1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$f(x)=\frac{\sin 2x}{\sec(3x+1)}$$

$$f(x)=\frac{\sec 2x}{\sin(3x+1)}$$

$$f(x)=\frac{\sin\left(3x+1\right)}{\sec(2x)}$$

$$f(x)=\frac{\sec\left(3x+1\right)}{\sin 2x}$$

2. จงหาค่า $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ

$$y = 2\cos x + 2x\sin x - x^2\cos x$$

$$y = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$$

$$y = 2x\cos x + x^2\sin x - 2\sin x$$

$$y = 2x\sin x + 2\cos x - x^2\cos x$$

ปริพันธ์

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + c$$

ปริพันธ์

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + c$$

เมื่อ c เป็น<u>ค่าคงตัว</u>ใดๆ

ปริพันธ์

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

$$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$\int \left[k_1 f(x) \pm k_2 g(x)\right]dx = k_1 \int f(x)dx \pm k_2 \int g(x)dx$$

เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

การหาปริพันธ์โดยวิธีแทนที่

Integration by Substitution

การหาปริพันธ์โดย**วิธีแทนที่**เป็นเสมือน<u>**บทกลับ**</u>ของการหาอนุพันธ์โดยใช้**กฎลูกโซ่**

พิจารณา $\int f(g(x))g'(x)dx$

ถ้าให้ $u = g(x)$ พบว่า $\frac{du}{dx} = \frac{dg}{dx}(x) = g'(x)$

ดังนั้น differential ของ u คือ

$$du = g'(x)dx$$

แสดงว่า

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

$$= F(u) + c$$

แทนค่า u กลับ $= F(g(x)) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$\int \cos(4x)dx =$$

$$\int \cos(4x+5)dx =$$

$$\int \sqrt{1-3x}dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-3x}}dx =$$

$$\int x\cos\left(x^2\right)dx =$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x^3}}dx =$$

$$\int \frac{t\sqrt{t+1}+\sqrt{t+1}+\sqrt[4]{t+1}}{(t+1)^2}dt$$

$$\int e^{2x}dx =$$

$$\int a^{x}dx =$$

$$\int xe^{x^2}dx =$$

$$\int x(e^{x^2} - \sin x^2)dx =$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx =$$

$$\int \frac{\ln x + 1}{x}dx =$$

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx =$$

$$\int \frac{2x+e^{x}}{(x^2+e^{x})^{11}}dx =$$

อนุพันธ์ของผลคูณ

$$\frac{d(u\bullet v)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\int \frac{d(u\bullet v)}{dx}dx = \int\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx$$

