กำหนดการเชิงเส้น (linear programming)

กำหนดการเชิงเส้น ถูกคิดค้นขึ้นในครั้งแรกก่อนช่วงสงครามโลกครั้งที่ 2 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวรัสเซีย ชื่อA.N. Kolmogorov เท่าที่ปรากฏ ในช่วงแรกๆ Stigler เป็นผู้ที่ประยุกต์กำหนดการเชิงเส้นนี้ในการแก้ปัญหาด้านโภชนาการในปี 1945 และเรื่องนี้ได้ถูกนำมาใช้ประโยชน์เป็นอย่างมาก โดยการพัฒนากำหนดการเชิงเส้นให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นโดย George G.Dantzig ในปี 1947 เพื่อใช้ในการ การเครื่องย้ายกำลังทหาร อาวุธยุทโธปกรณ์ต่างๆ จากฐานทัพหนึ่ง ไปยังอีกฐานทัพหนึ่ง ในกองทัพอากาศประเทศสหรัฐอเมริกา ให้มีประสิทธิภาพมากที่สุด (S.C.Loong 2006)

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้กำหนดการเชิงเส้น

1. การขนส่ง

ช่วยให้ขนส่งได้รวดเร็ว และประหยัดค่าใช้จ่าย

2. ด้านการผลิต

ช่วยในการวางแผนการใช้วัตถุดิบ วัตถุเหลือใช้ และลดต้นทุนการผลิต

3. ด้านโภชนาการ

ใช้ในด้านการจัดการอาหาร ให้ร่างกายได้รับคุณค่าทางอาหาร และสารอาหารที่เพียงพอ แต่ค่าใช้จ่ายต่ำสุด

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้กำหนดการเชิงเส้น

4. การศึกษา

ช่วยในการวางแผนรับนักศึกษาให้เข้าศึกษามาที่สุด แต่อยู่ภายใต้ข้อจำกัดของ จำนวนบุคลากรทางการศึกษา, อุปกรณ์ทางการศึกษา และ ขนาดของพื้นที่

5. ทางด้านประสิทธิภาพทางการทำงาน

ช่วยให้จัดสรรเวลาที่มีอยู่อย่างจำกัด ให้ทำกิจกรรมได้หลากหลายและเกิดประโยชน์สูงสุด

กล่าวง่ายๆ คือ กำหนดการเชิงเส้นเป็นการศึกษาเพื่อหาวิธีการต่างๆ ที่จะทำให้การดำเนินการบางเรื่อง ได้ค่าที่**เหมาะสม**ที่สุด

ในการนำกำหนดการเชิงเส้นไปใช้แก้ปัญหาต่างๆ จำเป็นต้องสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ (mathematical modeling) ซึ่งประกอบด้วยเซตของสมการ และ อสมการ จากนั้นนำข้อมูลดังกล่าวไปใช้แก้ปัญหาโดยใช้กราฟ ซึ่งเรียกวิธีการดังกล่าวนี้ว่า **ซิมเพล็กซ์ (simplex)**

