$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$\int \sqrt{1-3x}dx =$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-3x}}dx =$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x^3}}dx =$$

$$\int x\cos\left(x^2\right)dx =$$

$$\int \frac{t\sqrt{t+1}+\sqrt{t+1}+\sqrt[4]{t+1}}{(t+1)^2}dt$$

$$\int e^{2x}dx =$$

$$\int a^{x}dx =$$

$$\int xe^{x^2}dx =$$

$$\int x(e^{x^2} - \sin x^2)dx =$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx =$$

$$\int \frac{\ln x + 1}{x}dx =$$

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx =$$

$$\int \frac{2x+e^x}{(x^2+e^x)^{11}}dx =$$

อนุพันธ์ของผลคูณ

$$\frac{d(u \bullet v)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\int \frac{d(u \bullet v)}{dx} dx = \int \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \right) dx$$

การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน

Integration by Parts

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วนเป็นเสมือน
<u>บทกลับ</u>ของการหา**อนุพันธ์ของผลคูณ**

$$\int xe^x \, dx$$

$$\int xe^{-x} \, dx$$

$$\int xe^{3x} \, dx$$

$$\int x^2e^x \, dx$$

$$\int x^2e^{-x} \, dx$$

$$\int x \cos x \, dx$$

$$\int x \sin 2x \, dx$$

$$\int x \cos 3x \, dx$$

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

$$\int e^x \cos x \, dx$$

$$\int \ln x \, dx$$

$$\int x \ln x \, dx$$

$$\int (\ln x)^2 \, dx$$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$$

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$$

$$\int x\sec^2 x\,dx$$

$$\int x\tan^2 x\,dx$$

$$\int \sin(\ln x)\,dx$$

$$\int \cos(\ln x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{x-1}dx$$

$$\int \frac{1}{x+5}dx$$

$$\int \frac{1}{4x-5}dx$$

$$\int \frac{1}{ax+b}dx$$

การหาปริพันธ์โดยการแยกเศษส่วนย่อย

Integration by Partial Fractions

การหาปริพันธ์โดยการแยกเศษส่วนย่อย
โดยส่วนใหญ่จะใช้สำหรับการหาปริพันธ์
ของ**ฟังก์ชันตรรกยะ**

ฟังก์ชันตรรกยะ

ฟังก์ชันตรรกยะคือฟังก์ชันที่สามารถถูกเขียนได้ในรูปของ**เศษส่วนของพหุนาม** เช่น

$\dfrac{1}{x+3}$ เศษคือพหุนาม 1 ส่วนคือพหุนาม $x+3$

$\dfrac{x^2+2}{x^3+3x+1}$ เศษคือพหุนาม x^2+2 ส่วนคือพหุนาม x^3+3x+1

$\dfrac{x^3+1}{(x+1)^3}$ เศษคือพหุนาม x^3+1 ส่วนคือพหุนาม$(x+1)^3$

ตัวอย่าง เราพบว่า $\dfrac{6x+7}{(x+2)^2} = \dfrac{6}{x+2} - \dfrac{5}{(x+2)^2}$

ดังนั้น

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx = \int \left[\frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2} \right] dx$$

$$= \int \frac{6}{x+2}\,dx - \int \frac{5}{(x+2)^2}\,dx$$

การแยกเศษส่วนย่อย

ฟังก์ชัน $\dfrac{p_n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)}$

สามารถแยกได้เป็น

$$\frac{p_n(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_m)} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_2)} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a_m)}$$

<u>หมายเหตุ</u> n ต้องน้อยกว่า m

<u>ตัวอย่าง</u>

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3}=\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}=\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{A_2}{(x-3)}$$

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4}=\frac{5x-10}{(\qquad)(\qquad)}=\frac{A_1}{(\qquad)}+\frac{A_2}{(\qquad)}$$

$$\frac{x^2+4x+1}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)(\qquad)(\qquad)}=\frac{A_1}{(x+2)}+\frac{A_2}{(\qquad)}+\frac{A_3}{(\qquad)}$$

$$\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}=$$

การแยกเศษส่วนย่อย

ฟังก์ชัน $$\frac{p_n(x)}{(x-a_1)^m}$$

สามารถแยกได้เป็น

$$\frac{p_n(x)}{(x-a_1)^m} = \frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a_1)^m}$$

<u>หมายเหตุ</u> n ต้องน้อยกว่า m

ตัวอย่าง

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{A_1}{(x+1)} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3}$$

$$\frac{5x^2-10}{(x-1)^4} =$$

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2} =$$

การแยกเศษส่วนย่อย

ฟังก์ชัน $$\frac{p_n(x)}{(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_r)^{m_r}}$$

สามารถแยกได้เป็น

$$\frac{A_1}{(x-a_1)}+\frac{A_2}{(x-a_1)^2}+\cdots+\frac{A_{m_1}}{(x-a_1)^{m_1}}+$$

$$\frac{B_1}{(x-a_2)}+\frac{B_2}{(x-a_2)^2}+\cdots+\frac{B_{m_2}}{(x-a_2)^{m_2}}+$$

$$\cdots$$

$$\frac{\zeta_1}{(x-a_r)}+\frac{\zeta_2}{(x-a_r)^2}+\cdots+\frac{\zeta_{m_r}}{(x-a_r)^{m_r}}+$$

<u>ตัวอย่าง</u>

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2}=$$

$$\frac{2x+4}{x^3(x-2)^2}=$$

การแยกเศษส่วนย่อย

ฟังก์ชัน $$\frac{p_n(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)\cdots(a_mx^2+b_mx+c_m)}$$

