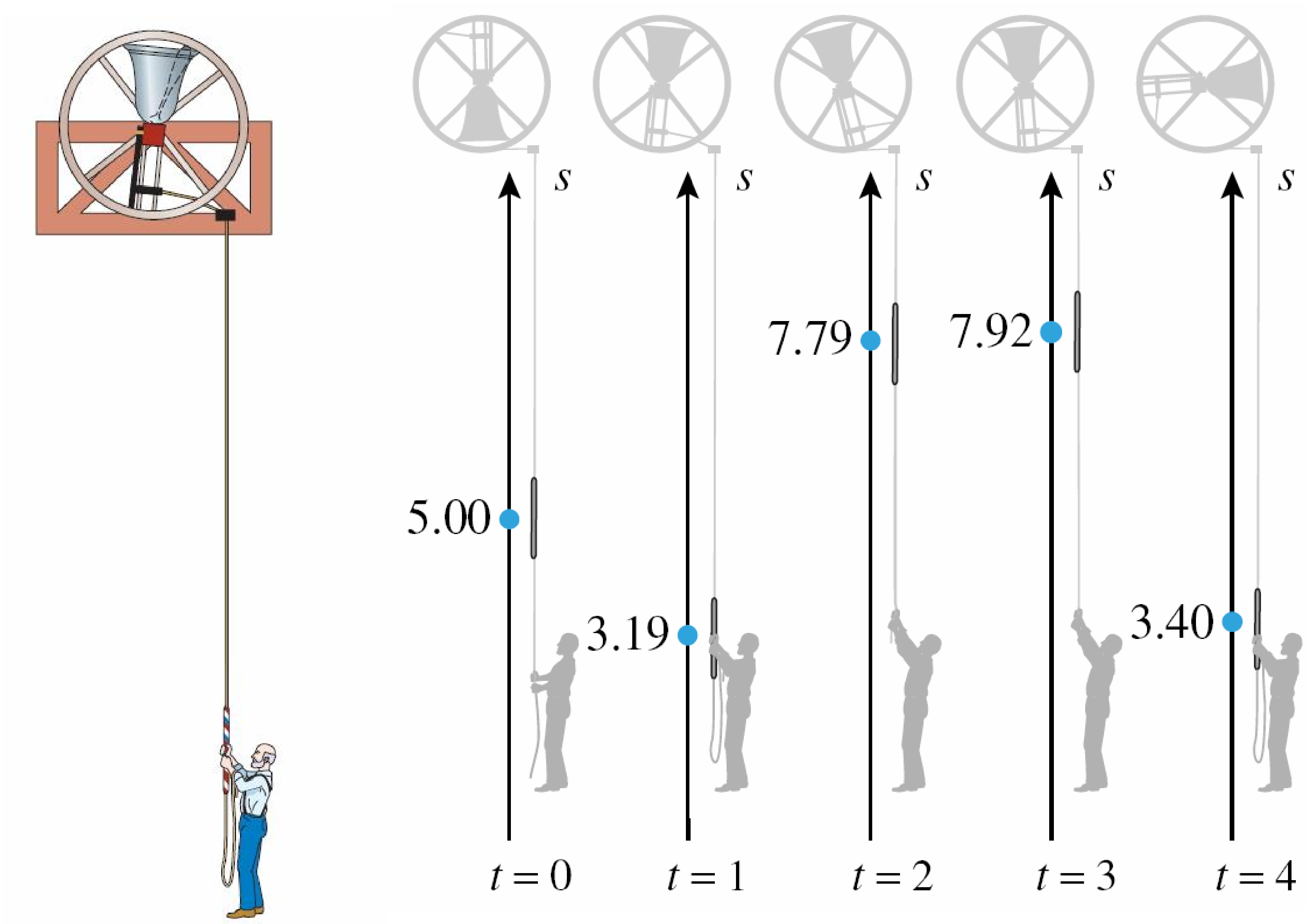
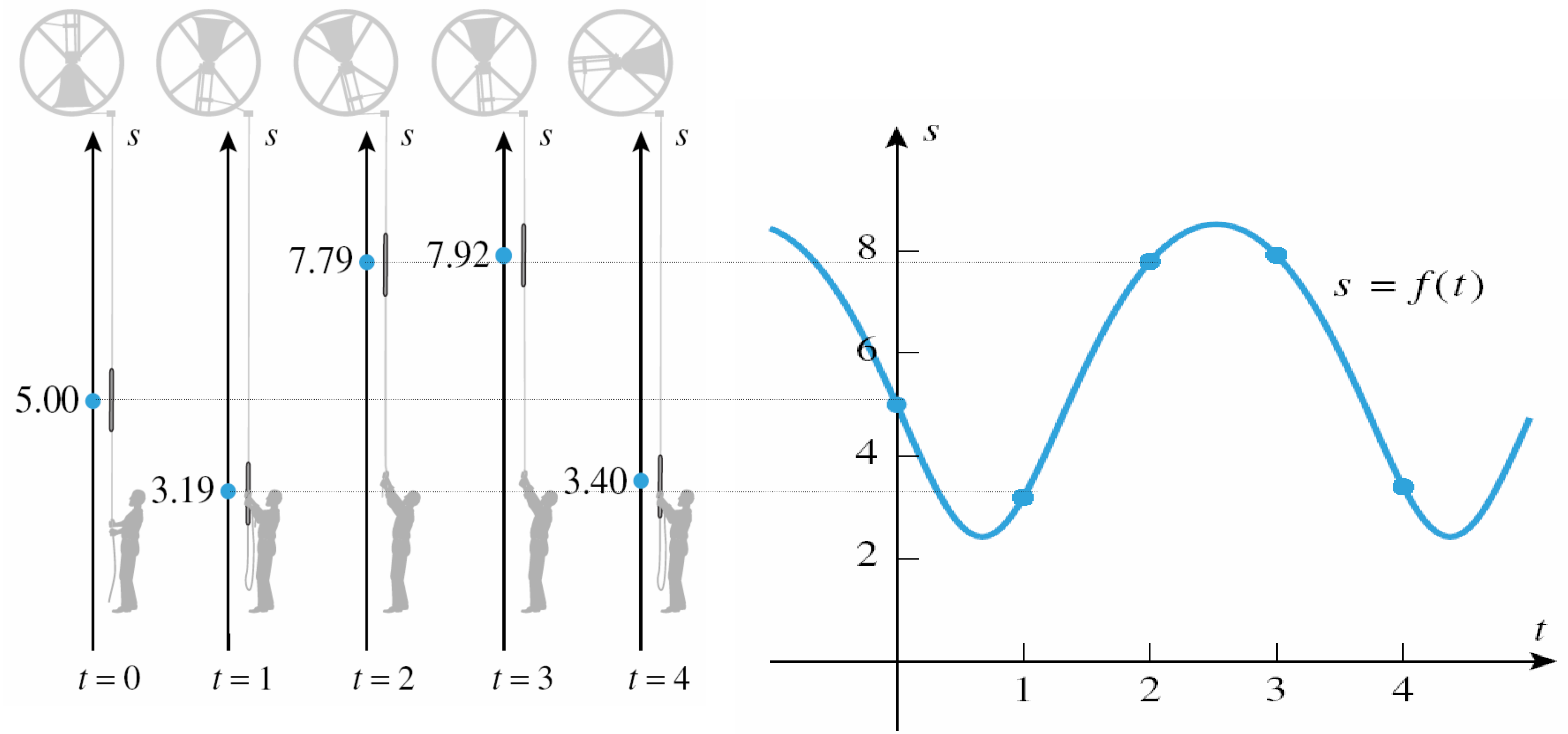
ความชันและอัตราการเปลี่ยนแปลง