กราฟของอสมการ

จงวาดกราฟของอสมการ $y \geq 2x + 2$

จงวาดกราฟของอสมการ $y > 2x + 2$

จงวาดกราฟของอสมการ $y \leq 2x + 2$

จงวาดกราฟของอสมการ $y < 2x + 2$

จงวาดกราฟของอสมการ $3x - 3 < 5x - y$

จงวาดกราฟของอสมการ $2x + 3y \leq 1$

จงวาดกราฟเพื่อแสดงเซตคำตอบของระบบอสมการ

$$x + y \leq 4$$
$$2x - y \leq 4$$

จงวาดกราฟเพื่อแสดงเซตคำตอบของระบบอสมการ

$$y > x^2 + 1$$
$$y < x + 3$$

จงวาดกราฟเพื่อแสดงเซตคำตอบของระบบอสมการ

$$x \leq 1$$
$$y \leq x + 1$$

จงวาดกราฟเพื่อแสดงเซตคำตอบของระบบอสมการ

$$x \leq 1$$

$$y \leq x + 1$$

$$y \leq -x + 3$$

จงวาดกราฟเพื่อแสดงเซตคำตอบของระบบอสมการ

$$x \leq 1$$

$$y \leq x + 1$$

$$y \geq -\frac{1}{2}x + 3$$

จงวาดกราฟเพื่อแสดงเซตคำตอบของระบบอสมการ

$$2x + y \leq 3$$

$$3x + y \leq 4$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

สังเกตว่าเซตคำตอบของระบบอสมการจะแบ่งเป็น 3 กรณี

1. ไม่มีคำตอบ

2. เซตของคำตอบมีอยู่เป็นบริเวณ**จำกัด**

3. เซตของคำตอบมีอยู่เป็นบริเวณ**ไม่จำกัด**

สำหรับกรณีที่ 2 และ 3 จะมีส่วนประกอบของกราฟที่สำคัญคือ

1. ขอบ
2. จุดมุม

สำหรับจุดมุม เราสามารถหาได้จากการ**แก้ระบบสมการนั่นเอง**

จงวาดกราฟเพื่อแสดงเซตคำตอบของระบบอสมการ พร้อมหาจุดมุม

$$2x + y - 1 \geq 0$$

$$x - y + 1 \leq 0$$

จงวาดกราฟเพื่อแสดงเซตคำตอบของระบบอสมการ พร้อมหาจุดมุม

$$2x + y \leq 3$$

$$y - x \leq 0$$

$$y \geq 0$$

จงวาดกราฟเพื่อแสดงเซตคำตอบของระบบอสมการ พร้อมหาจุดมุม

$$2x + y \leq 3$$

$$y - x \leq 0$$

$$x \leq 0$$

จงวาดกราฟเพื่อแสดงเซตคำตอบของระบบอสมการ พร้อมหาจุดมุม

$$y + x \leq 2$$

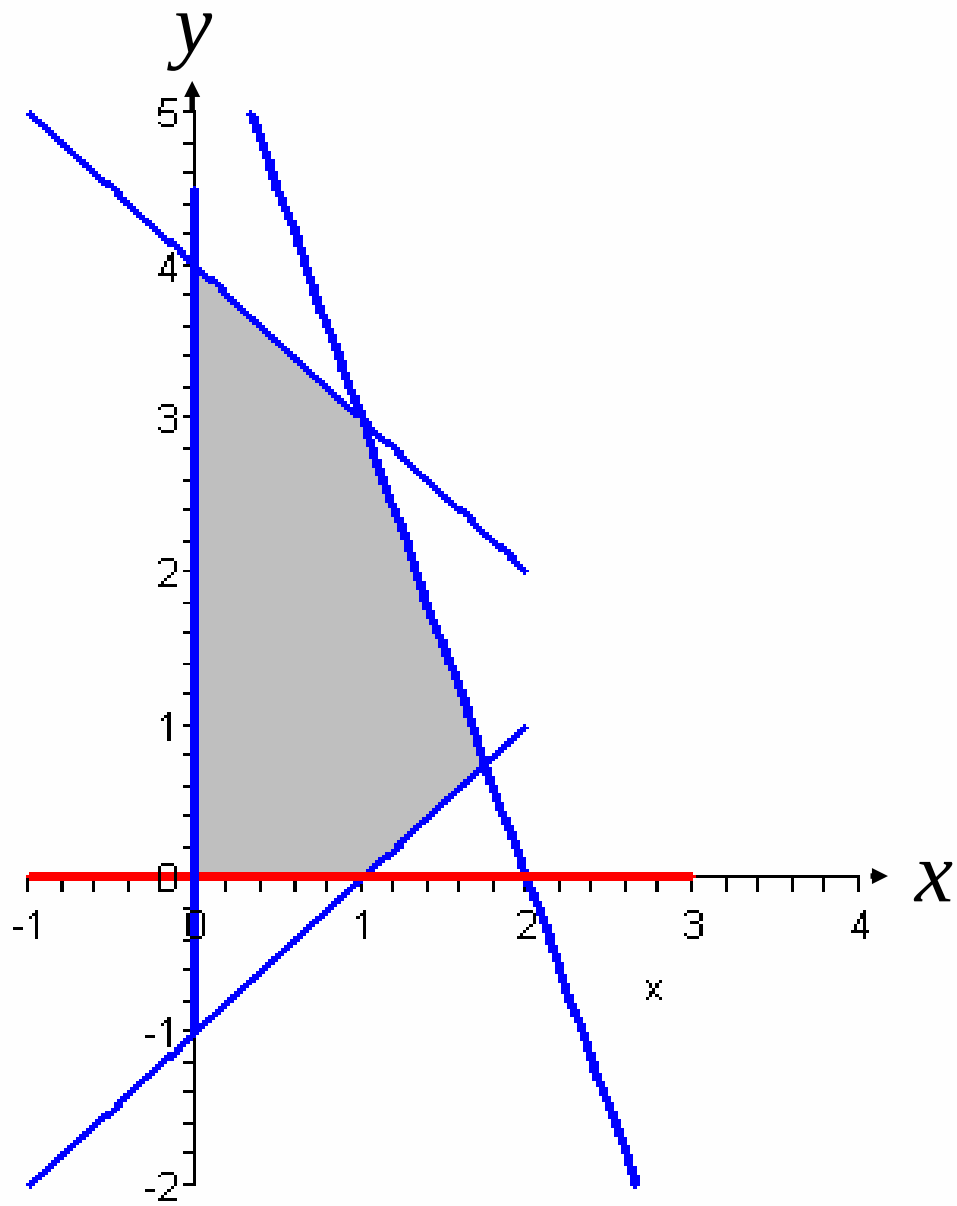
$$y - x \leq 0$$

$$y \leq 0$$

จงวาดกราฟเพื่อแสดงเซตคำตอบของระบบอสมการ พร้อมหาจุดมุม

$3x + y \leq 6$ $x - y \leq 1$ $x + y \leq 4$

$x \geq 0$ $y \geq 0$

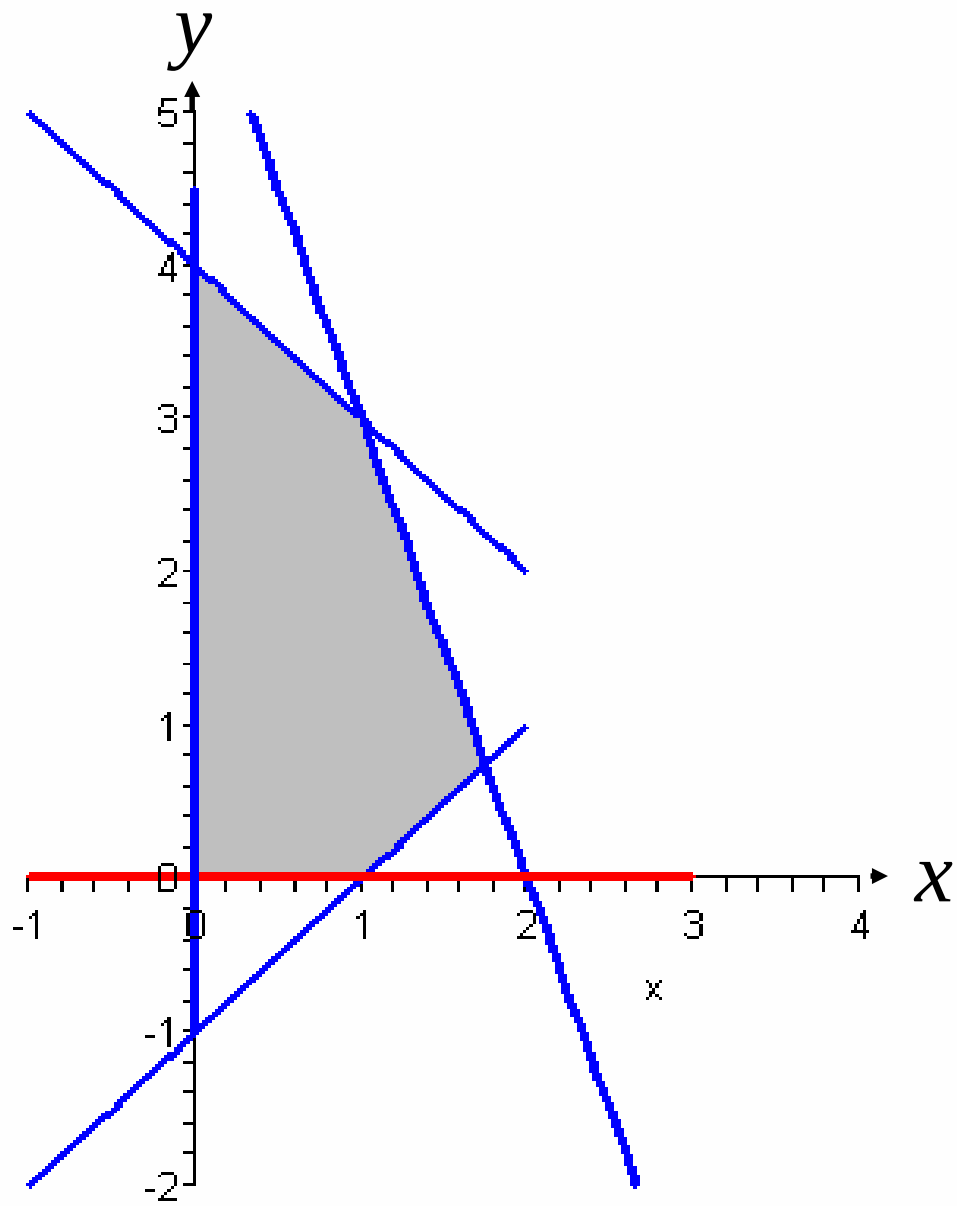

y
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
x

จงพิจารณาว่าค่า $f = y - 2x$ มีค่าสูงสุดและต่ำสุดเท่าใด เมื่อ x และ y เป็นไปตามเงื่อนไข