(ไม่สามารถแยกตัวประกอบ $a_ix^2+b_ix+c_i=0$, $i=1,\ldots,m$ ได้)

สามารถแยกได้เป็น

$$\frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+\cdots+\frac{A_mx+B_m}{(a_mx^2+b_mx+c_m)}$$

ตัวอย่าง

$$\frac{2x+4}{(x^2+1)(x^2+3)} =$$

$$\frac{2x+4}{(x^2+1)(x^2+3)^2} =$$

การแยกเศษส่วนย่อย

ฟังก์ชัน $$\frac{p_n(x)}{(x-a)^{m_1}(a_2x^2+b_2x+c_2)^{m_2}}$$

(ไม่สามารถแยกตัวประกอบ $a_2x^2+b_2x+c_2=0$ ได้)

สามารถแยกได้เป็น

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_{m_1}}{(x-a)^{m_1}}+$$

$$\frac{B_1x+C_1}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^1}+\frac{B_2x+C_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}+\cdots+\frac{B_{m_2}x+C_{m_2}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^{m_2}}$$

ตัวอย่าง

$$\frac{x^2+x-2}{3x^3-x^2+3x-1}=\frac{x^2+x-2}{(3x-1)(x^2+1)}=$$

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3}=\frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}=\frac{A_1}{(x+1)}+\frac{A_2}{(x-3)}$$

$$\frac{5x-10}{x^2-3x-4}=\frac{5x-10}{(x-4)(x+1)}=\frac{A_1}{(\qquad)}+\frac{A_2}{(\qquad)}$$

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2}=$$

$$\frac{9x^2+4x+1}{3x^3-x^2+3x-1}=\frac{9x^2+4x+1}{(3x-1)(x^2+1)}=$$

$$\frac{x-1}{x^2+4x+4}=$$

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2}=$$

$$\frac{2x^2-2x-1}{x^3-x^2}=$$

$$\frac{2x^2+3x+1}{3x^3-x^2+3x-1}=\frac{2x^2+3x+1}{(3x-1)(\qquad\qquad)}=$$

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)}=$$

$$\int \frac{x-1}{x^2+4x+4}dx =$$

ค่าของปริพันธ์ $\int \frac{2x^2+x-2}{x^3+2x^2}\,dx$ เท่ากับเท่าใด

(1) $\ln(x^2+2x)+\frac{1}{x}+c$

(2) $\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)+\frac{1}{x}+c$

(3) $\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)+\frac{1}{x}+c$

(4) $\ln\left(\frac{x}{x+2}\right)-\frac{1}{x}+c$

(5) $\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)-\frac{1}{x}+c$

<u>หมายเหตุ</u> c เป็นค่าคงตัวใดๆ

การหาปริพันธ์ด้วยการแทนค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Integration by Trigonometric Substitution

การหาปริพันธ์ด้วย**การแทนค่าฟังก์ชันตรีโกณ**เป็นการขยายแนวคิดจาก**การหาปริพันธ์โดยวิธีแทนที่**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin\left(A+B\right)=$$

$$\sin\left(A-B\right)=$$

$$\cos\left(A+B\right)=$$

$$\cos\left(A-B\right)=$$

$$\sin(2x) =$$

$$\cos(2x) =$$

$$\cos^2(x) =$$

$$\sin^2(x) =$$

$$\sin A + \sin B =$$

$$\sin A - \sin B =$$

$$\cos A + \cos B =$$

$$\cos A - \cos B =$$

$$\sin A \cos B =$$

$$\cos A \cos B =$$

$$\sin A \sin B =$$

การหาปริพันธ์ฟังก์ชันตรีโกณ

$$\int \cos x dx =$$

$$\int \sin x dx =$$

$$\int \cos^2 x dx =$$

$$\int \sin^2 x dx =$$

$$\int \cos^4 x dx =$$

$$\int \sin^4 x dx =$$

$$\int \sin x \cos x dx =$$

$$\int \cos^3 x dx =$$

$$\int \sin^3 x dx =$$

$$\int \tan^2 x dx =$$

$$\int \tan^3 x dx =$$

$$\int \sec^3 x dx =$$

$$\int \sec^2 x\,dx =$$

$$\int \tan x\,dx =$$

$$\int \cot x\,dx =$$

$$\int \sec x\,dx =$$

$$\int \csc^2 x\,dx =$$

$$\int \csc x\,dx =$$

$$\int \sin x \cos x dx =$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx =$$

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx =$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx =$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln\left|\cos x\right| + c = \ln\left|\sec x\right| + c$$

$$\int \sec x dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + c$$

$$\int \csc x dx = -\ln\left|\csc x + \cot x\right| + c = \ln\left|\csc x - \cot x\right| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln\left|\sin x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$ ใช้การแทนค่า $x=\sin\theta$

เลียนแบบจาก $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$$ ใช้การแทนค่า $x=\sec\theta$

เลียนแบบจาก $\tan\theta=\sqrt{\sec^2\theta-1}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$$ ใช้การแทนค่า $x=\tan\theta$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx$$ เลียนแบบจาก $\sec\theta=\sqrt{\tan^2\theta+1}$

การหาปริพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับ	บางครั้งจะสมมติให้
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a\tan\theta$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+1}dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+1}dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx =$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}dx =$$

สูตรพื้นฐานสำหรับการหาค่าปริพันธ์

Basic Integral Formulae

ส่วนที่ยากที่สุดในการหาปริพันธ์คือ “**การเลือกใช้วิธีคิดที่เหมาะสมสำหรับการหาปริพันธ์ในแต่ละครั้ง**”

การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า
Integration by Substitution

