

# เนื้อหาหลังสอบกลางภาค

- พหุนาม สมการพหุนาม และการหาผลเฉลยของสมการ
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น
- ฟังก์ชันพื้นฐานทางคณิตศาสตร์ กราฟของฟังก์ชัน
- กำหนดการเชิงเส้น
- การประยุกต์ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาทางธุรกิจและการเงิน

# พืชคณิตของพหุนาม

พหุนามเป็นการขยายความคิดจากฟังก์ชันเชิงเส้น โดยพหุนามและสมการพหุนาม มีความยุ่งยาก และซับซ้อนในการหาผลเฉลยมากกว่าปัญหาเชิงเส้น แต่สามารถนำไปประยุกต์ แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้หลากหลายมากขึ้นเช่นกัน

# พหุนาม

เราเรียกพจน์ซึ่งอยู่ในรูป

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

โดยที่  $a_n \neq 0$

ว่าพหุนาม (polynomial) ระดับชั้น (degree)  $n$

และเรียก  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$

ซึ่งเป็นค่าคงตัวว่า สัมประสิทธิ์ (coefficients) ของพหุนาม

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

เรียก  $a_n$  ว่าสัมประสิทธิ์หน้าพจน์  $x^n$

เรียก  $a_{n-1}$  ว่าสัมประสิทธิ์หน้าพจน์  $x^{n-1}$

•  
•  
•

เรียก  $a_1$  ว่าสัมประสิทธิ์หน้าพจน์  $x$

เรียก  $a_0$  ว่าสัมประสิทธิ์หน้าพจน์ 1

## ตัวอย่าง (quadratic polynomial)

$x^2 + 2x + 1$  เป็นพหุนามระดับชั้น

$x^2 + 2x$  เป็นพหุนามระดับชั้น

$x^2 - 1$  เป็นพหุนามระดับชั้น

$2 + x + x^2$  เป็นพหุนามระดับชั้น

ตัวอย่าง (cubic polynomial)

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  เป็นพหุนามระดับชั้น

$10x + x^3$  เป็นพหุนามระดับชั้น

$x^3 - x^2$  เป็นพหุนามระดับชั้น

## ตัวอย่าง (quartic polynomial)

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \quad \text{เป็นพหุนามระดับชั้น}$$

$$x^4 + 2x \quad \text{เป็นพหุนามระดับชั้น}$$

$$x^4 - 1 \quad \text{เป็นพหุนามระดับชั้น}$$

กำหนดให้  $P(x) = 4x^2 - 2x + 5$

จงหาค่า  $P(1)$      $P(0.5)$      $P(-2)$      $P(y)$



# การเท่ากันของพหุนาม

สองพหุนามใดๆ จะมีค่าเท่ากันก็ต่อเมื่อ มีสัมประสิทธิ์  
หน้า  $x^k$  เท่ากันทุก  $k=1, \dots, n$

## ตัวอย่าง

$$2x^3 - 4x^2 + 7x - 10 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$A =$$

$$B =$$

$$C =$$

$$D =$$

## ตัวอย่าง

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = x^2 - 4$$

$$A =$$

$$B =$$

$$C =$$

$$D =$$

# คุณสมบัติความเป็นเชิงเส้นของพหุนาม

1. การคูณด้วยค่าคงตัวใดๆ

$$\alpha (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) =$$
$$(\alpha a_n) x^n + (\alpha a_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_2) x^2 + (\alpha a_1) x + (\alpha a_0)$$

ตัวอย่าง

$$4(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) =$$

## ตัวอย่าง

$$(-2)(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) =$$

$$(0)(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) =$$

## 2. การบวกและกันของพหุนาม

ให้ทำการบวกและลบกันเฉพาะสัมประสิทธิ์ที่อยู่หน้า  $x^k$   
ตรงกันเท่านั้น

$$\begin{aligned} & (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= (a_n + b_n) x^n + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) - (b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= (a_n - b_n) x^n + \cdots + (a_1 - b_1) x + (a_0 - b_0) \end{aligned}$$

## ตัวอย่าง

$$(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) + (x^4 + 2x^2 - 4x + 1) =$$

$$(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) - (x^3 + 2x^2 - 4x + 1) =$$