$$3x + y \leq 6 \qquad x - y \leq 1 \qquad x + y \leq 4$$

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

$(0,0), (1,0), (\frac{7}{4}, \frac{3}{4}), (1,3), (0,4)$

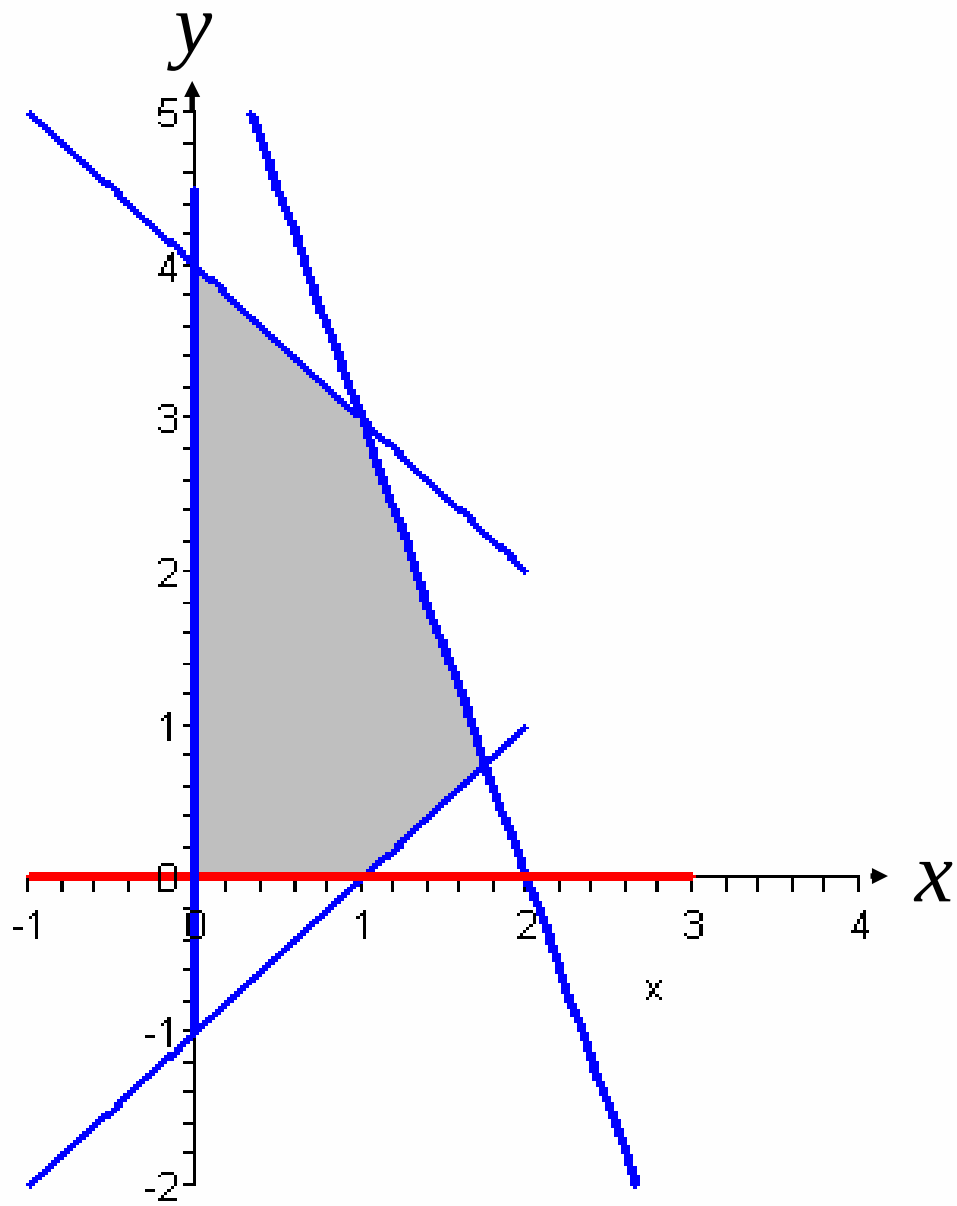

y
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
x

จงพิจารณาว่าค่า $f = y + 2x$ มีค่าสูงสุดและต่ำสุดเท่าใด เมื่อ x และ y เป็นไปตามเงื่อนไข

$$3x + y \leq 6 \qquad x - y \leq 1 \qquad x + y \leq 4$$

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

$(0,0),(1,0),(\frac{7}{4},\frac{3}{4}),(1,3),(0,4)$

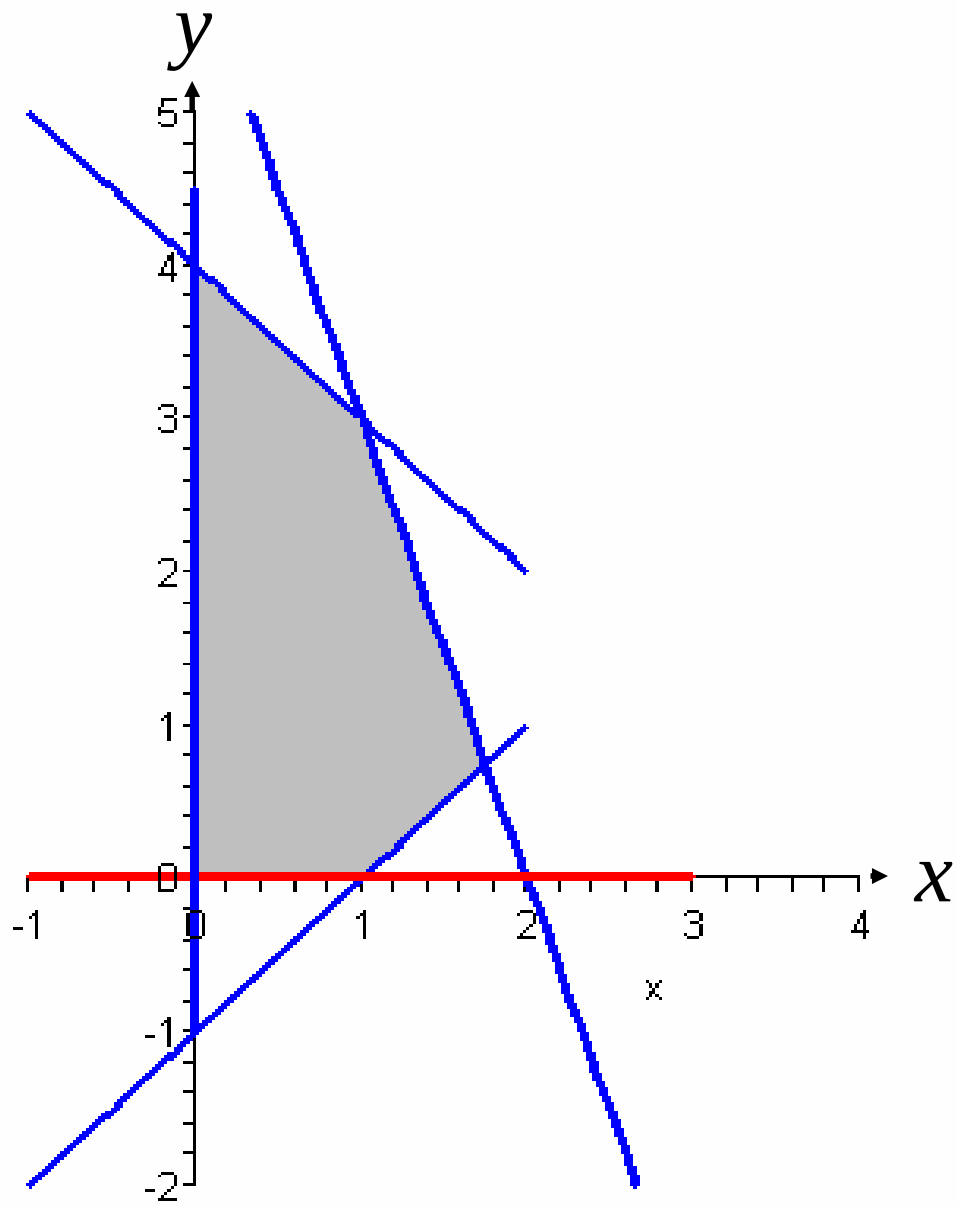

y
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
x

จงพิจารณาว่าค่า $f = 3x - 2y$ มีค่าสูงสุดและต่ำสุดเท่าใด เมื่อ x และ y เป็นไปตามเงื่อนไข

$$3x + y \leq 6 \qquad x - y \leq 1 \qquad x + y \leq 4$$

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

$(0,0),(1,0),(\frac{7}{4},\frac{3}{4}),(1,3),(0,4)$


y
x
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-1
0
1
2
3
4
x

ตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของกำหนดการเชิงเส้น
(mathematical modeling for linear programming)