การหาปริพันธ์โดยการแยกส่วน
Integration by Parts

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

การหาปริพันธ์โดยการแยกเศษส่วนย่อย
Integration by Partial Fractions

การหาปริพันธ์ด้วยการแทนค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ
Integration by Trigonometric Substitution

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$\int u \cos u\,du$$

$$\int \frac{1}{x^2-4x-5}\,dx$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx$$

$$\int u\cos u\,du$$

$$\int \cos^2(2\theta)\,d\theta$$

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx$$

$$\int \frac{x-2}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$\int \frac{t\sqrt{t+1}+\sqrt{t+1}+\sqrt[4]{t+1}}{(t+1)^2}\,dt$$

$$\int e^t \sin t\,dt$$

$$\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$$

$$\int \frac{1}{1-4x^2}\,dx$$

$$\int \frac{e^t}{e^{2t}+3e^t+2}\,dt$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{t}+t\sqrt{t}}\,dt$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx$$

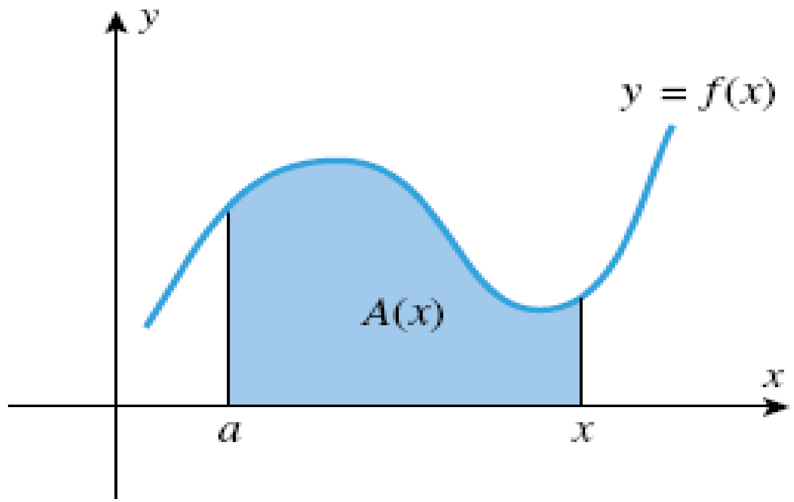
(ข้อสอบกลางภาควิชา Calculus II ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2552)

