อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่น่าสนใจ

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right] = nx^{n-1}$$ เมื่อ n เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] = cf'(x)$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

อนุพันธ์ของผลหาร

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$$

กฎลูกโซ่

$$\frac{df(u)}{dx} = \frac{df(u)}{du} \bullet \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d(1-x)^8}{dx} =$$

$$\frac{d\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{dx} =$$

$$\frac{d\sin^8 x}{dx} =$$

$$\frac{d\tan^4(3x)}{dx} =$$

$$\frac{d\sqrt{1-\cos^2 x}}{dx} =$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{dx} =$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันยกกำลัง

Derivatives of logarithm and exponential functions

นอกจากอนุพันธ์ของฟังก์ชันพหุนาม และ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ แล้ว อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันยกกำลัง จะแสดงบทบาทมากในเรื่องการหาอนุพันธ์, ปฏิยานุพันธ์ และ สมการเชิงอนุพันธ์

เราพบว่า $\dfrac{d}{dx}\left[\log_a x\right] = \lim_{h\to 0}\dfrac{\log_a\left(x+h\right)-\log_a x}{h}$

$$= \frac{1}{x}\log_a\left(\lim_{h\to 0}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{x}{h}\right)}\right]^{\left(\frac{x}{h}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\log_a e$$

โดยที่

$$\lim_{h\to 0}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{x}{h}\right)}\right]^{\left(\frac{x}{h}\right)} = \lim_{n\to 0}\left[1+\frac{1}{n}\right]^{n} \approx 2.718281828459045$$

และเราใช้สัญลักษณ์

$$e \approx 2.718281828459045$$

$$\frac{d}{dx}\left[\log_a x\right] = \frac{1}{x}\log_a e$$

และมักใช้สัญลักษณ์ $\ln x = \log_e x$

เราเรียก $\ln x$ แอล-เอ็น เอ็กซ์ หรือ
ล็อกซ์ เอ็กซ์

<u>หมายเหตุ</u> ในหนังสือบางเล่มอาจจะใช้สัญลักษณ์

$\log x$ แทน $\ln x$

แต่ในวิชา Mathematics Business II นี้จะให้ $\log x = \log_{10} x$

$$\ln x = \log_e x$$

$$\frac{d}{dx}\left[\ln x\right] = \frac{1}{x}\ln e$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\log_a x\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln x}{\ln a}\right]$$

คุณสมบัติของฟังก์ชัน $\ln x$

1. $\ln xy = \ln x + \ln y$

2. $\ln \dfrac{x}{y} =$

3. $\ln x^n =$

4. $\ln\left(\dfrac{1}{x^n}\right) =$

5. $\ln e =$

6. $\ln 1 =$

7. $\ln 0 =$

8. $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

9. $$\ln b = \frac{1}{\log_b e}$$

10. $$e^{\ln b} =$$

$$e^{-\ln 2} =$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

ถ้า $y = e^{x}$ $$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{x}}{dx} = e^{x}$$

ถ้า $y = a^x$

$$\frac{dy}{dx} =$$

สรุป

y	$\dfrac{dy}{dx}$
$\ln x$	
$\log_a x$	
e^x	
a^x	

แบบฝึกหัด

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$y = e^{-5x}$$

$$y = e^{4\sqrt{x}+x^2}$$

$$y = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

$$y = xe^x - e^x$$

$$y = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$$

$$y = e^{\sin x}\ln\left(x^2 + x\right)$$

$$y = e^{\sin x}\left(\ln x^2 + x\right)$$

$$y = 2^{\sqrt{x}}$$

$$y = \log_2 x^{\pi}$$

$$y = \left(\log_2 x\right)^{\pi}$$

$$y = \ln\left(\frac{2^x e^2}{2\sqrt{2x+2}}\right)$$

การหาปริพันธ์ (Integration)

ถ้าฟังก์ชัน $F(x)$ มีอนุพันธ์คือ $f(x)$ หรือก็คือ

$$\frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

เราเรียกฟังก์ชัน $F(x)$ ว่าเป็น<u>**ปฏิยานุพันธ์**</u> (antiderivative)ของ $f(x)$

เช่น x^2 เป็น**ปฏิยานุพันธ์** ของ $2x$

เช่น $\sin x$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์** ของ $\cos x$

เช่น $(\sin x)+10$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์** ของ $\cos x$

ปฏิยานุพันธ์ ของ $f(x)$ อาจจะมีได้หลายตัวเช่น

$x^2, x^2+1, x^2-1, x^2+e, x^2-\frac{\pi}{2}, \ldots$ เป็น**ปฏิยานุพันธ์** ของ $2x$