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของกำหนดการเชิงเส้น จำเป็นต้องตีความปัญหาให้อยู่ในรูปของตัวแบบทางคณิตศาสตร์ (mathematical modeling) ซึ่งในเรื่องนี้จะประกอบไปด้วย 2 หัวข้อสำคัญคือ

1. ฟังก์ชันจุดประสงค์ (objective function)

ฟังก์ชันจุดประสงค์เป็นฟังก์ชันที่เราจะนำไปหาค่าเหมาะสมที่สุด (มากที่สุด หรือ น้อยที่สุด) ตัวอย่างของฟังก์ชันนี้ได้แก่ ฟังก์ชันของผลกำไร (ต้องการหาค่ามากสุด) ฟังก์ชันของต้นทุน (ต้องการหาค่าน้อยสุด) เป็นต้น

ตัวอย่างการหาฟังก์ชันจุดประสงค์

โรงงานไม้แปรรูปแห่งหนึ่งสามารถผลิตโต๊ะได้ 7 ตัว และเก้าอี้ได้ 22 ตัวต่อ 1 วัน

ฟังก์ชันจุดประสงค์ของ**รายได้แต่ละวัน**ของโรงงาน คือ

$$f = 7x + 22y$$

เมื่อ x คือราคาโต๊ะ และ y คือราคาเก้าอี้

ตัวอย่างการหาฟังก์ชันจุดประสงค์

โรงงานไม้แปรรูปแห่งหนึ่งสามารถผลิตโต๊ะได้ x ตัว และเก้าอี้ได้ y ตัวต่อ 1 วัน โดยโต๊ะมีมูลค่า 2,000 บาท ต่อ 1 ตัว เก้าอี้มีมูลค่า 250 บาท ต่อ 1 ตัว

ฟังก์ชันจุดประสงค์ของ**รายได้แต่ละวัน**ของโรงงาน คือ

$$f =$$

ร้านตัดชุด **The Tailor** ใช้ผ้าฝ้ายและผ้าลินินในการตัดชุด

ถ้าผ้าฝ้ายราคา 200 บาท ต่อตารางเมตร

และผ้าลินินราคา 300 บาท ต่อตารางเมตร

ฟังก์ชันจุดประสงค์ของ**ค่าใช้จ่าย**ของร้านตัดชุด คือ

$$f =$$

เมื่อ x แทนพื้นที่ของผ้าฝ้าย (หน่วยตารางเมตร)

และ y แทนพื้นที่ของลินิน (หน่วยตารางเมตร)

ร้านตัดชุด **The Tailor** ขายเสื้อได้วันละ x ตัว และกางเกงวันละ y ตัว

เสื้อราคาตัวละ 1200 บาท

และกางเกงราคาตัวละ 800 บาท

ฟังก์ชันจุดประสงค์ของ**รายได้**ของร้านตัดชุด คือ

$$f =$$

2. เงื่อนไข (constraints)

เงื่อนไข เป็นสมการ หรือ อสมการ ซึ่งเป็นข้อกำหนด, ข้อบังคับ, ขอบเขตหรือ ขีดจำกัด ต่างๆ ที่อยู่ในปัญหาเหล่านั้น

ตัวอย่างตีความเงื่อนไขของปัญหาให้อยู่รูปคณิตศาสตร์

โรงงานไม้แปรรูปแห่งหนึ่งสามารถผลิตโต๊ะได้ไม่เกิน 10 ตัว
เก้าอี้ได้ไม่เกิน 15 ตัว และไม่สามารถผลิตงานไม้ได้เกิน 20 ชิ้น
ภายใน 1 วัน
ถ้าให้ x เป็นจำนวนโต๊ะที่โรงงานผลิตได้ใน 1 วัน
และให้ y เป็นจำนวนเก้าอี้ที่โรงงานผลิตได้ใน 1 วัน
เราสามารถตีความเงื่อนไขดังกล่าวให้อยู่ในรูปคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0 \qquad x + y \leq 20$$

$$x \leq 10 \qquad y \leq 15$$

ช่างตัดเสื้อมีผ้าอยู่ 2 ชนิดที่จะใช้ทำเสื้อและกางเกงได้แก่

ผ้าฝ้าย 80 ตารางเมตร และ ลิกนิน 120 ตารางเมตร

เสื้อ 1 ตัวใช้ผ้าฝ้าย 1 ตารางเมตร ลิกนิน 3 ตารางเมตร

กางเกง 1 ตัว ใช้ผ้าฝ้าย และ ลิกนิน อย่างละ 2 ตารางเมตร

ถ้าให้ x แทนจำนวนเสื้อ

และ y แทนจำนวนกางเกง

เราสามารถตีความเงื่อนไขดังกล่าวให้อยู่ในรูปคณิตศาสตร์ได้เป็น

นายบุญและนางมา ปรึกษาเกษตรตำบลในการทำเกษตรสวนผสม เกษตรตำบลบอกว่าพืชผักที่นายบุญและนางมาจะปลูกต้องการสารอาหารอย่างน้อย ไนโตรเจน(N) 300 ส่วน, ฟอสฟอรัส(P) 240 ส่วน และโปรแทสเซียม(K) 90 ส่วน ถึงจะให้ผลผลิตดี
เมื่อทั้งคู่ไปหาปุ๋ยในท้องตลาดพบว่ายี่ห้อม้าเหาะเป็นปุ๋ยสูตร 10-5-6 และยี่ห้อม้าเหิน เป็นปุ๋ยสูตร 5-10-1

ถ้าให้ x แทนจำนวนปุ๋ยยี่ห้อ ม้าเหาะ (หน่วยเป็นกระสอบ)

และ y แทนจำนวนปุ๋ยยี่ห้อ ม้าเหิน (หน่วยเป็นกระสอบ)