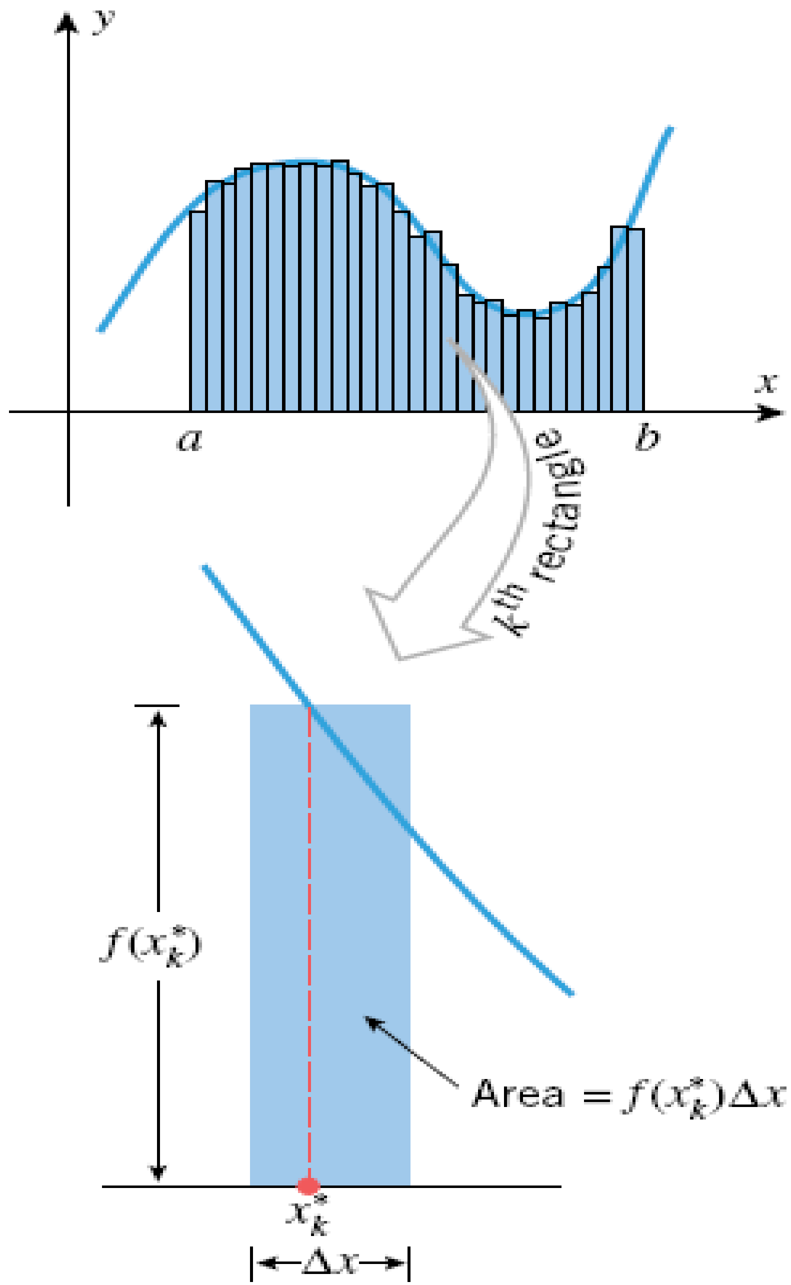
$$\int \frac{1}{x^3+2x^2+2x}\,dx$$

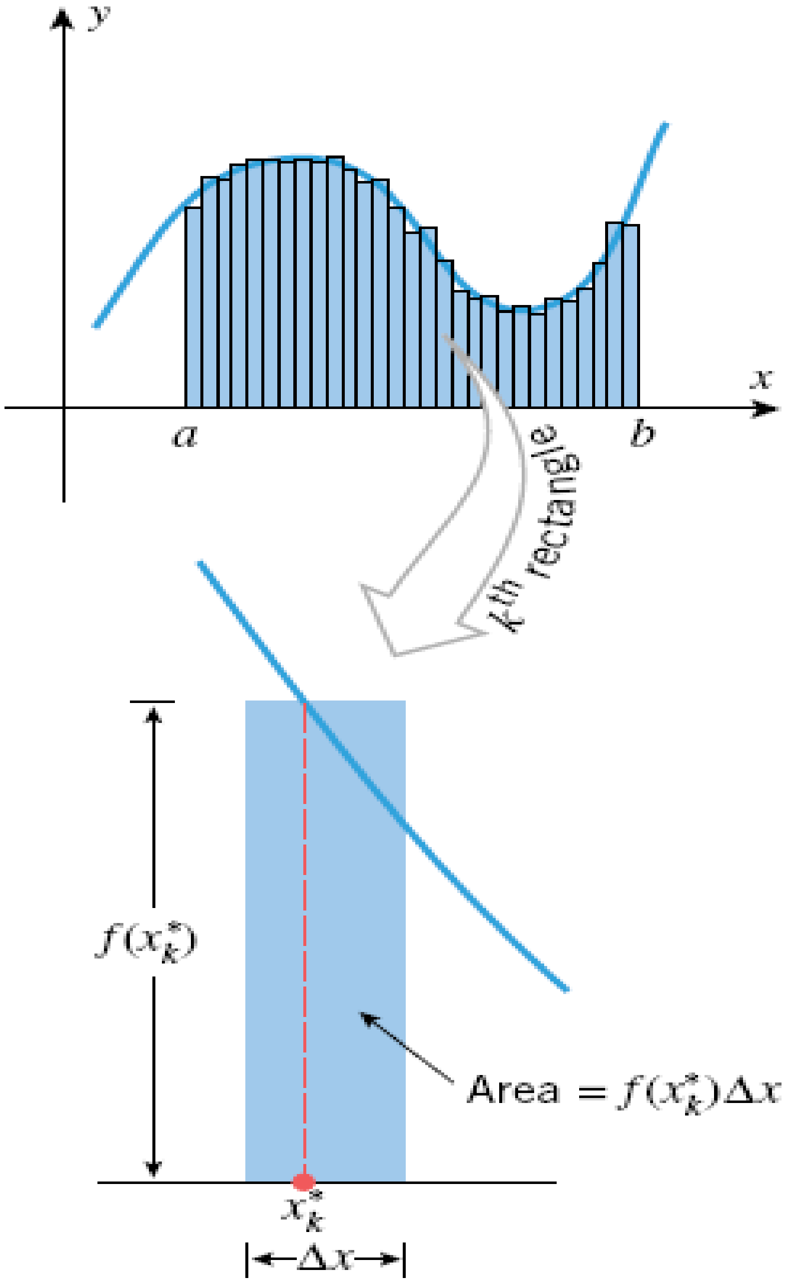
ผลรวมรีมานน์และการหาปริพันธ์จำกัดเขต

Reimann Sum and Definite Integration

ผลรวมรีมานน์และการหาปริพันธ์จำกัดเขตเป็นแนวความคิดในการนำการหาปริพันธ์ไปใช้หาพื้นที่ของรูปทรงใดๆ