หมายเหตุ อนุพันธ์ของค่าคงตัวใดๆ มีค่าเท่ากับ 0

เราเรียกเซตของ**ปฏิยานุพันธ์**ดังกล่าวว่า
ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต (indefinite integral) และใช้สัญลักษณ์ว่า

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์	ปริพันธ์
$\frac{d0}{dx} =$	
$\frac{d1}{dx} =$	$\int 0dx =$
$\frac{d\pi}{dx} =$	
$\frac{de}{dx} =$	
$\frac{dc}{dx} =$	

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์	ปริพันธ์
$\frac{dx}{dx} =$	
$\frac{dx^2}{dx} =$	
$\frac{dx^5}{dx} =$	
$\frac{dx^{-8}}{dx} =$	
$\frac{dx^{\sqrt{2}}}{dx} =$	

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์	ปริพันธ์
$\dfrac{d(x+2)}{dx} =$	
$\dfrac{d(x^2-5)}{dx} =$	
$\dfrac{d(x^5+\frac{\pi}{2})}{dx} =$	
$\dfrac{d(x^{-8}+x^{\frac{1}{2}})}{dx} =$	

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์

$$\frac{dx^n}{dx} =$$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} =$$

$$\frac{d\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}{dx} =$$

ปริพันธ์

$$\int x^n dx =$$

ปริพันธ์

$$\int x^n dx =$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx =$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx =$$

อนุพันธ์	**ปริพันธ์**
$\dfrac{de^x}{dx} =$	$\int e^x dx =$
$\dfrac{d\sin x}{dx} =$	
$\dfrac{d\cos x}{dx} =$	
$\dfrac{d\tan x}{dx} =$	

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

อนุพันธ์

ปริพันธ์

$$\frac{d \ln x}{dx} =$$

$$\frac{d \sec x}{dx} =$$

$$\frac{d \csc x}{dx} =$$

$$\frac{d \cot x}{dx} =$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต

$$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

เมื่อ k เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$\int \left[k_1 f(x) \pm k_2 g(x)\right]dx = k_1 \int f(x)dx \pm k_2 \int g(x)dx$$

เมื่อ k_1, k_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

ปริพันธ์

$$\int \frac{x^2 + e^x}{2} dx$$

$$\int \cos y - 2\sec^2 y dy$$

$$\int \frac{\pi \sin z - ez^{-1}}{\sqrt{2}} dz$$

$$\int \sqrt{u^3} + \sqrt[3]{u^2} - \frac{1}{\sqrt{u}} du$$

ปริพันธ์

$$\int \left(4\sec^2\theta - 3\csc^2\theta\right)d\theta$$

$$\int \frac{t\sqrt{t}+\sqrt[4]{t}}{t^2}\,dt$$

$$\int \cos\omega(\tan\omega + \sec\omega)\,d\omega$$

$$\int \frac{\csc\phi}{\csc\phi - \sin\phi}\,d\phi$$

การหาปริพันธ์โดยวิธีแทนที่

Integration by Substitution

การหาปริพันธ์โดย**วิธีแทนที่**เป็นเสมือน**บทกลับ**ของการหาอนุพันธ์โดยใช้**กฎลูกโซ่**

พิจารณา $\int f(g(x))g'(x)dx$

ถ้าให้ $u = g(x)$ พบว่า $\frac{du}{dx} = \frac{dg}{dx}(x) = g'(x)$

ดังนั้น differential ของ u คือ

$$du = g'(x)dx$$

แสดงว่า

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

$$= F(u) + c$$

แทนค่า u กลับ $= F(g(x)) + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$\int \cos(4x)dx =$$

$$\int \cos(4x+5)dx =$$

$$\int \sqrt{1-3x}dx =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-3x}}dx =$$

$$\int x\cos\left(x^2\right)dx =$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx =$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx =$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx =$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x^3}}dx =$$

$$\int \frac{t\sqrt{t+1}+\sqrt{t+1}+\sqrt[4]{t+1}}{(t+1)^2}dt$$

$$\int e^{2x}dx =$$

$$\int a^{x}dx =$$

$$\int xe^{x^2}dx =$$

$$\int x(e^{x^2} - \sin x^2)dx =$$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx =$$

$$\int \frac{\ln x + 1}{x}dx =$$

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx =$$

$$\int \frac{2x+e^{x}}{(x^2+e^{x})^{11}}dx =$$