เราสามารถตีความเงื่อนไขดังกล่าวให้อยู่ในรูปคณิตศาสตร์ได้เป็น

การแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น

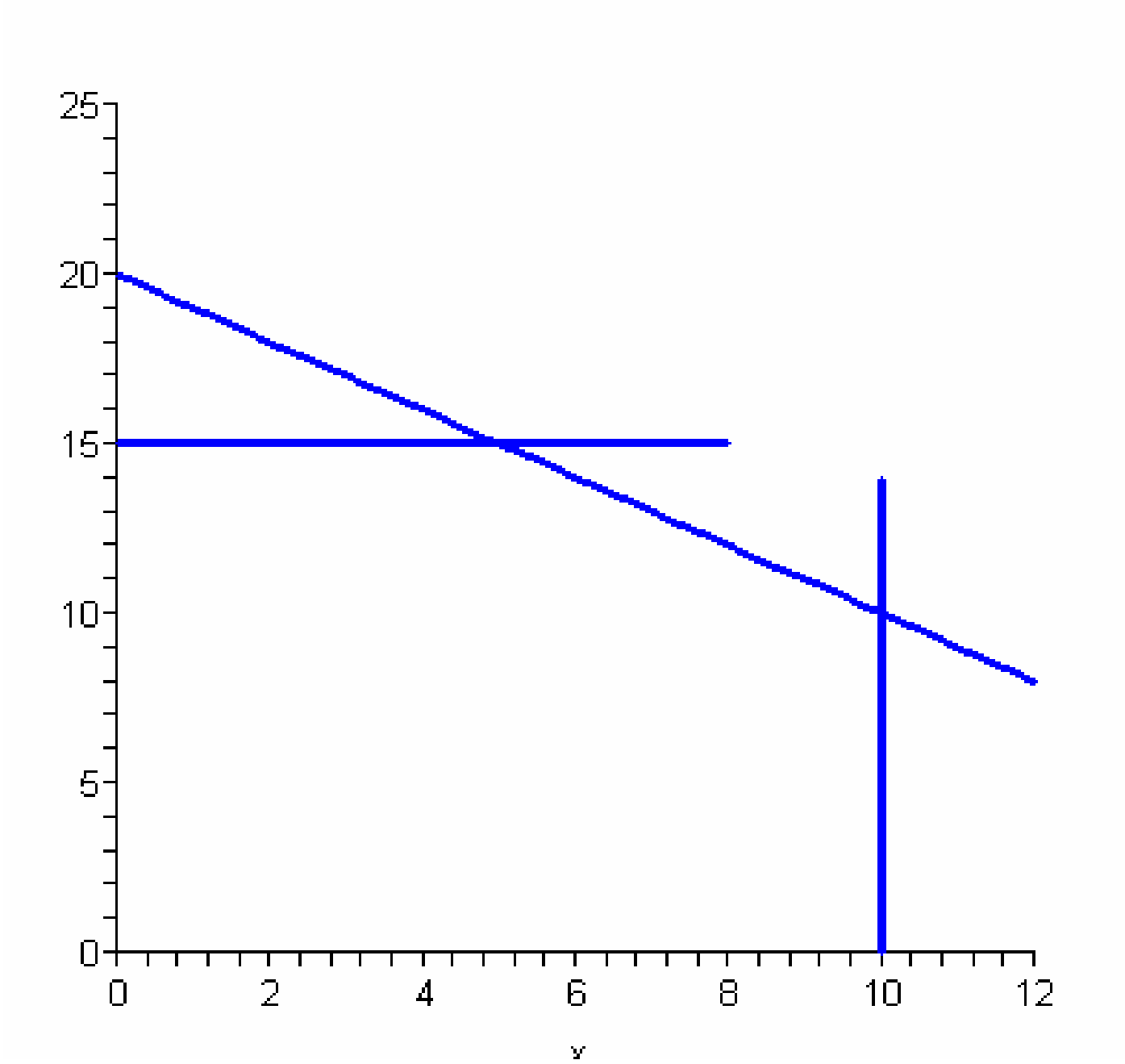
เมื่อสามารถตีความปัญหาให้อยู่ในรูปของตัวแบบทางคณิตศาสตร์ได้แล้ว ซึ่งเราจะได้**ฟังก์ชันจุดประสงค์** และ**เงื่อนไข** การแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น คือ การหาค่า**เหมาะสมที่สุด** (สูงสุด หรือ ต่ำสุด) ของฟังก์ชันจุดประสงค์ภายใต้เงื่อนไขนั่นเอง

ตัวอย่าง

โรงงานไม้แปรรูปแห่งหนึ่งสามารถผลิตโต๊ะได้ไม่เกิน 10 ตัว เก้าอี้ได้ไม่เกิน 15 ตัว และไม่สามารถผลิตงานไม้ได้เกิน 20 ชิ้น ภายใน 1 วัน

โต๊ะมีมูลค่า 2,000 บาท ต่อ 1 ตัว เก้าอี้มีมูลค่า 250 บาท ต่อ 1 ตัว

โรงงานควรผลิตโต๊ะและเก้าอี้วันละกี่ตัวเพื่อให้มีรายได้มากที่สุด


25
20
15
10
5
0
0
2
4
6
8
10
12
y

ตัวอย่าง

ช่างตัดเสื้อมีผ้าอยู่ 2 ชนิดที่จะใช้ทำเสื้อและกางเกงได้แก่

ผ้าฝ้าย 80 ตารางเมตร และ ลิกนิน 120 ตารางเมตร

เสื้อ 1 ตัวใช้ผ้าฝ้าย 1 ตารางเมตร ลิกนิน 3 ตารางเมตร

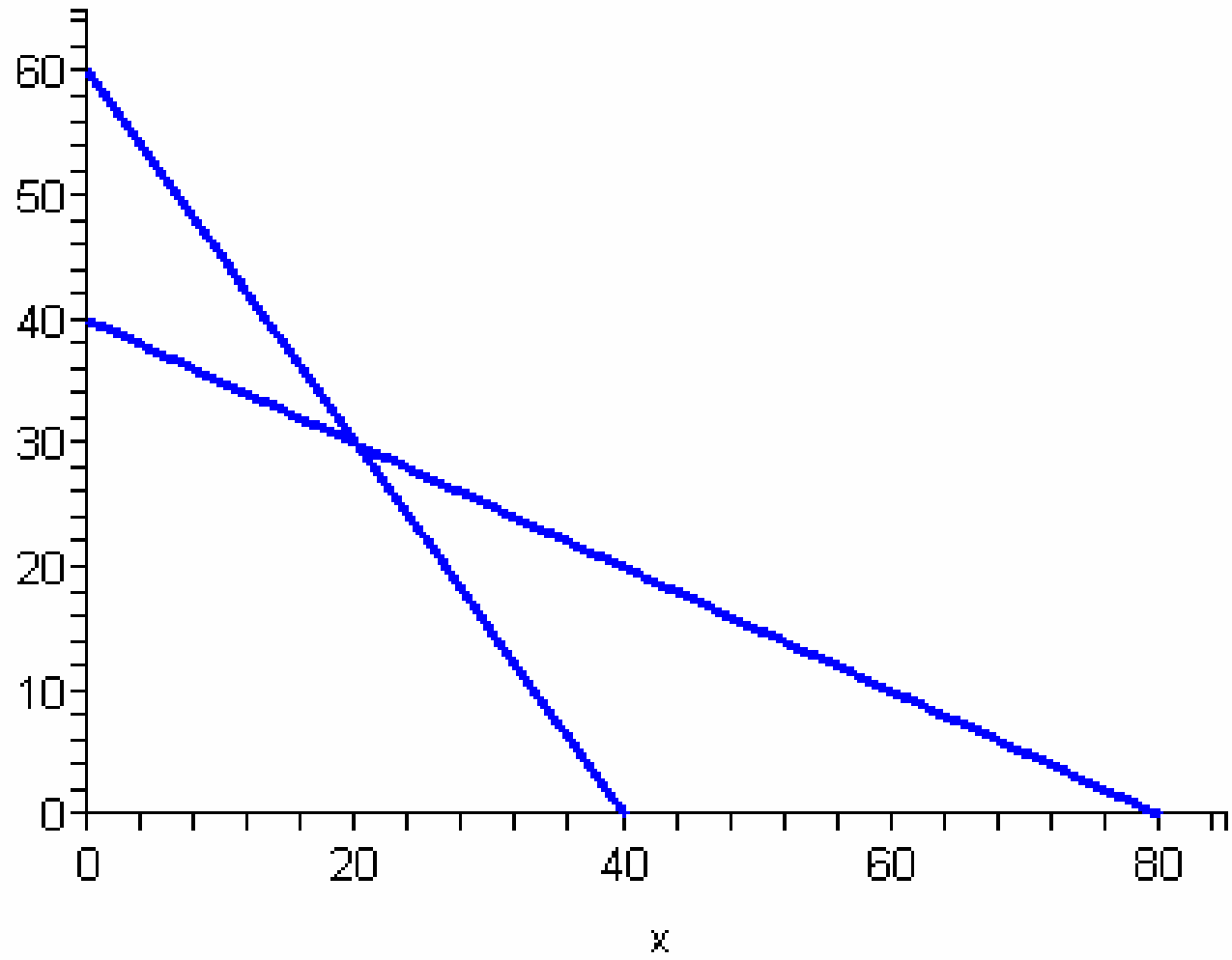
กางเกง 1 ตัว ใช้ผ้าฝ้าย และ ลิกนิน อย่างละ 2 ตารางเมตร