y
y = f(x)
A(x)
x
a
x


y
x
a
b
k th rectangle
f(x*k)
Area = f(x*k)Δx
x*k
Δx



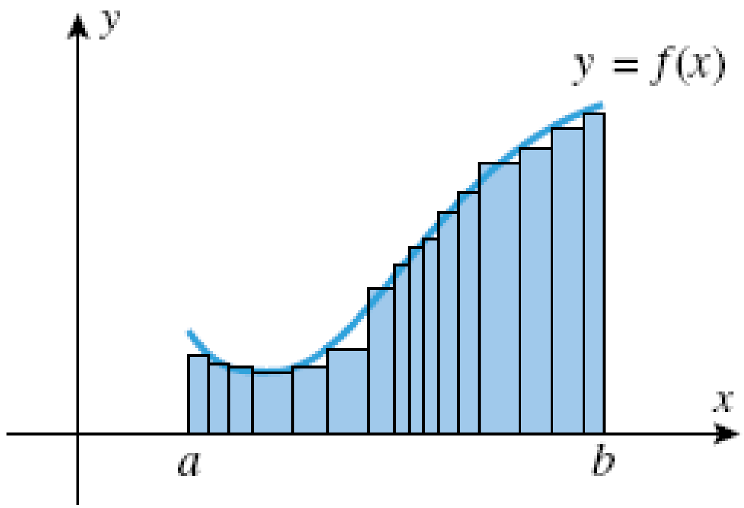


Figure 5.5.1

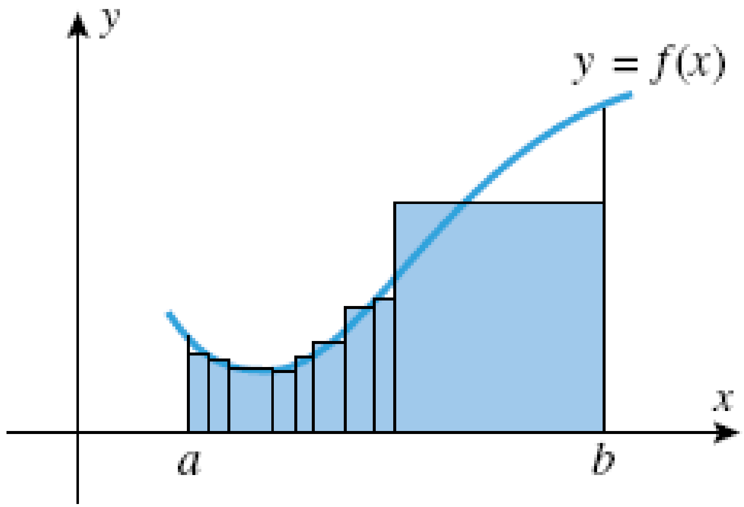
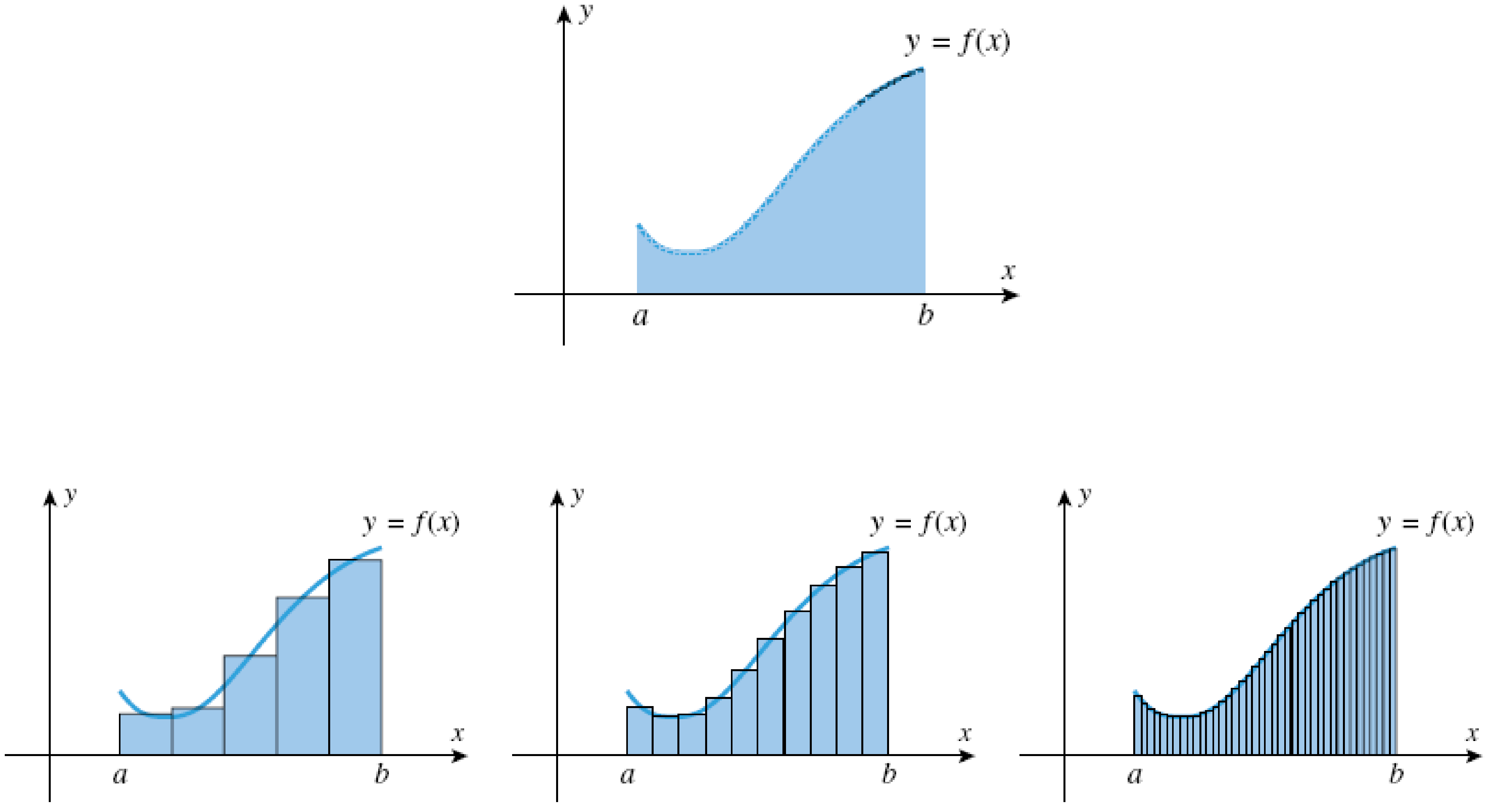
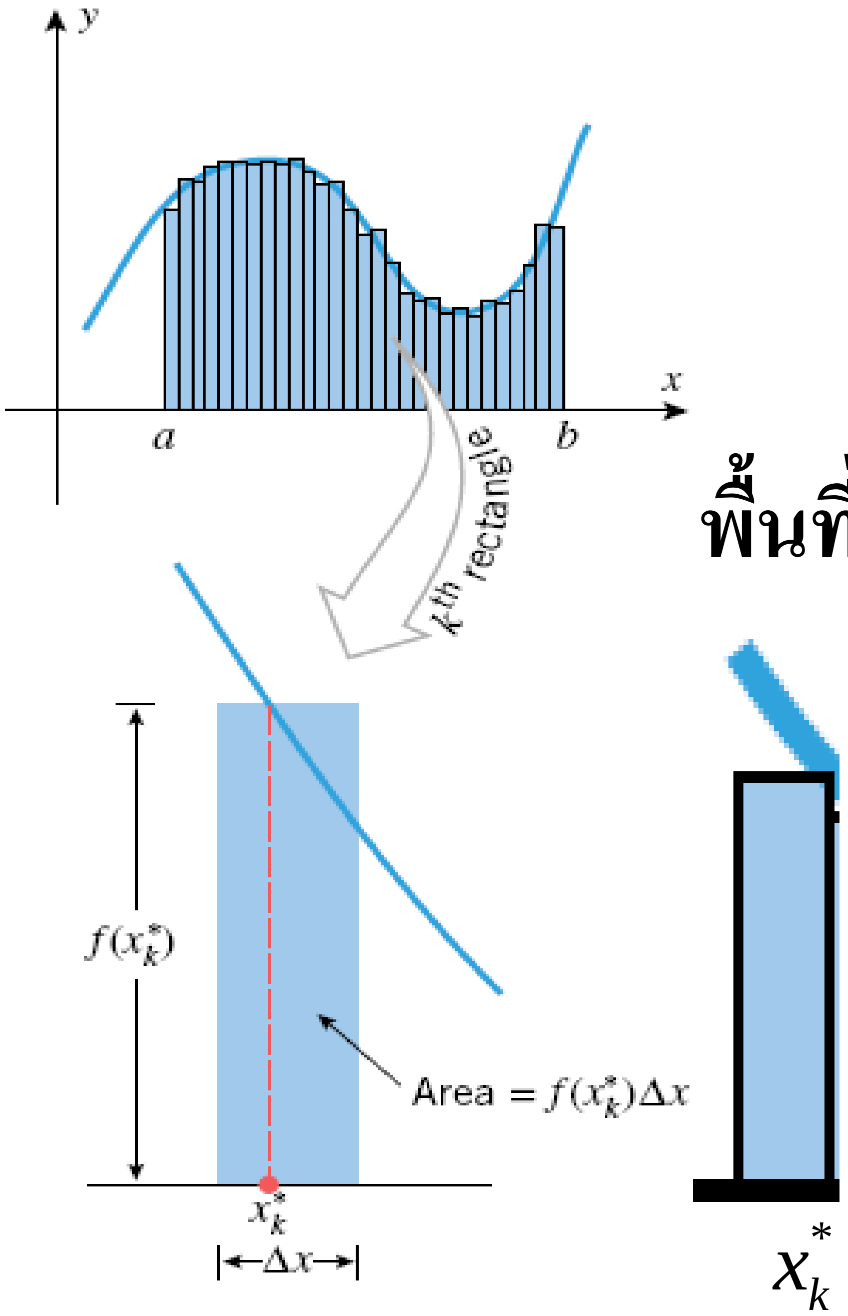