การหาปริพันธ์ทีละส่วน

Integration by Parts

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

การหาปริพันธ์ทีละส่วนเป็นเสมือน**<u>บทกลับ</u>**
ของการหา**อนุพันธ์ของผลคูณ**

$$\int xe^x\,dx$$

$$\int xe^{-x}\,dx$$

$$\int xe^{3x}\,dx$$

$$\int x^2e^x\,dx$$

$$\int x^2e^{-x}\,dx$$

$$\int x\cos x\,dx$$

$$\int x\sin 2x\,dx$$

$$\int x\cos 3x\,dx$$

$$\int x^2\cos x\,dx$$

$$\int x^2\sin x\,dx$$

$$\int e^x\cos x\,dx$$

$$\int \ln x\,dx$$

$$\int x\ln x\,dx$$

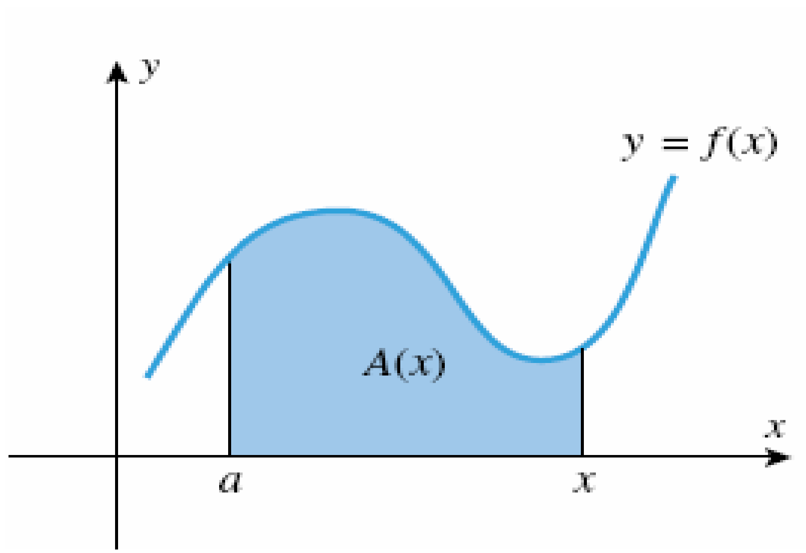
$$\int (\ln x)^2\,dx$$

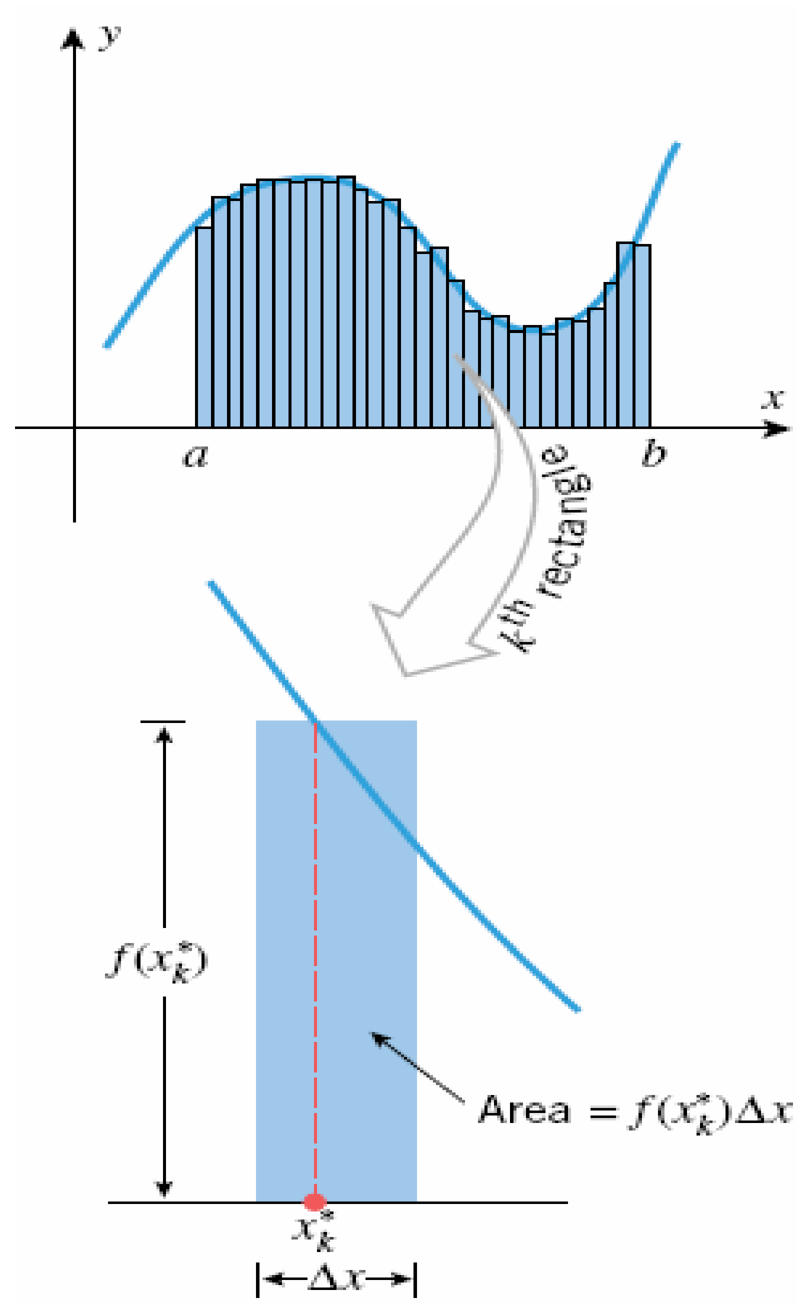
$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$$