ถ้าเสื้อราคาตัวละ 1200 บาท

และกางเกงราคาตัวละ 800 บาท

ช่างตัดเสื้อควรผลิตเสื้อและกางเกงอย่างละกี่ตัว

จึงจะคุ้มค่าที่สุด


60
50
40
30
20
10
0
0
20
40
60
80
x

ตัวอย่าง

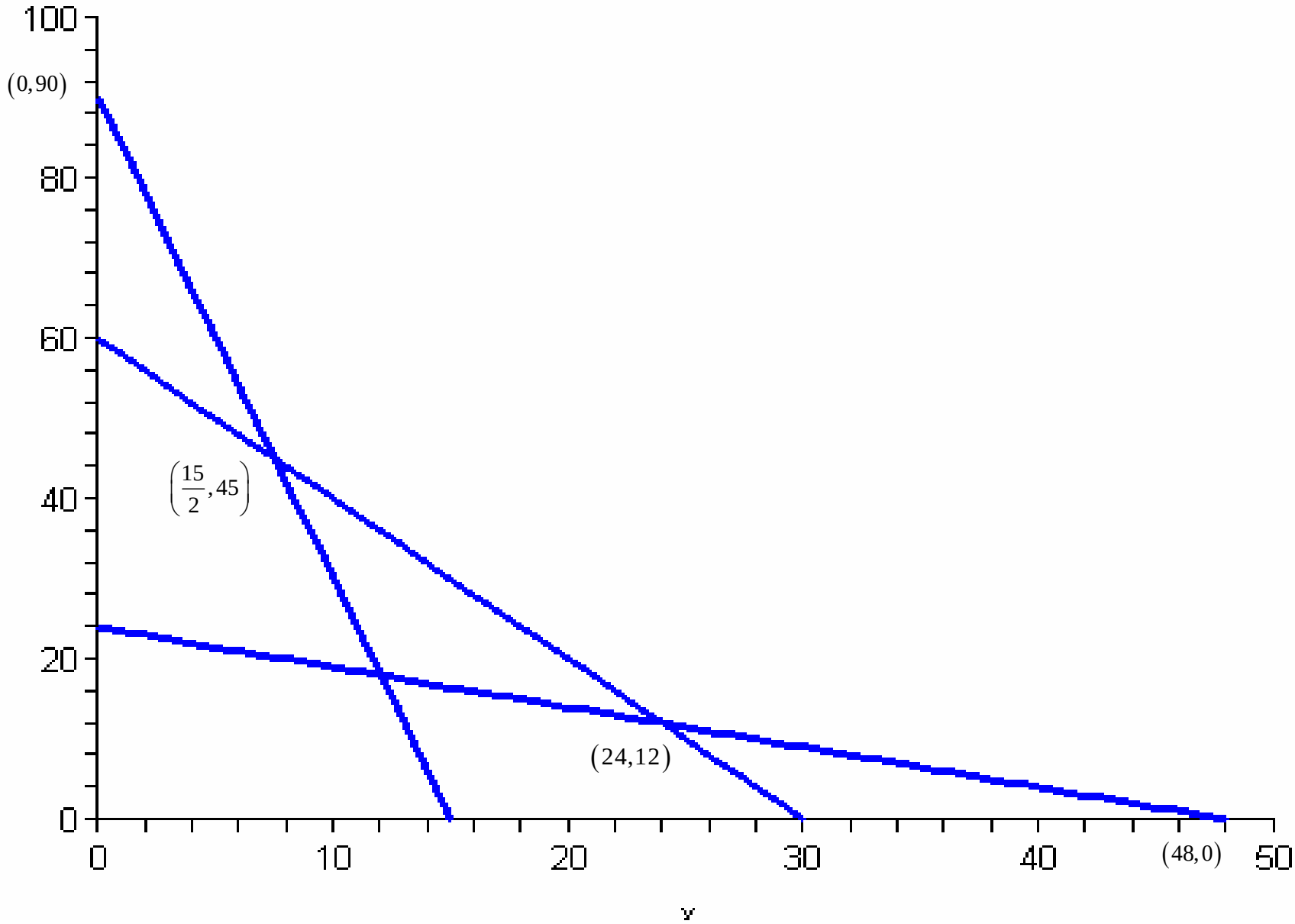
นายบุญและนางมา ปรึกษาเกษตรตำบลในการทำเกษตรสวนผสม เกษตรตำบลบอกว่าพืชผักที่นายบุญและนางมาจะปลูกต้องการสารอาหารอย่างน้อย ไนโตรเจน(N) 300 ส่วน, ฟอสฟอรัส(P) 240 ส่วน และโปรแทสเซียม(K) 90 ส่วน ถึงจะให้ผลผลิตดี