Figure 5.5.2



As n increases, the area of the rectangles approaches the exact area under the curve.

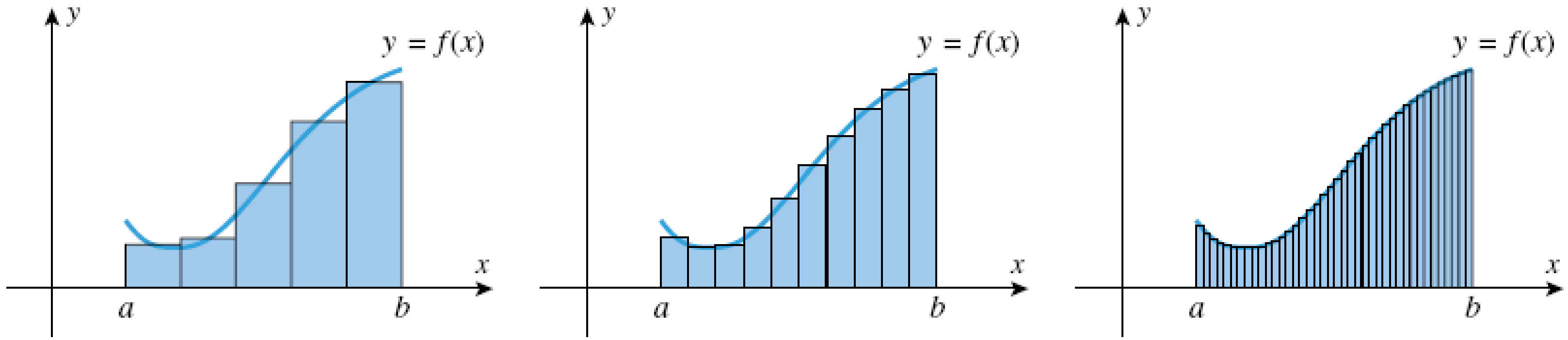


พื้นที่สี่เหลี่ยม = พื้นที่ฐาน x สูง

$$= f(x_k^*)\Delta x_k$$

พื้นที่ใต้กราฟ ≈ ผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยม

$$\approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$



ถ้า $n \to \infty$ แสดงว่า $\Delta x_k \to 0$

ทำให้ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \to$ พื้นที่ใต้กราฟ

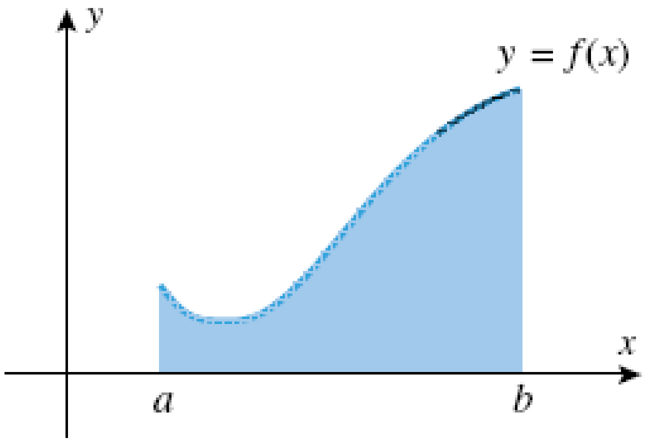
เราเรียกสัญลักษณ์ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ นี้ว่า ผลรวมรีมันน์