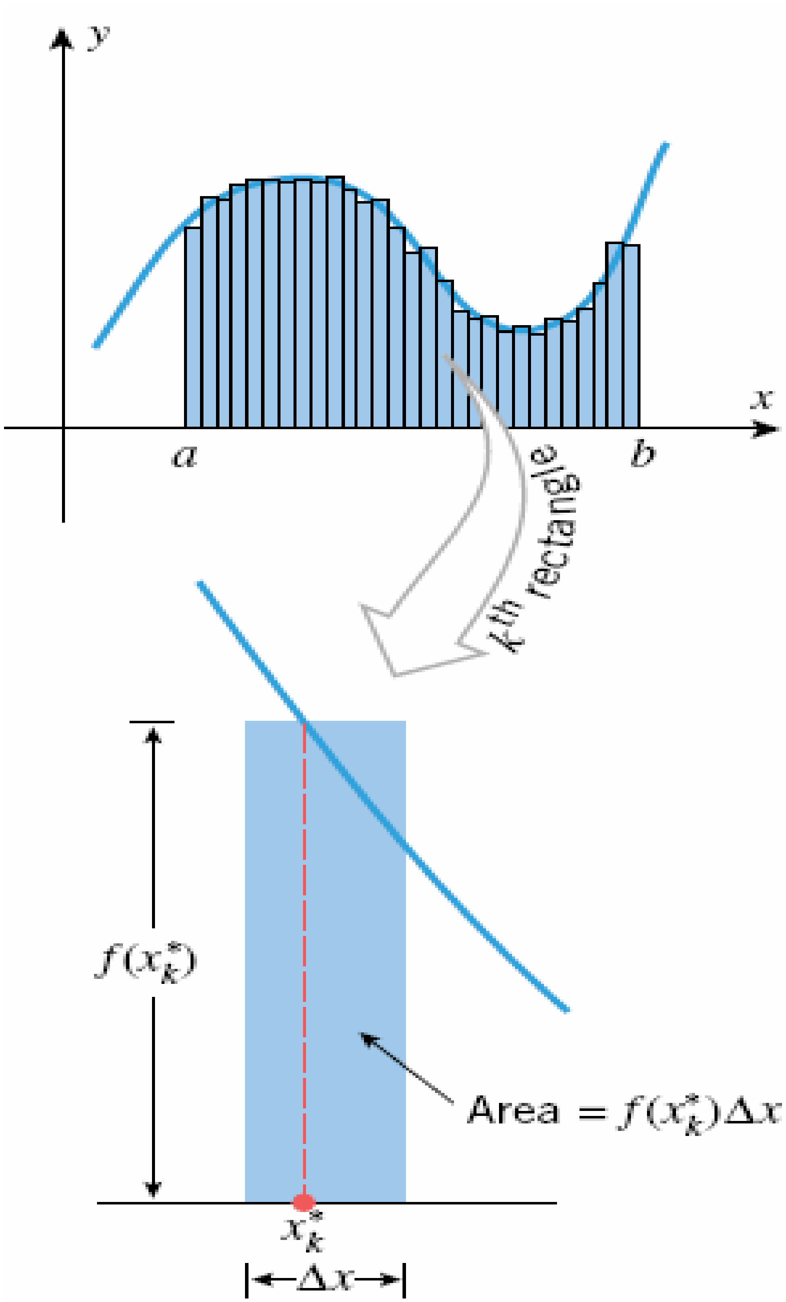
ผลรวมรีมานน์และการหาปริพันธ์จำกัดเขต

Reimann Sum and Definite Integration

ผลรวมรีมานน์และการหาปริพันธ์จำกัดเขตเป็นแนวความคิดในการนำการหาปริพันธ์ไปใช้หาพื้นที่ของรูปทรงใดๆ