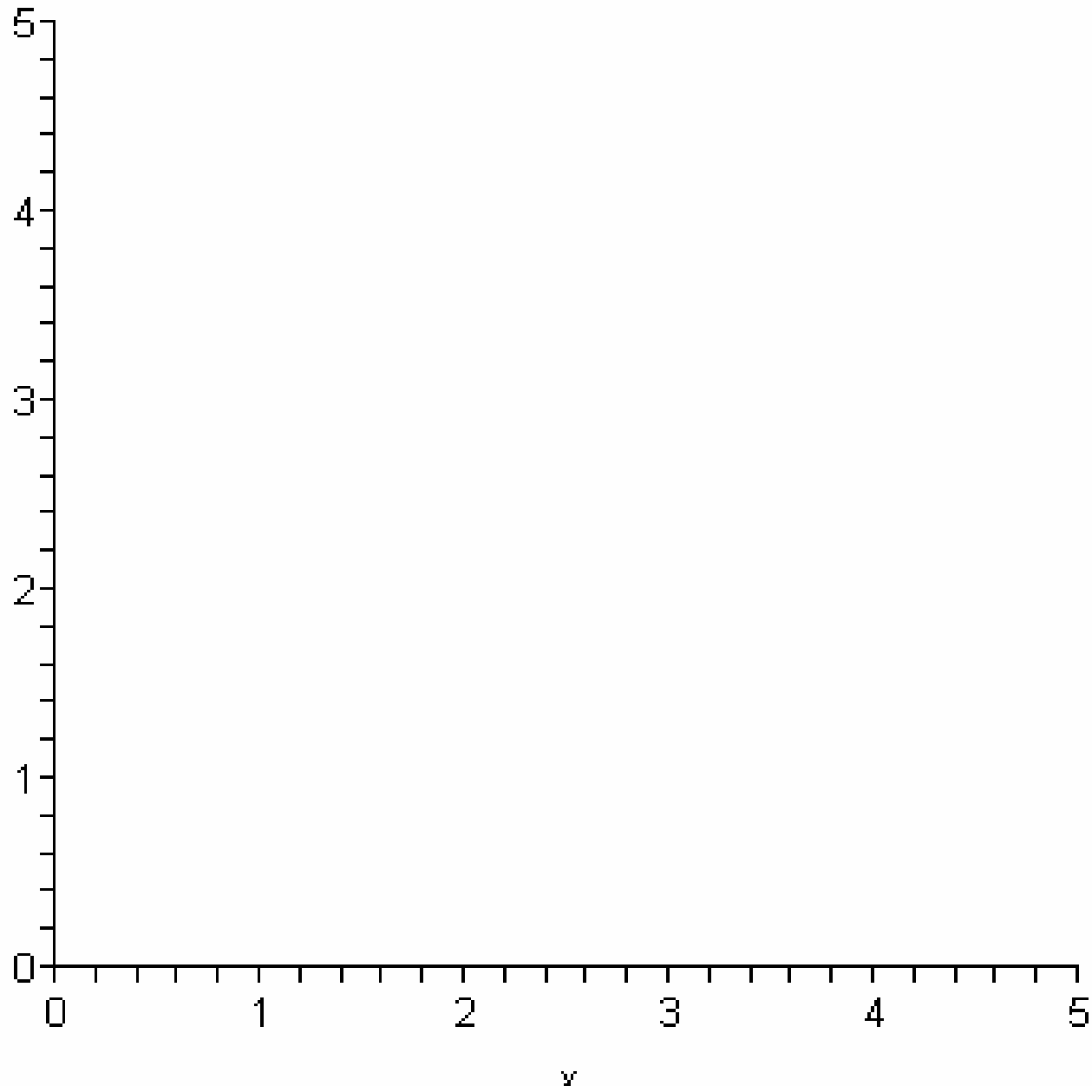
เมื่อทั้งคู่ไปหาปุ๋ยในท้องตลาดพบว่ายี่ห้อม้าเหาะเป็นปุ๋ยสูตร 10-5-6 และยี่ห้อม้าเหิน เป็นปุ๋ยสูตร 5-10-1