ตำแหน่งของระฆัง ณ เวลาต่างๆ

t (seconds)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
$s = f(t)$ (ft)	5.00	2.66	3.19	5.78	7.79	8.52	7.92	6.02	3.40

ตำแหน่งของระฆัง ณ เวลาต่างๆ

t (seconds)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
$s = f(t)$ (ft)	5.00	2.66	3.19	5.78	7.79	8.52	7.92	6.02	3.40

$$\text{ความเร็ว} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}}$$

ความเร็วเฉลี่ยของระฆัง จากเวลา 0-2 วินาที

$$v_{\text{ave}} = \frac{7.79 - 5.00}{2 - 0} \approx 1.39 \text{ ft/s}$$

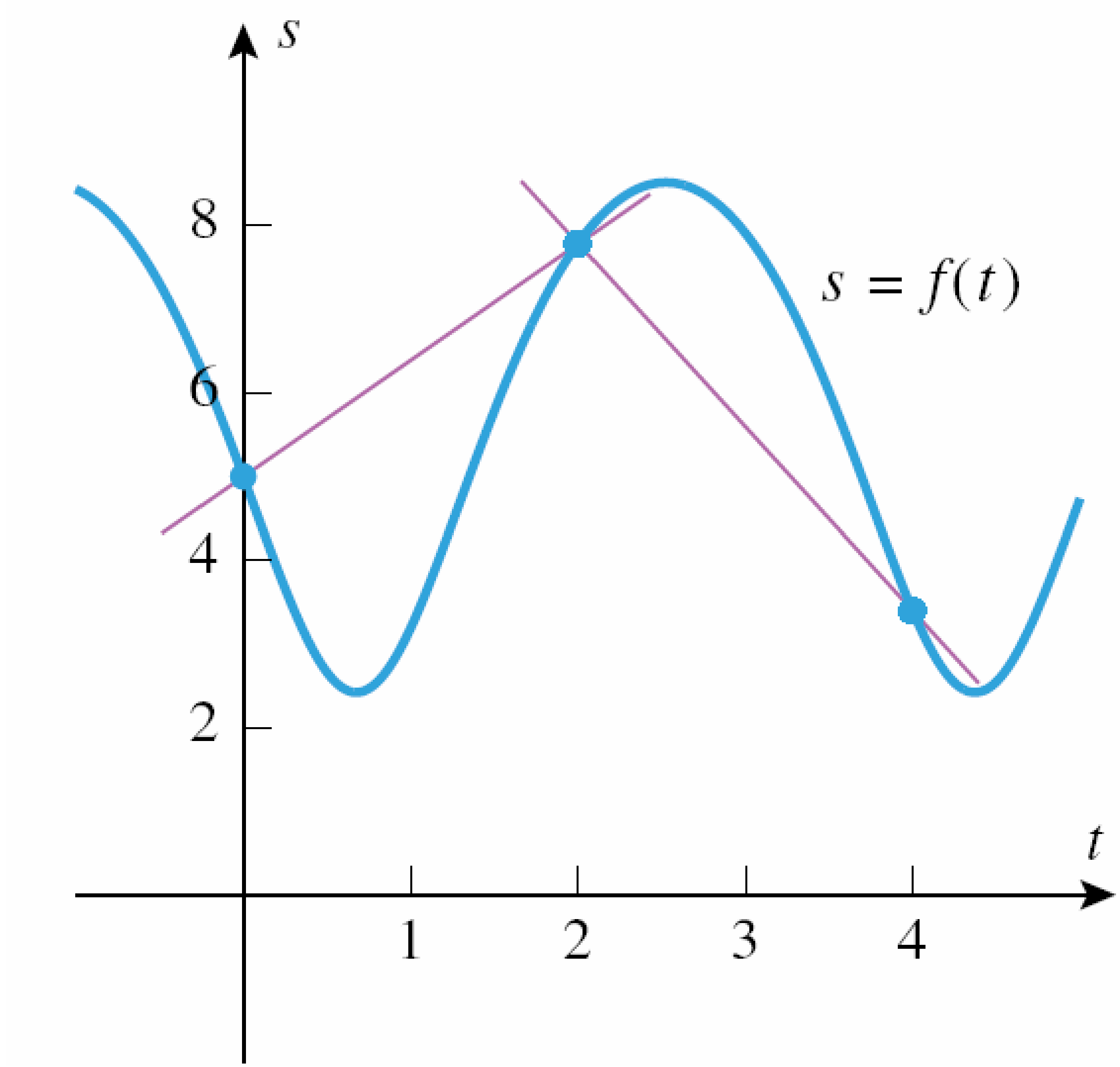
ตำแหน่งของระฆัง ณ เวลาต่างๆ

t (seconds)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
$s = f(t)$ (ft)	5.00	2.66	3.19	5.78	7.79	8.52	7.92	6.02	3.40

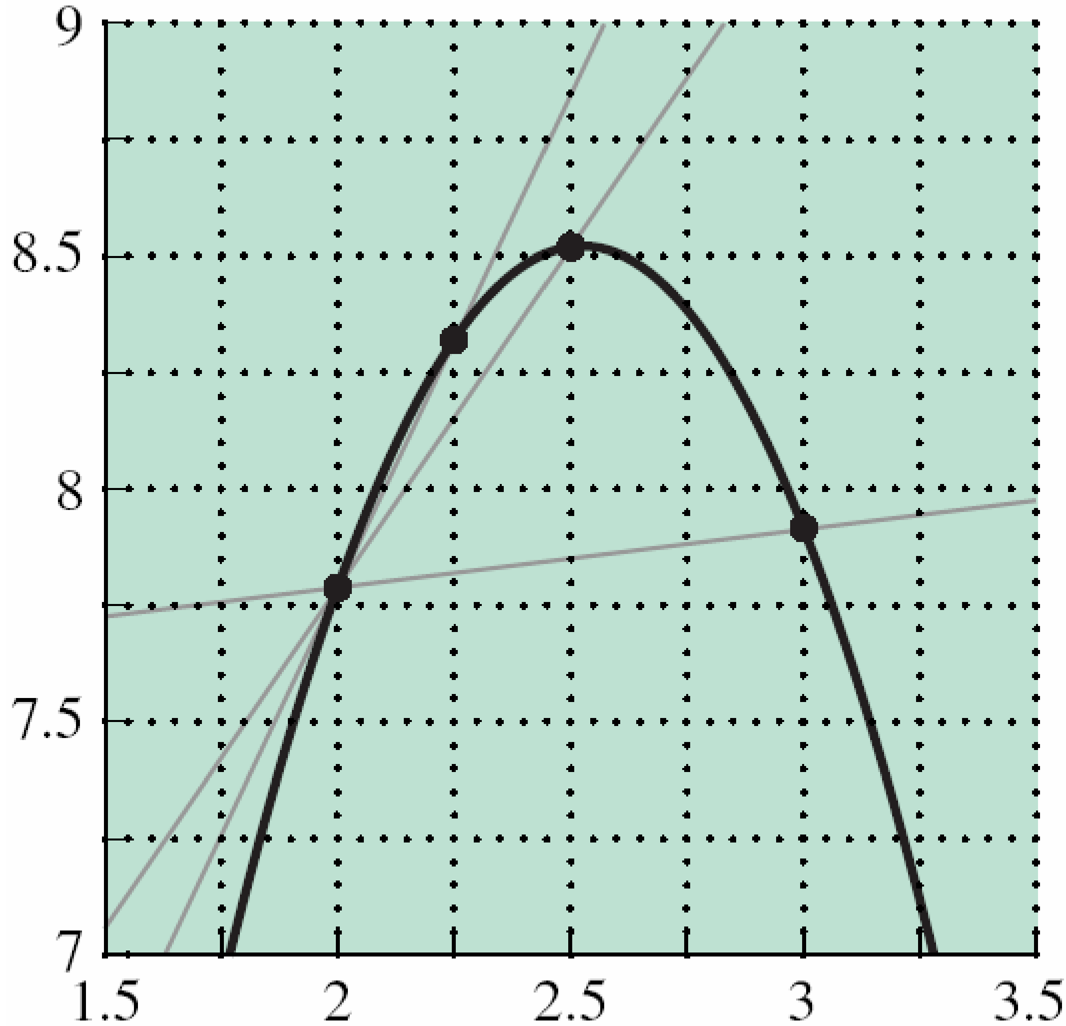
$$\text{ความเร็ว} = \frac{\text{ระยะทาง}}{\text{เวลา}}$$