## แบบฝึกหัด

$$(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) + (4x^2 - 2x + 5) =$$

$$(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) - (4x^2 - 5) =$$

จงหาค่า

$$2(2x^3 - 4x^2 + 7x - 10) - 3(4x^2 - 5) =$$



# การคูณกันของพหุนาม

การคูณกันของพหุนามให้ทำการคูณกระจายเหมือน

การคูณตัวเลขทั่วไป

$$(x + 1)(1 + x) =$$

$$(2x + 1)(2 + x) =$$

$$(2 + x)(2x + 1) =$$

กำหนดให้  $P(x)$  และ  $R(x)$  เป็นพหุนาม

สังเกตได้ว่าการคูณกันของพหุนาม มีคุณสมบัติสลับที่

$$P(x)R(x) = R(x)P(x)$$

$$(x-1)(1+x+x^2) =$$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) =$$

# แบบฝึกหัด

จงหาค่า  $P(x)R(x)$  เมื่อ

$$P(x) = 4x - 5$$

$$R(x) = 3x^3 - x^2 + 4x - 6$$

## แบบฝึกหัด

ถ้า  $x^2 + 5x + 6 = (x + A)(x + B)$

จงหาค่า  $A$  และ  $B$

# การหารพหุนาม

การหารพหุนาม ทำได้โดยการหารยาว ซึ่งในการหารนี้เราจะได้ ผลหาร (quotient) และ เศษเหลือ (remainder)



จงหาผลหารและเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการ

หารพหุนาม  $P(x) = x^3 - 1$  ด้วย  $x - 1$

$$\text{พหุนาม} = \text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร} + \text{เศษเหลือ}$$

**ถ้าเศษเหลือมีค่าเป็น 0**

$$\text{พหุนาม} = \text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร}$$



ตัวประกอบ (factor)

$$x^3 - x^2 + x + 1 = (x - 1)(x^2 + 1) + 2$$

เศษเหลือ (remainder) คือ 2

$$x^3 - x^2 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + 1) - 1$$

เศษเหลือ (remainder) คือ -1

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$$

ตัวประกอบ (factor)



$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

↑                      ↗  
ตัวประกอบของ  $x^2 + 5x + 6$

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1)$$

↗  
ตัวประกอบของ  $x^2 + 2x + 1$

ทฤษฎีบท เศษเหลือจากการหารพหุนาม

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ด้วย  $x - a$  คือ  $P(a)$

## ตัวอย่าง

จงหาเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม

$$P(x) = x^3 - 1 \quad \text{ด้วย} \quad x - 1$$

## ตัวอย่าง

จงหาเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม

$$P(x) = x^3 - 1 \quad \text{ด้วย} \quad x + 1$$



## ตัวอย่าง

จงหาเศษเหลือของพหุนาม เมื่อต้องการหารพหุนาม

$$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 9 \quad \text{ด้วย} \quad x + 2$$