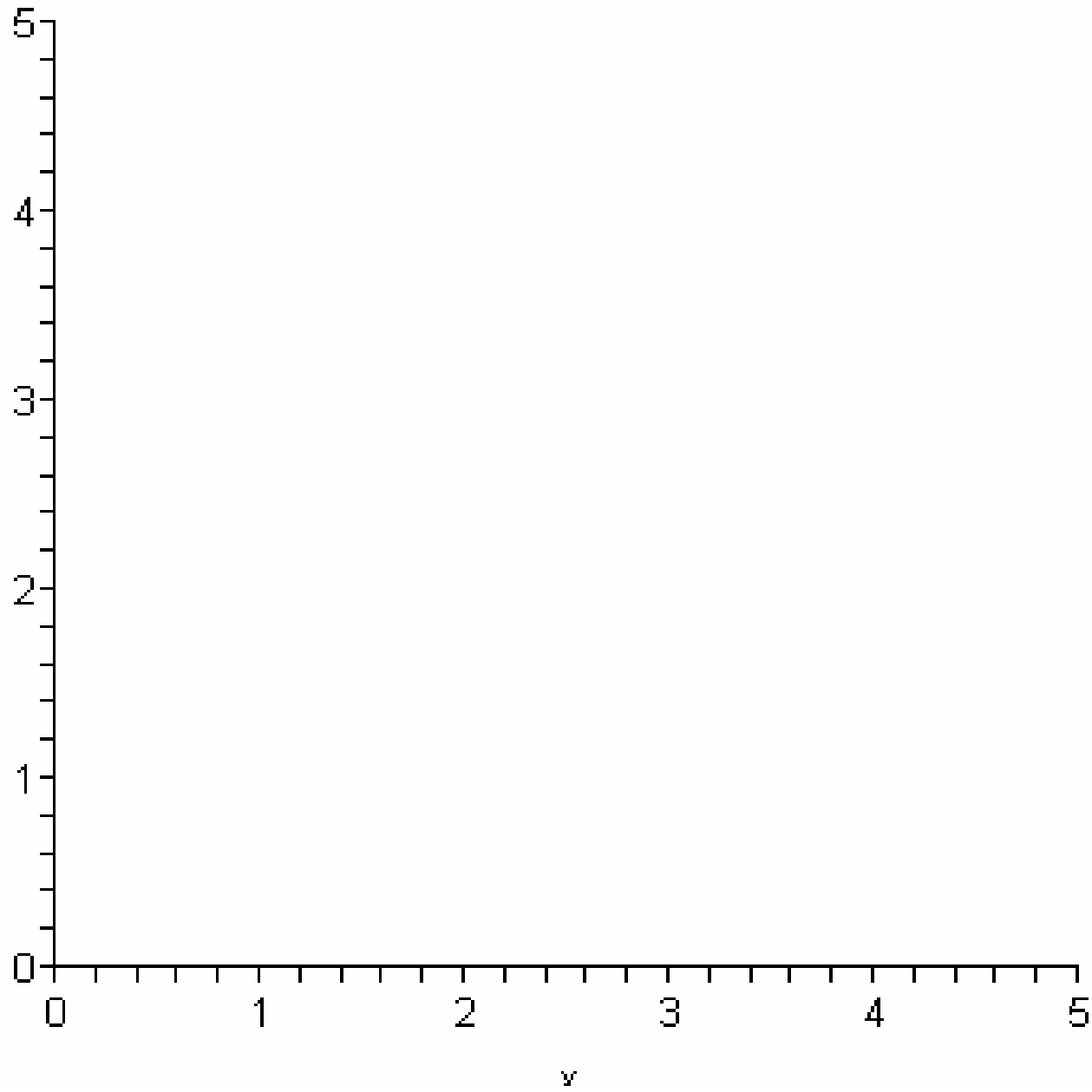
ถ้าปุ๋ยตราม้าเหาะราคาถุงละ 200 บาท

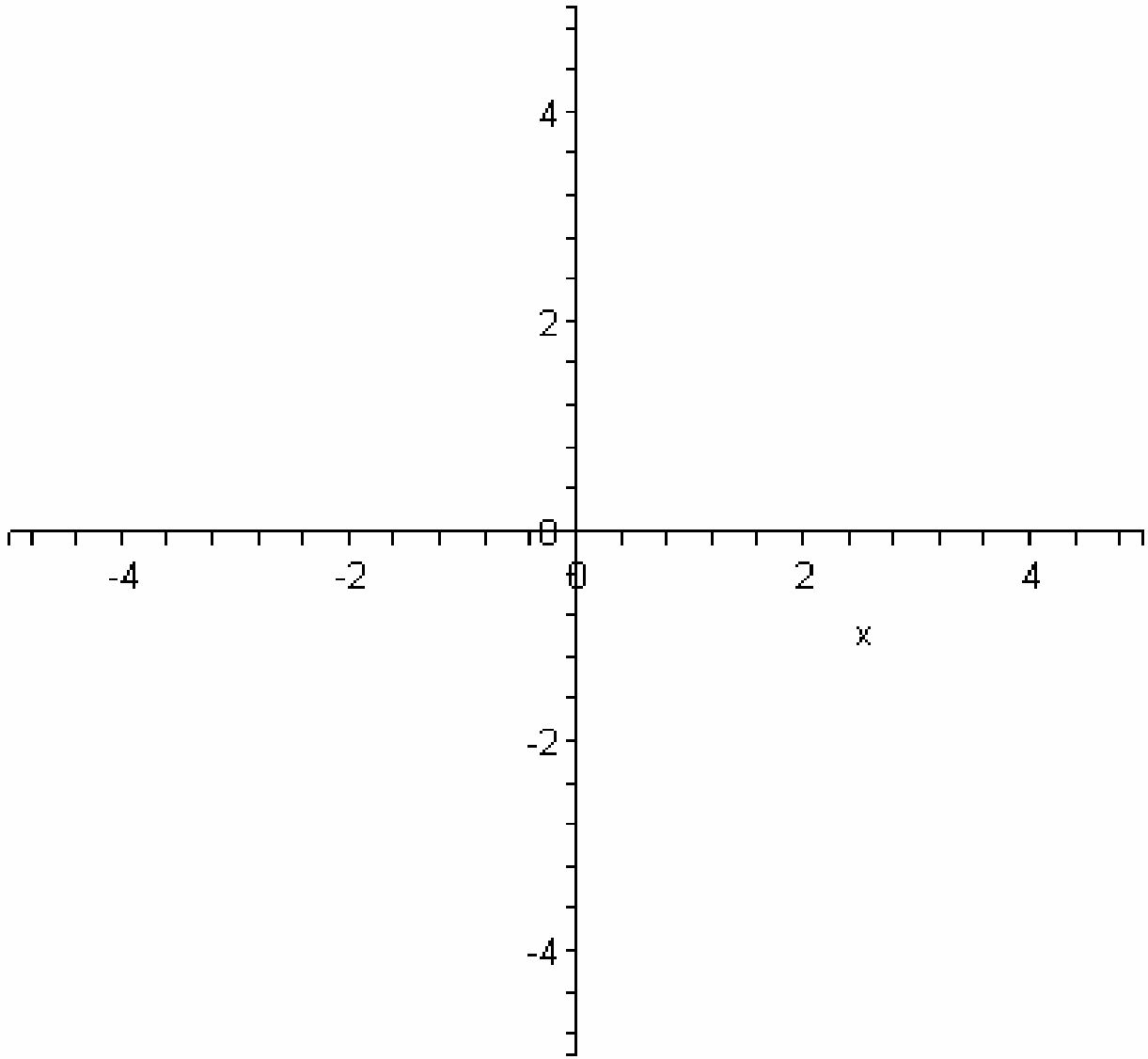
และปุ๋ยตราม้าเหินราคาถุงละ 150 บาท

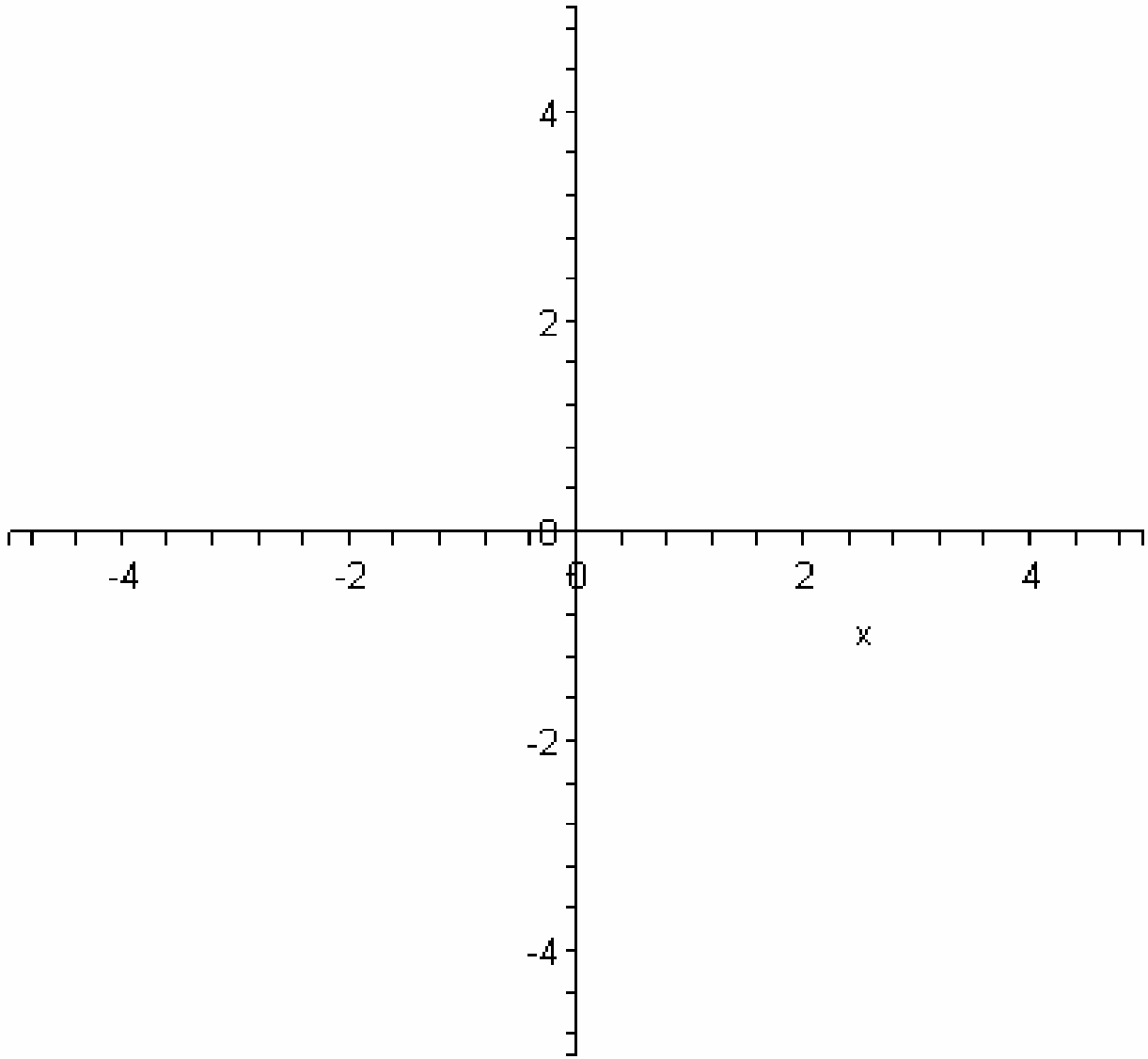
นายบุญและนางมาควรซื้อปุ๋ยอย่างละจำนวนเท่าใด ถึงจะคุ้มค่าที่สุด


100
(0,90)
80
60
40
$\left(\frac{15}{2},45\right)$
20
0
$(24,12)$
0
10
20
30
40
(48,0)
50
y


5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
y


5
4
3
2
1
0
0
1
2
3
4
5
y


4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4
x


4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4
x