ความเร็วเฉลี่ยของระฆัง จากเวลา 2-4 วินาที

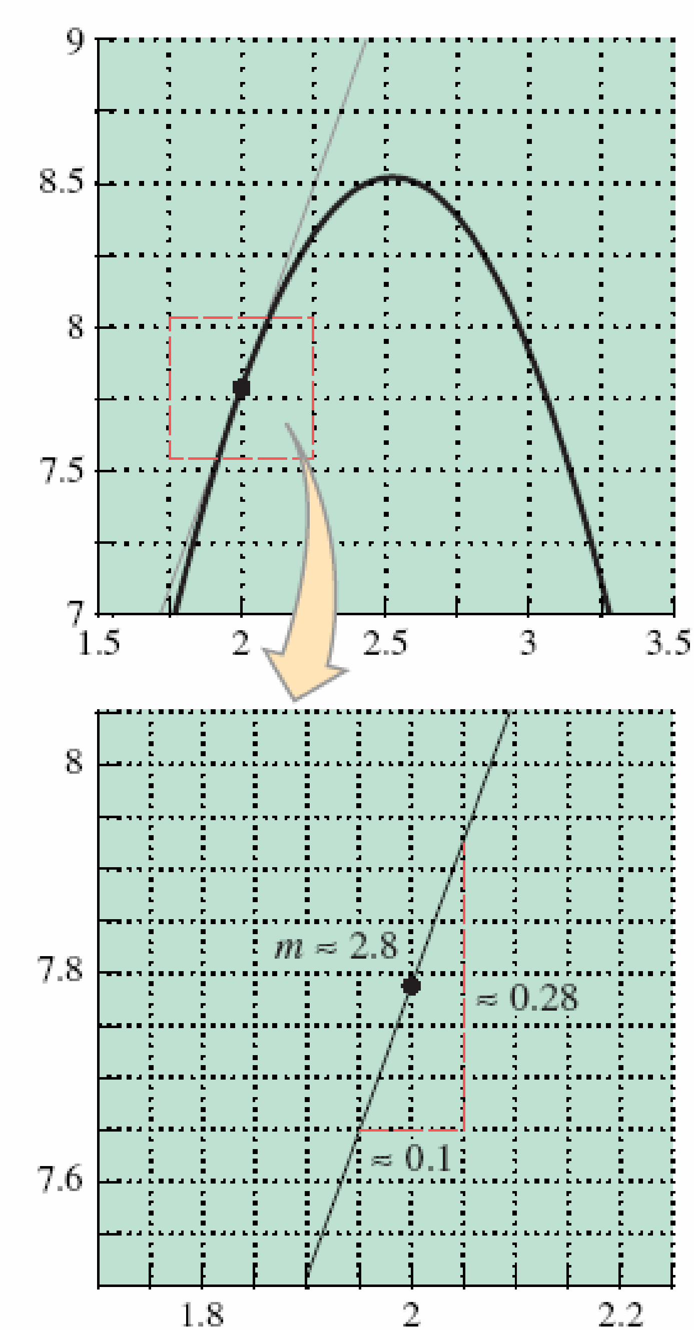
$$v_{\text{ave}} = \frac{3.40 - 7.79}{4 - 2} = \frac{-4.39}{2} = -2.195 \text{ ft/s}$$



ความเร็ว ณ เวลา <u>**2 วินาที**</u> คือ เท่าใด?