## แบบฝึกหัด

จงหาค่า  $a$  เมื่อเศษเหลือจากการหารพหุนาม

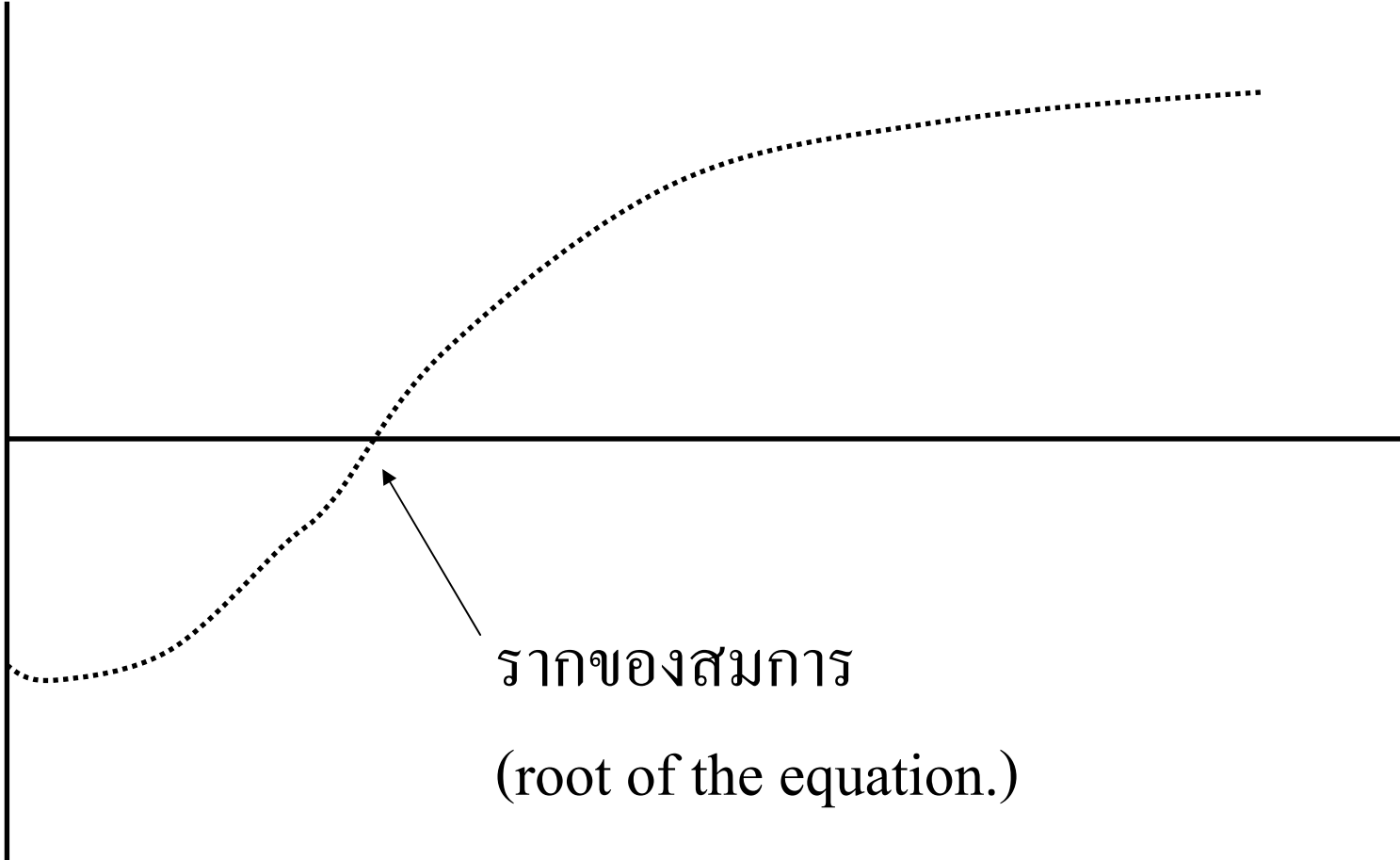
$$2x^3 + x^2 + a \text{ ด้วย } x + 2 \text{ คือ } -9$$