y
y = f(x)
A(x)
x
a
x


y
x
a
b
k th rectangle
f(x*k)
Area = f(x*k)Δx
x*k
Δx



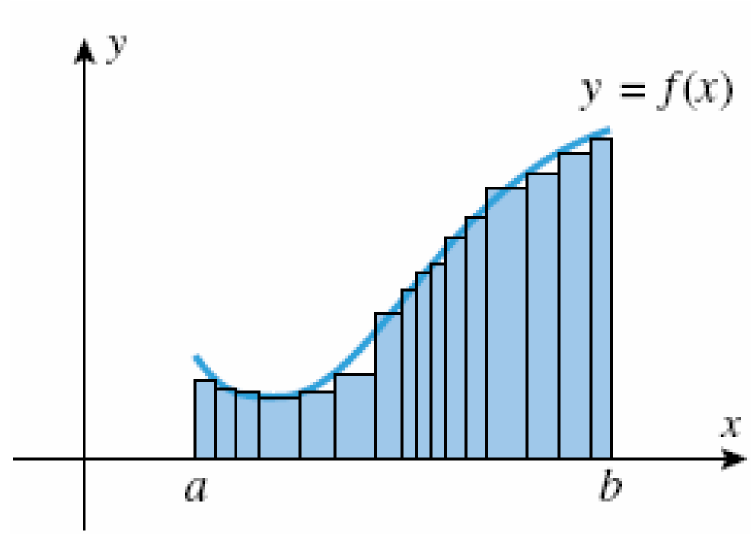


Figure 5.5.1

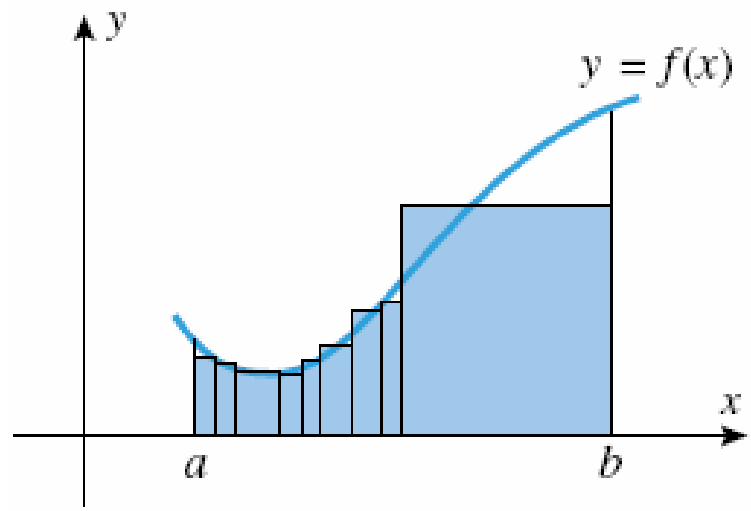
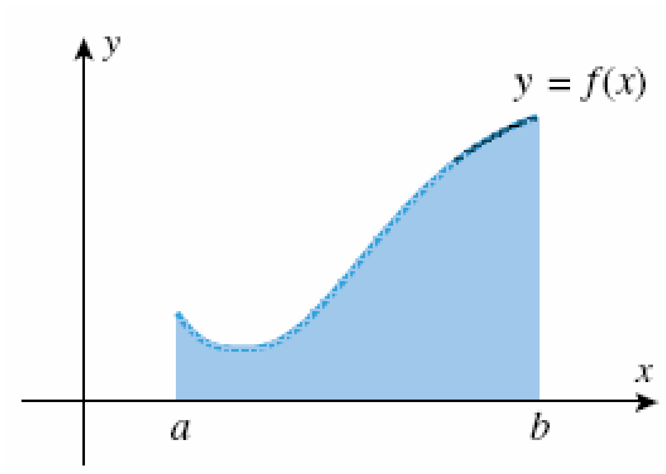
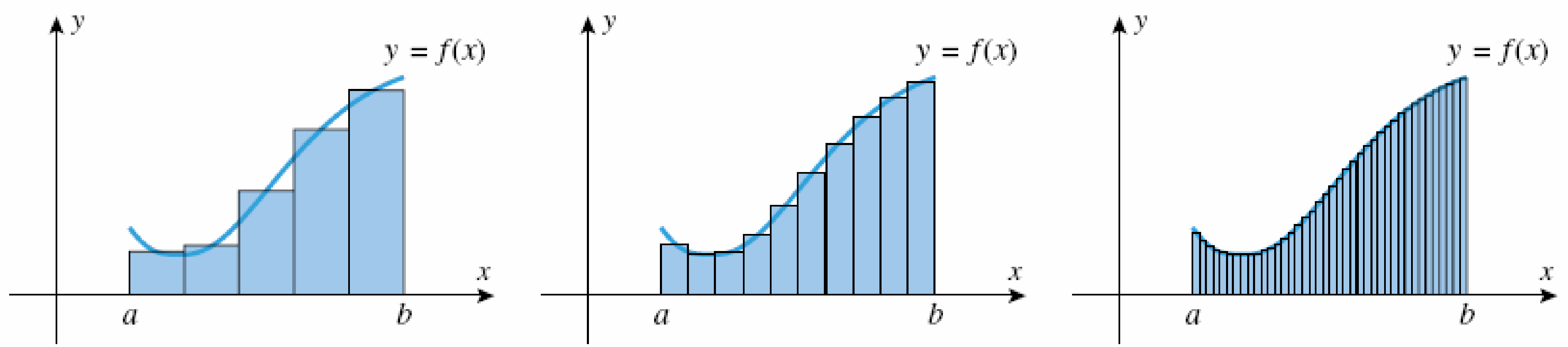
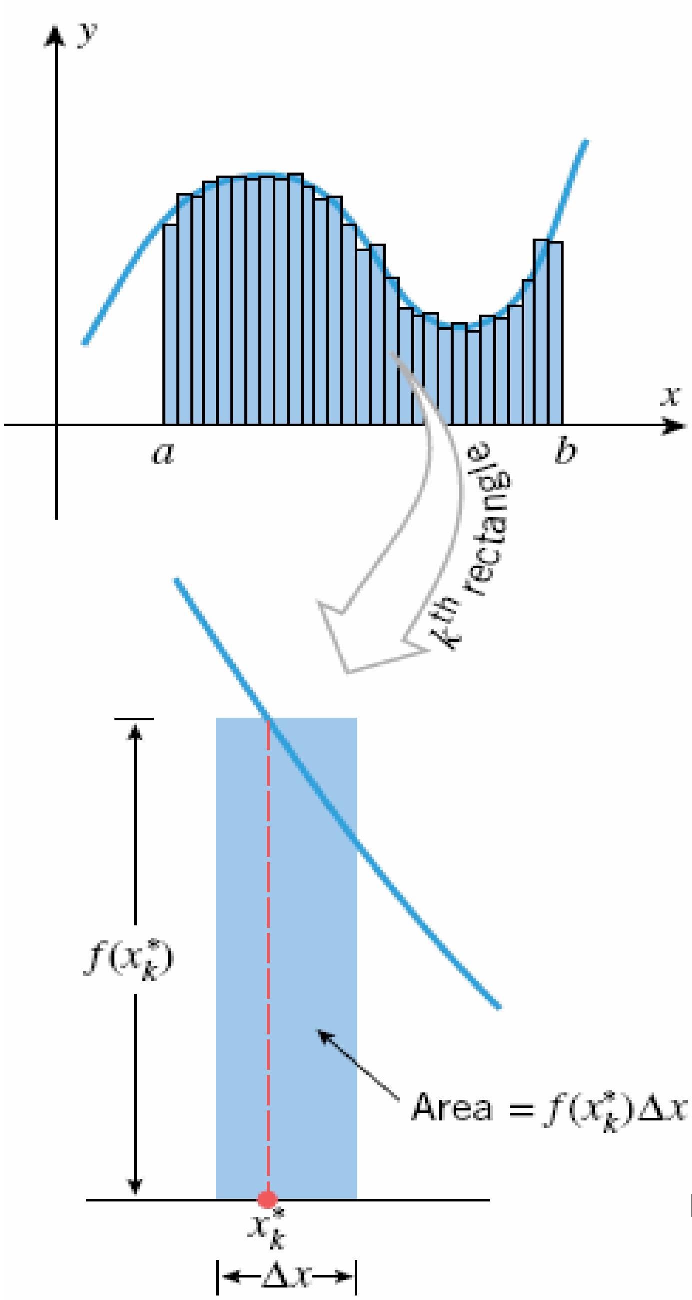