(Riemann sum)

เมื่อ $\Delta x_k \to 0$ เราใช้สัญลักษณ์ dx แทน Δx_k

และเราใช้สัญลักษณ์

$$\int_a^b f(x)dx \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$



นั่นคือเราใช้สัญลักษณ์

$\int_a^b f(x)dx$ แทนพื้นที่ใต้กราฟ $f(x)$

เมื่อ $a \le x \le b$

ภาษาอังกฤษวันละคำ !!!

integrate เป็นคำกริยา แปลว่ารวม, ทำให้รวม

ในทางคณิตศาสตร์ในบางครั้งหมายถึงการคำนวณด้วย

ณ ปัจจุบัน (ตุลาคม 2549) สามารถแปลเป็นคำยอดนิยม
ได้หมายถึงคำว่า "บูรณาการ"

ระวัง !!!

สัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$ มีความหมายหมายถึง $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$

ในทำนองเดียวกัน $\int_a^b f(y)dy = \int_{y=a}^{y=b} f(y)dy$

$$\int_a^b f(u)du = \int_{u=a}^{u=b} f(u)du \qquad \cdots$$

หลายๆ คนไม่ได้ระวังเรื่องนี้ และใช้ผิด

ในการ*<u>หาค่าปริพันธ์โดยการแทนที่</u>*

คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของการหาปริพันธ์จำกัดเขต

$$\int_a^b f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

เมื่อ k เป็น<u>ค่าคงตัว</u>ใดๆ

$$\int_a^b \left[k_1 f(x) \pm k_2 g(x)\right]dx = k_1\int_a^b f(x)dx \pm k_2\int_a^b g(x)dx$$

เมื่อ k_1, k_2 เป็น<u>ค่าคงตัว</u>ใดๆ

ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ ค่า $a \leq x \leq b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

ถ้า $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุกๆ ค่า $a \leq x \leq b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

และ

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ถ้า $a \le c \le b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

การหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยการแทนที่

Substitution in Definite Integration

การหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยการแทนที่ เป็นการขยายแนวคิดของการหาปริพันธ์จำกัดเขต ทำให้สามารถหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันที่ซับซ้อนมากขึ้นได้

ระวัง !!!

สัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$ **มีความหมายหมายถึง** $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$

ในทำนองเดียวกัน $\int_a^b f(y)dy = \int_{y=a}^{y=b} f(y)dy$

$$\int_a^b f(u)du = \int_{u=a}^{u=b} f(u)du \qquad \cdots$$

หลายๆ คนไม่ได้ระวังเรื่องนี้ และใช้ผิด

ในการ*<u>หาค่าปริพันธ์โดยการแทนที่</u>*

การหาปริพันธ์โดยการแทนที่

Integration by Substitution

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

เมื่อ $u = g(x)$

การหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยการแทนที่

Substitution in Definite Integration

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

การหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยการแทนที่
Substitution in Definite Integration

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)du$$

เมื่อ $u = g(x)$

$$\int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

$$\int_1^2 \frac{1}{1+3x}\,dx =$$

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$\int_{-1}^1 \sin(\pi\theta)\,d\theta =$$

การหาปริพันธ์จำกัดเขตโดย
การหาค่าปริพันธ์ทีละส่วน

Integration by Parts in Definite Integration

$$\int_{x=a}^{x=b} u\,dv = uv\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} v\,du$$

$$\int_1^5 \ln(x)dx =$$

$$\int_0^2 xe^{2x}dx =$$

$$\int_{-2}^2 \ln(x+3)dx =$$

$$\int_3^4 \frac{4}{x^2 - 4} =$$

(ข้อสอบกลางภาควิชา Calculus II ภาคการศึกษาที่ 2 ปีการศึกษา 2552)

$$\int_{0}^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

การหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ
Improper Integral

การหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ เป็นการขยายแนวคิดของการหาปริพันธ์จำกัดเขต โดยเป็นการหาปริพันธ์บนช่วงที่มีขอบเขตเป็นอนันต์ หรือ หาปริพันธ์บนช่วง $[a,b]$ แต่ฟังก์ชันที่หา มีค่าเป็นอนันต์บนช่วงดังกล่าว

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x}dx$$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{1} e^{x} dx$$

ค่าของปริพันธ์ $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ เท่ากับเท่าใด

(1) 0

(2) $\frac{\pi}{4}$

(3) $\frac{\pi}{2}$

(4) $\frac{3\pi}{4}$

(5) ∞

ค่าของปริพันธ์ $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1+x^2}\, dx$ เท่ากับเท่าใด