# สมการพหุนาม

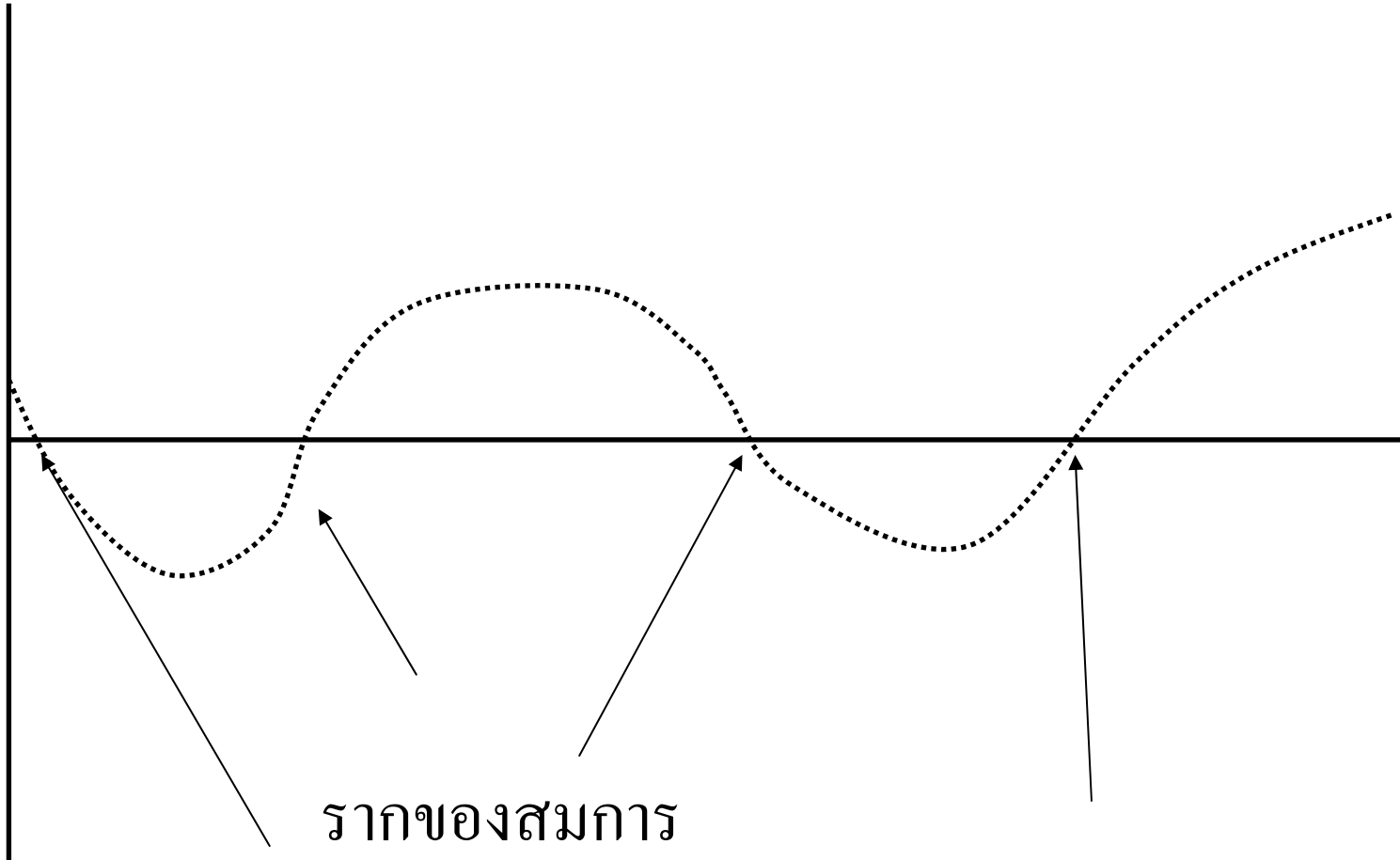
สมการพหุนามคือสมการที่อยู่ในรูป

$$P(x) = 0 \quad \text{หรือ} \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$



$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$



รากของสมการ

(roots of the equation.)

# รากของสมการพหุนาม

รากของสมการพหุนาม (roots of the equation)

คือ ค่า  $x_0$  ที่ทำให้สมการพหุนามมีค่าเท่ากับ 0

$$P(x_0) = 0 \quad \text{หรือ}$$

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0$$

## ตัวอย่าง

$x^3 - 1 = 0$  มีรากของสมการคือ  $x =$

$x^2 + 5x + 6 = 0$  มีรากของสมการคือ

$(x + 1)^{10} = 0$  มีรากของสมการคือ

$x^2 + 1 = 0$  มีรากของสมการคือ



ถ้าพหุนาม  $a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$

สามารถแยกตัวประกอบ (factor) ได้เป็น

$$a_n x_0^n + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = (x - a)R(x)$$

$a$  จะเป็นรากของสมการพหุนาม

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0 = 0$$

## ตัวอย่าง

$$x^3 - 1 = ( \quad ) ( \quad )$$

รากของสมการพหุนาม  $x^3 - 1 = 0$  คือ

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

รากของสมการพหุนาม  $x^2 + 5x + 6 = 0$  คือ

# วิธีการหารากของสมการพหุนามระดับชั้นสอง

## Method for finding roots of quadratic equations

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$1. \quad b^2 - 4ac > 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

มีสองรากที่แตกต่างกันคือ

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$2. \quad b^2 - 4ac = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

มีเพียงรากเดียว คือ

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$3. \quad b^2 - 4ac < 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

หาผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงไม่ได้

จงหารากของสมการ  $x^2 - 5x + 6 = 0$



จงหารากของสมการ  $x^2 - 5x + 7 = 0$

ถ้าพหุนามสามารถแยกตัวประกอบ (factor) ได้  
เราก็จะได้รากของสมการ และในทางกลับกัน ถ้า  
ได้รากของสมการพหุนาม เราก็จะสามารถแยก  
ตัวประกอบได้

$x^2 - 5x + 6 = 0$  มีรากคือ

ดังนั้นพหุนาม  $x^2 - 5x + 6$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$x^2 + 5x + 6 = 0$  มีรากคือ

ดังนั้นพหุนาม  $x^2 + 5x + 6$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{มีรากคือ } 1$$

ดังนั้นพหุนาม  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{มีรากคือ } -1$$