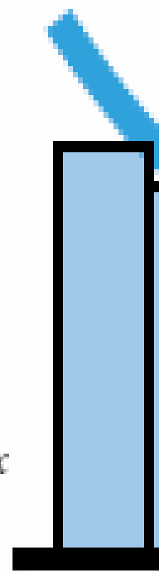
Figure 5.5.2





As n increases, the area of the rectangles approaches the exact area under the curve.





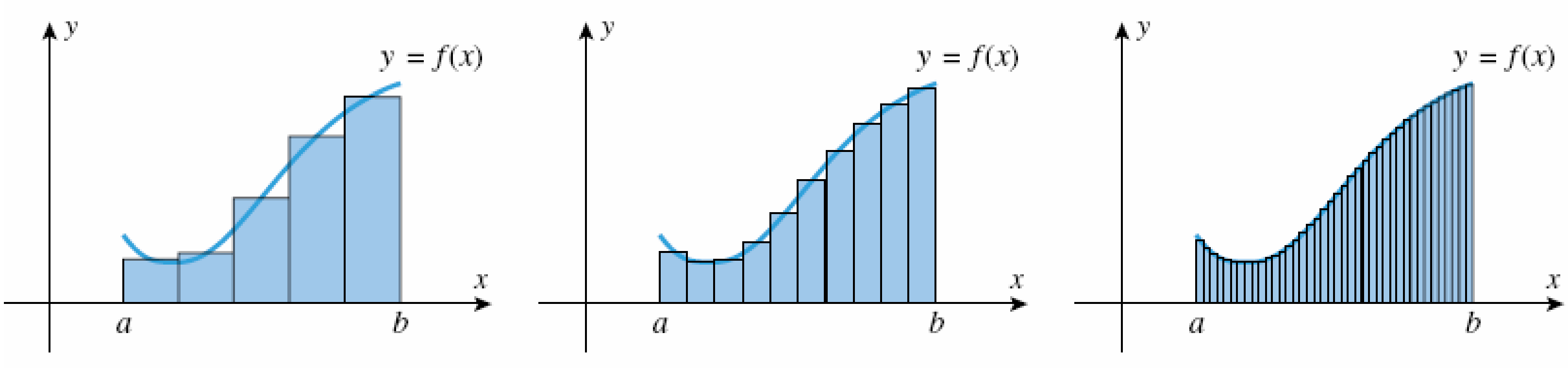
x_k^*

พื้นที่สี่เหลี่ยม = พื้นที่ฐาน x สูง

$$= f(x_k^*)\Delta x_k$$

พื้นที่ใต้กราฟ $\approx$ ผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยม

$$\approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$



ถ้า $n \to \infty$ แสดงว่า $\Delta x_k \to 0$

ทำให้ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k \to$ พื้นที่ใต้กราฟ

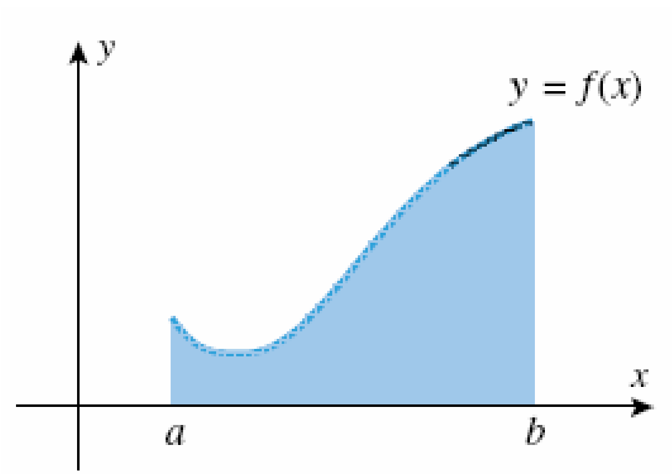
เราเรียกสัญลักษณ์ $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$ นี้ว่า ผลรวมรีมันน์

(Riemann sum)

เมื่อ $\Delta x_k \to 0$ เราใช้สัญลักษณ์ dx แทน Δx_k

และเราใช้สัญลักษณ์

$$\int_a^b f(x)dx \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$



นั่นคือเราใช้สัญลักษณ์

$\int_a^b f(x)dx$ แทนพื้นที่ใต้กราฟ $f(x)$

เมื่อ $a \le x \le b$

ภาษาอังกฤษวันละคำ !!!

integrate เป็นคำกริยา แปลว่ารวม, ทำให้รวม

ในทางคณิตศาสตร์ในบางครั้งหมายถึงการคำนวณด้วย

ณ ปัจจุบัน (พฤศจิกายน 2549) สามารถแปลเป็นคำยอดนิยม
ได้หมายถึงคำว่า “บูรณาการ”

ระวัง !!!

สัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$ มีความหมายหมายถึง $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$

ในทำนองเดียวกัน $\int_a^b f(y)dy = \int_{y=a}^{y=b} f(y)dy$

$$\int_a^b f(u)du = \int_{u=a}^{u=b} f(u)du \qquad \cdots$$

หลายๆ คนไม่ได้ระวังเรื่องนี้ และใช้ผิด

ในการ*<u>หาค่าปริพันธ์โดยการแทนที่</u>*

คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของการหาปริพันธ์จำกัดเขต

$$\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

เมื่อ k เป็น<u>ค่าคงตัว</u>ใดๆ

$$\int_a^b \left[k_1 f(x) \pm k_2 g(x) \right] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx \pm k_2 \int_a^b g(x) dx$$

เมื่อ k_1, k_2 เป็น<u>ค่าคงตัว</u>ใดๆ

ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกๆ ค่า $a \leq x \leq b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

ถ้า $f(x) \geq g(x)$ สำหรับทุกๆ ค่า $a \leq x \leq b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

และ

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ถ้า $a \le c \le b$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ทฤษฎีบทมูลฐานของแคลคูลัสที่หนึ่ง

The First Fundamental Theorem of Calculus

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และ F เป็นฟังก์ชันซึ่งเป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_2^4 (x-1)dx$$

$$\int_1^3 \frac{1}{x} dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x dx$$

$$\int_0^{1/2} \sin \pi x dx$$

จงหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $y=x-1$ และอยู่เหนือแกน x เมื่อ x อยู่ในช่วง $[2, 4]$

จงหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $y = \frac{1}{x}$ และอยู่เหนือแกน x เมื่อ x อยู่ในช่วง $[1, 3]$

จงหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $y = \sin x$ **และอยู่เหนือแกน** x

เมื่อ $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$

จงหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชัน $y = \sin \pi x$

และอยู่เหนือแกน x **เมื่อ** $x \in [0, 0.5]$

จงหาพื้นที่ใต้กราฟระหว่างฟังก์ชัน $y=x-1$ และแกน x เมื่อ x อยู่ในช่วง $[0, 4]$

การหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยการแทนที่

Substitution in Definite Integration

การหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยการแทนที่ เป็นการขยายแนวคิดของการหาปริพันธ์จำกัดเขต ทำให้สามารถหาพื้นที่ใต้กราฟของฟังก์ชันที่ซับซ้อนมากขึ้นได้

ระวัง !!!

สัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)dx$ มีความหมายหมายถึง $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$

ในทำนองเดียวกัน $\int_a^b f(y)dy = \int_{y=a}^{y=b} f(y)dy$

$$\int_a^b f(u)du = \int_{u=a}^{u=b} f(u)du \qquad \cdots$$

หลายๆ คนไม่ได้ระวังเรื่องนี้ และใช้ผิด

ในการ*<u>หาค่าปริพันธ์โดยการแทนที่</u>*

การหาปริพันธ์โดยการแทนที่

Integration by Substitution

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

เมื่อ $u = g(x)$

การหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยการแทนที่

Substitution in Definite Integration

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

การหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยการแทนที่
Substitution in Definite Integration

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)du$$

เมื่อ $u = g(x)$

$$\int_{a}^{b} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

$$\int_1^2 \frac{1}{1+3x}\,dx =$$

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$\int_{-1}^1 \sin(\pi\theta)\,d\theta =$$

$$\int_{-1}^{2}\sqrt{2+|x|}\,dx=$$

$$\int_{-1}^{2}\frac{1}{\sqrt{|1-3x|}}\,dx=$$

$$\int_{-2}^{2}\frac{1}{\sqrt{|2x-1|}}\,dx=$$

การหาปริพันธ์จำกัดเขตโดย
การหาค่าปริพันธ์ทีละส่วน

Integration by Parts in Definite Integration

$$\int_{x=a}^{x=b} u\,dv = uv\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_{x=a}^{x=b} v\,du$$

$$\int_1^5 \ln(x)dx =$$

$$\int_0^2 xe^{2x}dx =$$

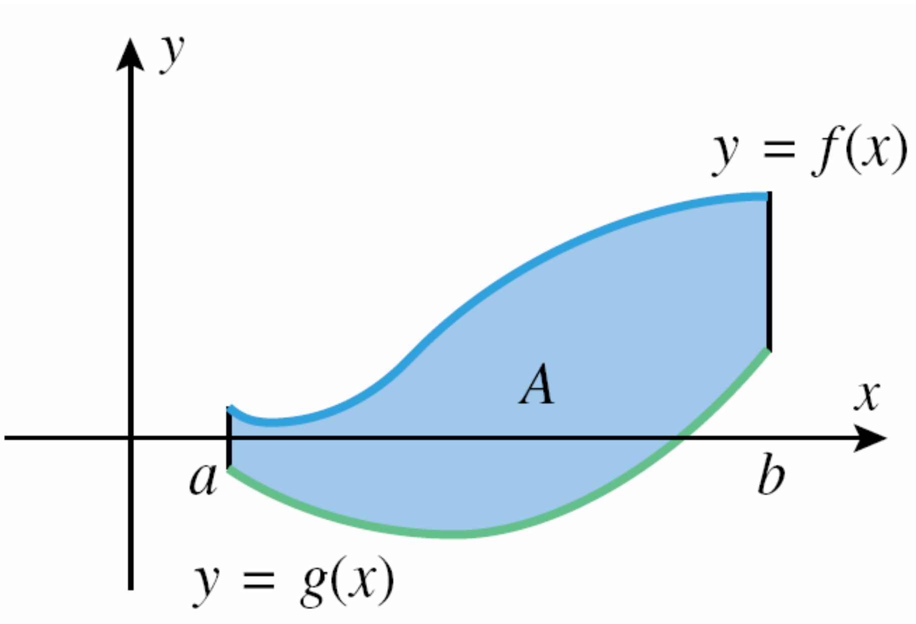
$$\int_{-2}^2 \ln(x+3)dx =$$

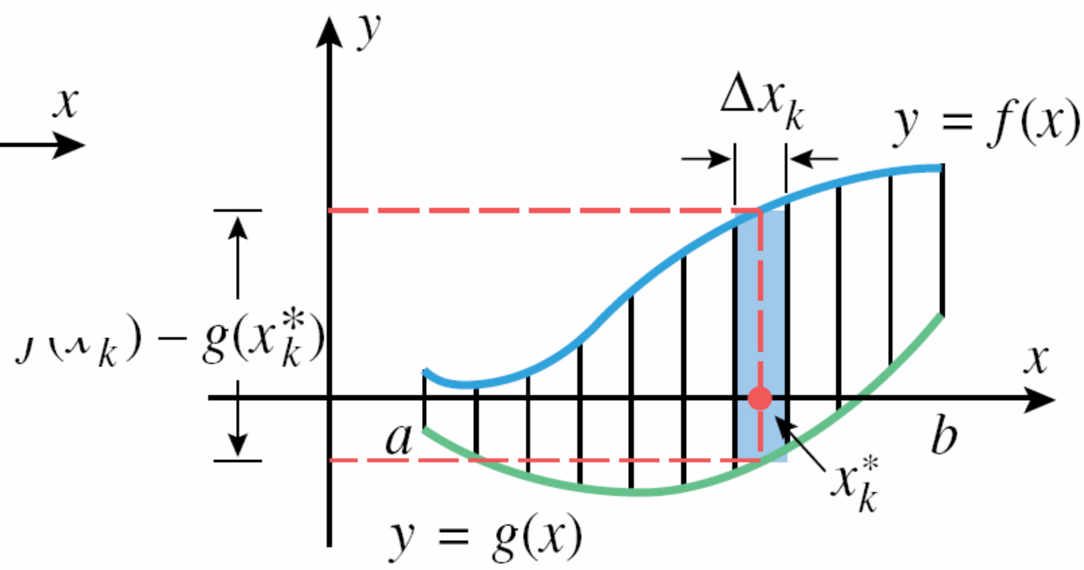
$$\int_{3}^{4} \frac{4}{x^2 - 4} =$$

การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

Areas between Curves

การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง เป็นการประยุกต์ของการหาปริพันธ์จำกัดเขต