(1) $-\infty$

(2) $\frac{\pi}{4}$

(3) $\frac{\pi}{2}$

(4) $\frac{3\pi}{4}$

(5) π

ค่าของ $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$ เท่ากับเท่าใด

(1) 0

(2) $\frac{1}{2}$

(3) 1

(4) 2

(5) ∞

ค่าของ $\int_{-\infty}^{0} x^2 e^{x^3} dx$ เท่ากับเท่าใด

(1) $-\infty$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) 1

(4) 3

(5) ∞

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$$

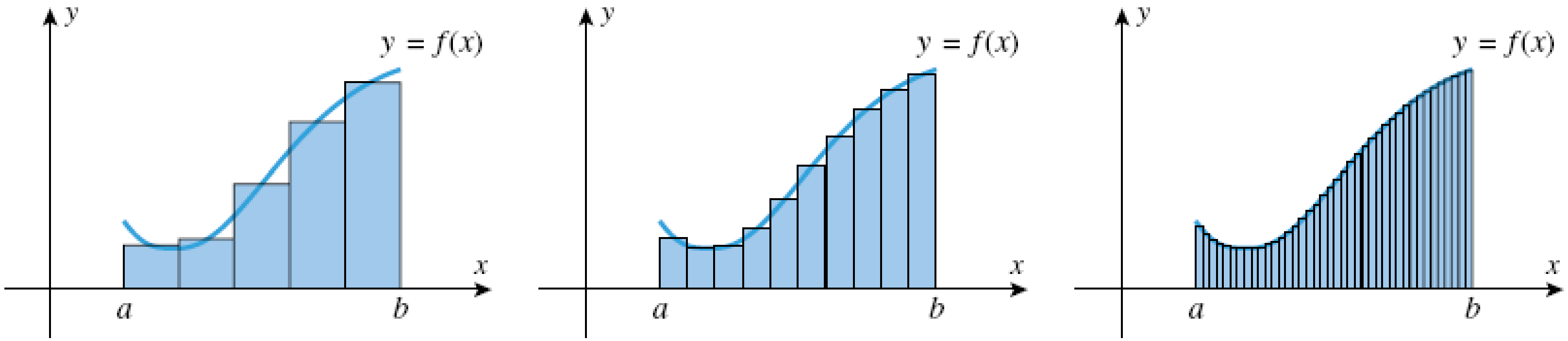
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,dt$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องบนช่วง $[a,b)$ แต่ฟังก์ชัน
ไม่นิยามบนค่า $x=b$ เราจะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{l\to b^-}\int_a^l f(x)dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$$



ถ้า $n \to \infty$ แสดงว่า $\Delta x_k \to 0$

ทำให้ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \to$ พื้นที่ใต้กราฟ

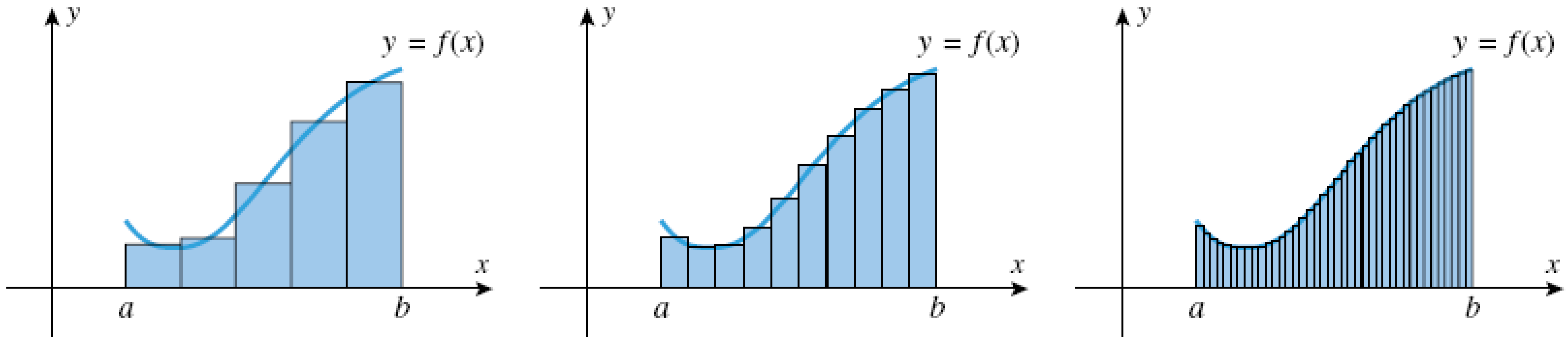
เราเรียกสัญลักษณ์ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ นี้ว่า ผลรวมรีมันน์

(Riemann sum)

ถ้า ***f*** เป็นฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องบนช่วง (***a***,***b***] แต่ฟังก์ชัน
<u>ไม่นิยาม</u>บนค่า ***x***=***a*** เราจะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{l \to a^+} \int_l^b f(x)dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{1-x}dx$$



ถ้า $n \to \infty$ แสดงว่า $\Delta x_k \to 0$

ทำให้ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \to$ พื้นที่ใต้กราฟ

เราเรียกสัญลักษณ์ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ นี้ว่า ผลรวมรีมันน์

(Riemann sum)

ถ้า *f* เป็นฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องบนช่วง [*a*,*c*) และ (*c*,*b*]
แต่ฟังก์ชันไม่นิยามบนค่า *x*=*c* เราจะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_1^4 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}dx$$

ถ้า $a \le c \le b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ค่าของปริพันธ์ $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ เท่ากับเท่าใด

(1) 0

(2) 1

(3) 2

(4) 3

(5) 4

ค่าของ $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx$ เท่ากับเท่าใด

(1) 0

(2) $\frac{1}{2}$

(3) 1

(4) 2

(5) 4

ค่าของ $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|1-x|}}dx$ เท่ากับเท่าใด

(1) 0

(2) $\frac{1}{2}$

(3) 1

(4) 2

(5) 4

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-2)^{2/3}}\,dx =$$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{|1-3x|}}\,dx =$$

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{|2x-1|}}\,dx =$$