ดังนั้นพหุนาม  $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

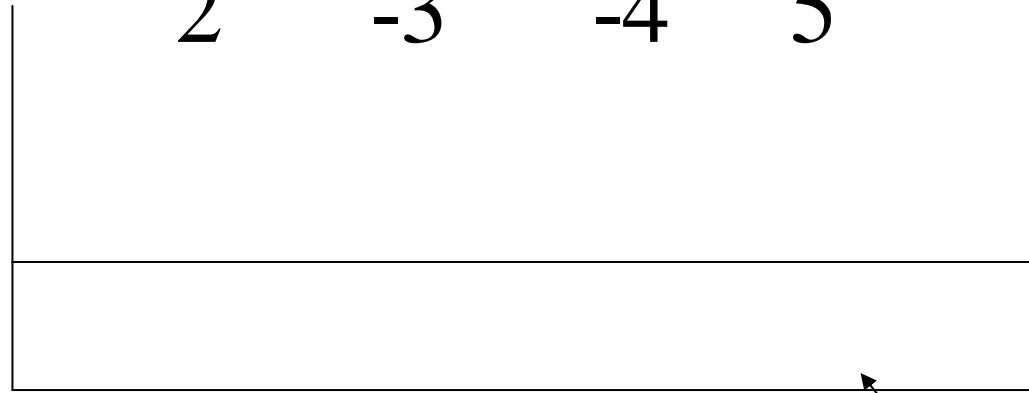
# หารสังเคราะห์ (synthetic division)

หารสังเคราะห์เป็นวิธีหนึ่งที่จะช่วยในการแยกตัวประกอบของพหุนาม โดยใช้เพียงแค่สัมประสิทธิ์หน้า  $x^n$  เท่านั้นมาทำการคำนวณ

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$$2x^3 - 3x^2 - 4x + 5 = 0 \text{ ด้วย } x - 1$$

1      2      -3      -4      5



เศษเหลือ



ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{ด้วย } x - 1$$

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

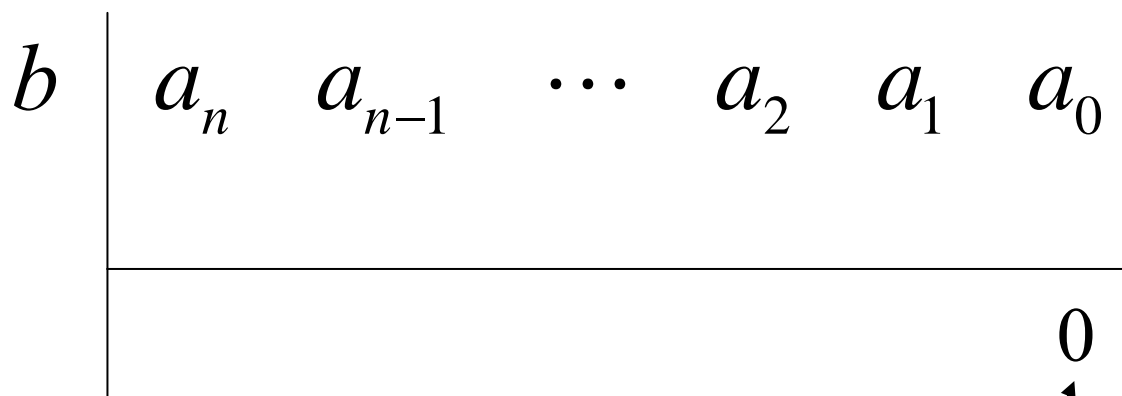
$$x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{ด้วย } x + 1$$

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ที่เทียบเท่ากับการหารพหุนาม

$$x^3 - 1 = 0 \quad \text{ด้วย } x - 1$$

การประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบ

พหุนาม  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$



$B$  เป็นค่าที่ได้จาก

เศษเหลือต้องเป็น 0

ตัวประกอบของ  $a_0$  หารด้วยตัวประกอบของ  $a_n$

จงประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบ

พหุนาม  $x^3 - 2x^2 - x + 2$

จงประยุกต์ใช้หารสังเคราะห์ในการแยกตัวประกอบ

พหุนาม  $2x^3 - 5x^2 - x + 6$

# แบบฝึกหัด

1. จงหาผลหาร และ เศษเหลือที่ได้จากการหารพหุนามต่อไปนี้

1.1       $2x^3 - x^2 - 1$       หารด้วย       $x - 1$

1.2       $2x^3 - x^2 - 1$       หารด้วย       $x + 1$

1.3       $x^5 + x - 4$       หารด้วย       $x - 1$

1.4       $x^5 + x - 4$       หารด้วย       $x + 1$

1.5       $x^5 - 32$       หารด้วย       $x + 3$

## 2. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

2.1  $x^3 - 2x^2 - x + 2$

2.2  $18x^3 - 9x^2 - 5x + 2$

2.3  $x^3 + x^2 - x - 1$

2.4  $x^4 - 25x^2 + 144$

2.5  $x^5 - 32$