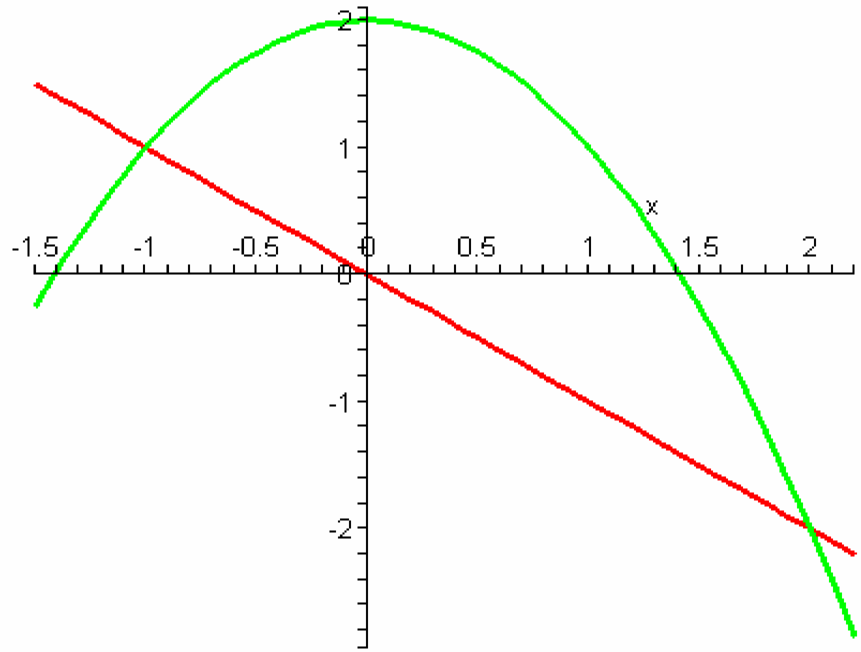




(b)

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^*) - g(x_k^*)]\Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

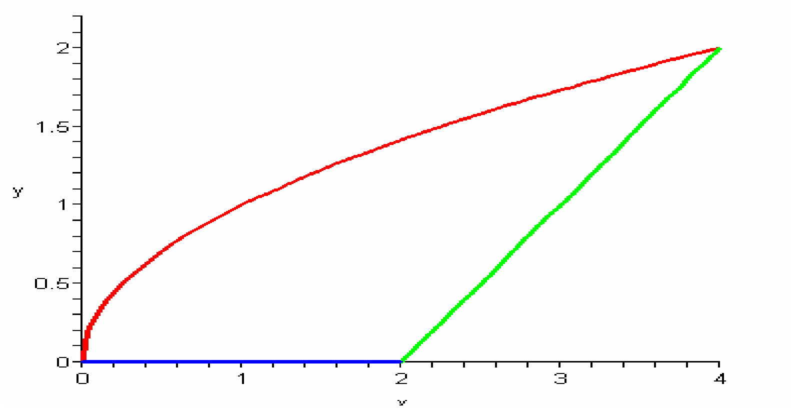
จงหาพื้นที่ของส่วนที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = 2 - x^2$ และเส้นตรง $y = -x$



2
1
x
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
0
-1
-2

จงหาพื้นที่ซึ่งล้อมด้านบนด้วยเส้นโค้ง $y=\sqrt{x}$

ล้อมด้านล่างด้วยแกน x และเส้นตรง $y=x-2$



2
1.5
y
1
0.5
0
0
1
2
3
4
x

จงหาพื้นที่ของบริเวณในจตุภาค (quadrant)ที่ 1 ซึ่งถูกล้อมด้านซ้ายด้วยแกน y ล้อมรอบทางขวาด้วยเส้นโค้ง $y = \sin x$ และ $y = \cos x$

จงหาพื้นที่ของบริเวณในจตุภาค (quadrant)ที่ 1 ซึ่งถูกล้อมด้วยเส้นตรง $y=x$, $x=2$, เส้นโค้ง $y = 1/x^2$ และแกน x

จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งถูกล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง

$x = y^2$ **และ** $y = x - 2$