9
8.5
8
7.5
7
1.5
2
2.5
3
3.5



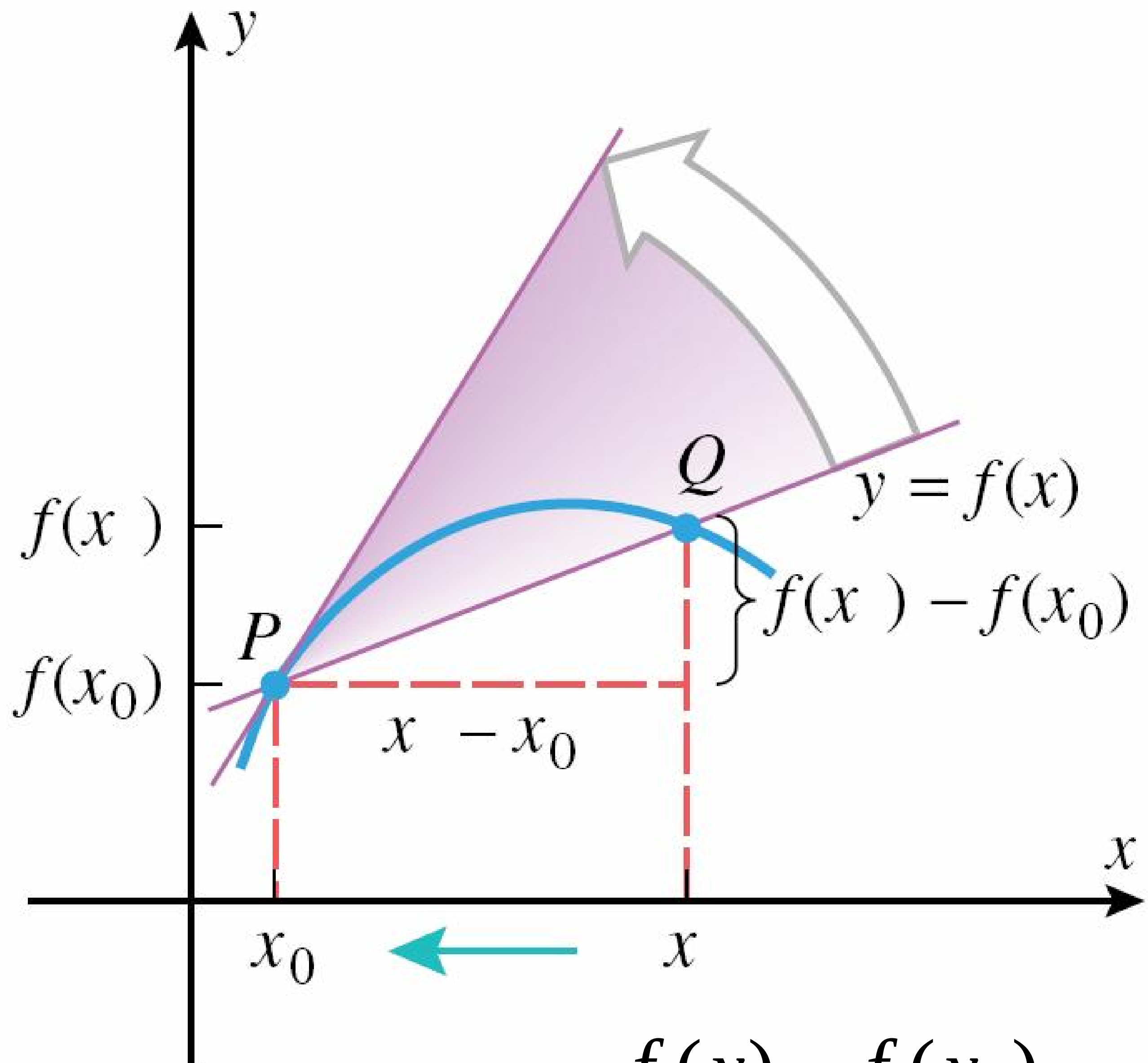
พบว่าเมื่อคิดความชันในช่วงเวลาที่แคบขึ้นเรื่อยๆ เราจะได้ค่าของความเร็วของระฆัง ใกล้เคียงกับความเร็วของระฆัง ณ เวลาที่ต้องการมากขึ้นด้วย

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ณ จุด $x=x_0$

เราเรียกค่า

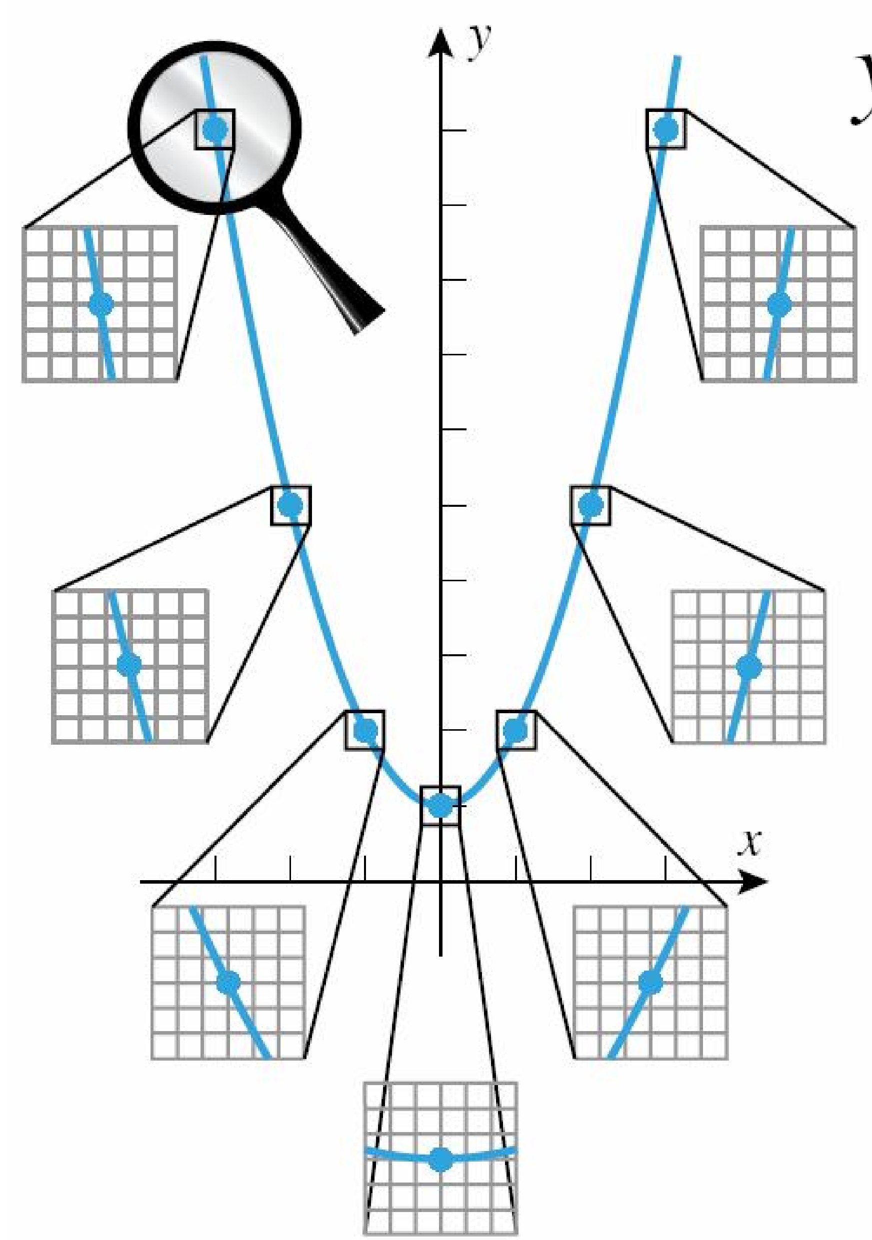
$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ **เทียบกับตัวแปร x** ที่ $x=x_0$



$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

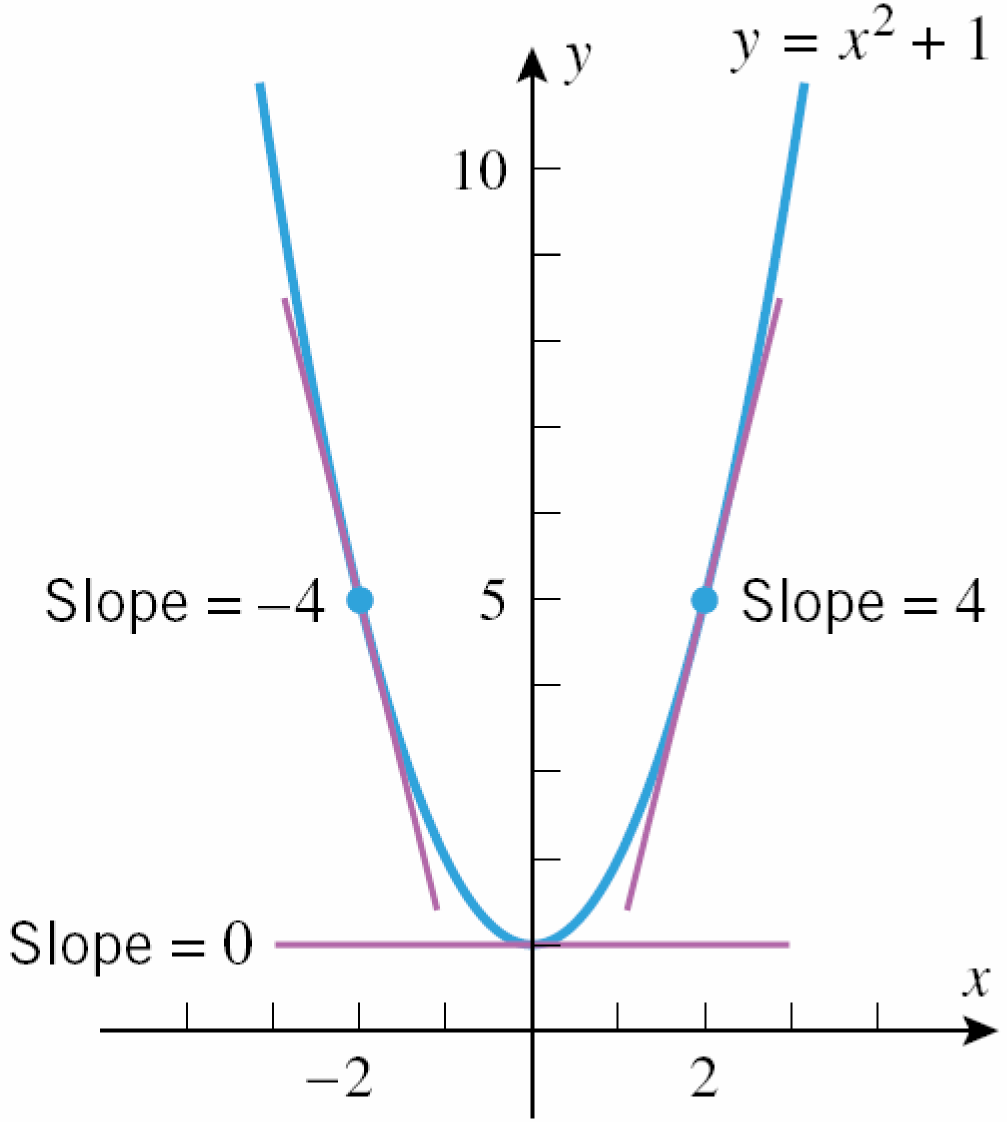
ความชันของฟังก์ชัน ณ จุดต่างๆ



$$y = x^2 + 1$$

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 1$

เมื่อ $x = -2 \qquad x = 0 \qquad x = 2$



$y = x^2 + 1$
y
10
5
Slope = –4
Slope = 4
Slope = 0
x
–2
2

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ

เราเรียกค่า

$$f'(x) = \lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$$

ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x)$ เ**<u>ทียบกับตัวแปร x</u>** เมื่อ x มีค่าใดๆ

$$f'(x) = \lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$$

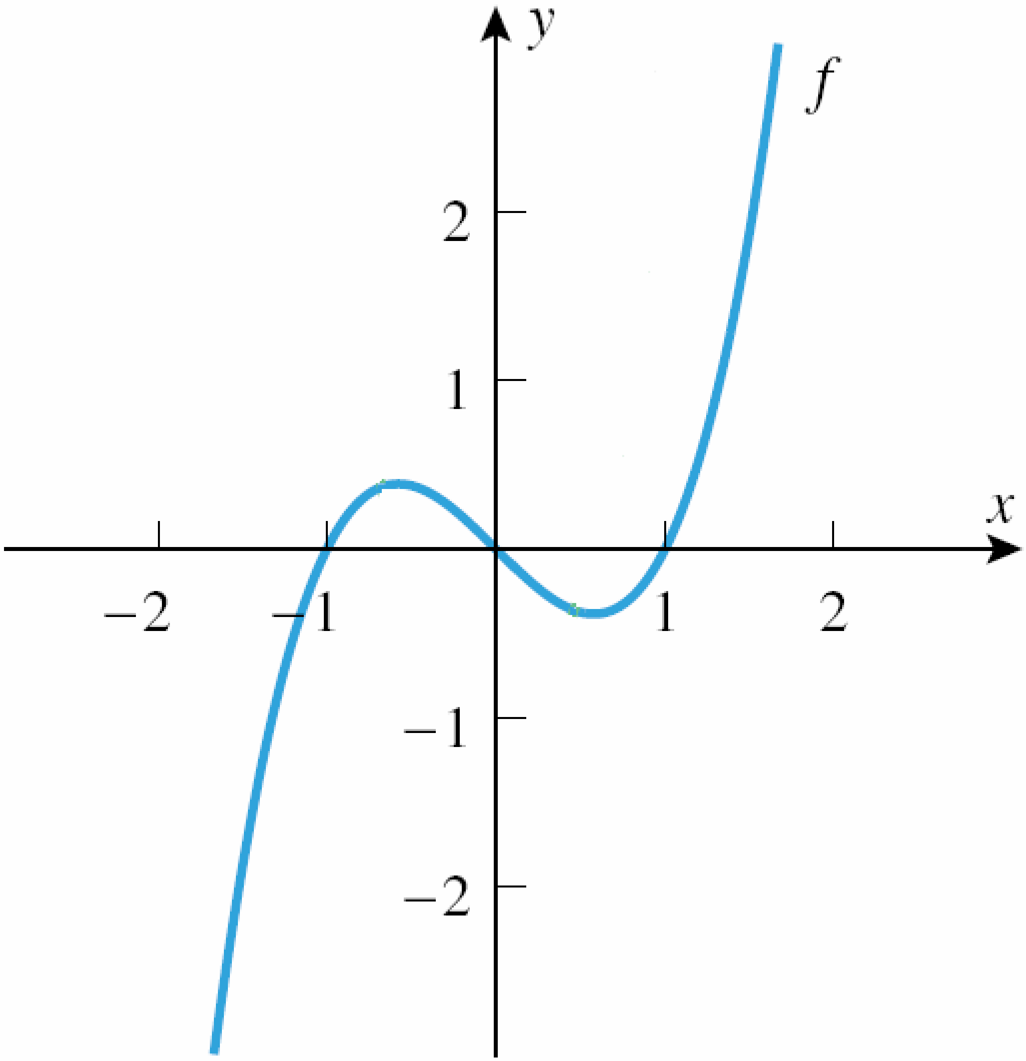
$$= \lim_{w \to x} \frac{(w^2 + 1) - (x^2 + 1)}{w - x}$$

$$f'(-2) =$$

$$f'(0) =$$

$$f'(2) =$$

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - x$



$$f'(x) = \lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$$

$$= \lim_{w \to x} \frac{(w^3 - w) - (x^3 - x)}{w - x}$$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ณ จุด x ใดๆ

ในบางครั้ง อาจใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนความหมายของอนุพันธ์

ถ้า

$$y = f(x)$$

แล้วจะใช้สัญกรณ์ต่อไปนี้ แทนอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}$$

สัญกรณ์ $\dfrac{dy}{dx}$ ได้ถูกนำเสนอขึ้นครั้งแรกโดย

G.W. Leibniz

(1646-1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz

นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน

ผู้ได้ชื่อว่าเป็นหนึ่งในผู้วางรากฐาน

ของวิชา CALCULUS แก่ชาวโลก

อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่น่าสนใจ

$\dfrac{d}{dx}[c] = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

พิสูจน์

$$\frac{d}{dx}[0]=$$

$$\frac{d}{dx}[1]=$$

$$\frac{d}{dx}[-24]=$$

$$\frac{d}{dx}[e]=$$

$$\frac{d}{dx}[\pi]=$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{n}\right]=nx^{n-1}$$ เมื่อ n เป็นค่าคงตัวใดๆ

<u>พิสูจน์</u>

$$\frac{d}{dx}\left[x^5\right]=$$

$$\frac{d}{dx}[x]=$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\right]=$$

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]=$$

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)] = cf\,'(x)$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

$$\frac{d}{dx}[4x^8] =$$

$$\frac{d}{dx}[-x^{12}] =$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{\pi}\right] =$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$$

$$\frac{d}{dx}[x^4 + x^2] =$$

$$\frac{d}{dx}[6x^{11} - 9] =$$

$$\frac{d}{dx}[3x^8 - 2x^5 + 6x + 1] =$$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ถ้า $y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$

จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ถ้า $y = (2 - x - 3x^3)(7 + x^5)$

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

จงหา $\frac{dy}{dx}$ ถ้า $y = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$

จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ถ้า $y = (2 - x - 3x^3)(7 + x^5)$

อนุพันธ์ของผลหาร

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}$$

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + 1}$

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = \dfrac{3}{\sqrt{x} + 2}$

จงหาค่า $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ เมื่อ $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$

อนุพันธ์อันดับอื่นๆ ของฟังก์ชัน

ถ้า $y = f(x)$

อนุพันธ์อันดับที่ 1

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

อนุพันธ์อันดับที่ 2

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \left(f'(x)\right)' = f''(x)$$

อนุพันธ์อันดับที่ 3

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] = \big(f''(x)\big)' = f'''(x)$$

อนุพันธ์อันดับที่ 4

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^3y}{dx^3}\right] = \big(f'''(x)\big)' = f^{(4)}(x)$$

อนุพันธ์อันดับที่ 5

$$\frac{d^5y}{dx^5} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^4y}{dx^4}\right] = \left(f^{(4)}(x)\right)' = f^{(5)}(x)$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$$

คือ อนุพันธ์อันดับที่ n ของฟังก์ชัน $f(x)$

ตัวอย่าง

ถ้า $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

ถ้า $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$

$$f'''(x) = 72x - 12$$

$$f^{(4)}(x) =$$

$$f^{(5)}(x) =$$

จงหาอนุพันธ์อันดับที่ 1 และ 2 ของฟังก์ชัน

$$f(x) = (x+1)^5$$

$$f(x) = (x+1)^5$$

จงหา $f(1), f'(1), f''(1)$