สมการเชิงเส้น (Linear equation)

สมการเชิงเส้นคือสมการที่สามารถถูกจัดรูปได้ในรูปแบบต่อไปนี้คือ

$$Ax = B$$

เมื่อ $A \neq 0$ และ B เป็นจำนวนจริงใดๆ และ x ที่ตัวแปร ที่เราต้องการทราบค่า

สมการเชิงเส้น เป็นรูปแบบของระบบสมการที่ง่ายที่สุดที่สามารถหาผลเฉลยได้

สมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรมากกว่า 1

$$Ax + By = C$$

$$Ax + By + Cz = D$$

$$\vdots$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

สังเกตว่าสมการ 1 ตัวแปรเชิงเส้นมีลักษณะเป็น

$$Ax = B$$

ซึ่งสามารถหาผลเฉลยได้ง่ายคือ

$$x =$$

แต่สำหรับสมการเชิงเส้นที่มีตัวแปรมากกว่า 1 กลับมาความยุ่งยากให้การหาผลเฉลย

ในทางคณิตศาสตร์ จึงพยายามจัดรูปให้สมการเชิงเส้น**<u>หลายตัวแปร</u>**อยู่ในลักษณะคล้ายกับรูปแบบของสมการเชิงเส้น 1 ตัวแปร

$$A\overline{x} = B$$

โดยเนื้อหาที่เราจะได้ศึกษาต่อไปนี้จะนำไปสู่สิ่งที่ต้องการได้

เมทริกซ์ (matrix)

(pl. matrices)

เมทริกซ์เป็นรูปแบบหนึ่งของคณิตศาสตร์ ซึ่งมันถูกเขียนอยู่ในรูป

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\left.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\right\}}_{n \text{ หลัก(หรือสดมภ์) (column)}} m \text{ แถว (row)}$$

เราใช้สัญลักษณ์ a_{ij} แทนส่วนประกอบ (component) ในแถว i หลัก j โดย a_{ij} อาจจะเป็นจำนวนนับ จำนวนเต็ม หรือจำนวนจริง ก็ได้

เราเรียกเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถว m แถวและหลัก n หลัก ว่าเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ (m by n matrix)

$\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด

$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด

$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด

เราเรียกเมทริกซ์ที่มีจำนวนหลัก**<u>เท่ากับ</u>**จำนวนแถวว่า

<u>เมทริกซ์จัตุรัส</u> (square matrix)

$[a]$ เมทริกซ์จัตุรัสขนาด 1×1

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์จัตุรัสขนาด 2×2

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์จัตุรัสขนาด 4×4

การเท่ากันของเมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ 2 เมทริกซ์จะเท่ากันได้ก็ต่อเมื่อ

1. เมทริกซ์ทั้งสองมีขนาดเท่ากัน $\left(m = p, n = q\right)$
2. แต่ละส่วนประกอบที่ประจำหลักและแถวเดียวกัน ต้องมีค่าเท่ากัน $\left(a_{ij} = b_{ij}\right)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & p & 2 \\ 3 & q & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & r \\ s & 4 & t \end{bmatrix}$$

การบวกและลบกันของเมทริกซ์

การบวกและลบกันของเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์จะทำได้ก็ต่อเมื่อ **เมทริกซ์ทั้ง 2 มีขนาดเดียวกัน**

และผลลัพท์ที่ได้เป็นเมทริกซ์ที่มี**ขนาดเท่าเดิม** และแต่ละส่วนประกอบมีค่าเท่ากันกับ ผลรวม (หรือผลต่าง) ของส่วนประกอบของเมทริกซ์ทั้งสองที่อยู่แถวและหลักเดียวกัน

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{bmatrix}$$

คุณสมบัติบางประการของเมทริกซ์

ถ้าให้ A,B และ C แทนเมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ แล้ว

1. $A+B=B+A$ (สลับที่การบวก)

2. $(A+B)+C=A+(B+C)$ (เปลี่ยนกลุ่มการบวก)

3. $A+\mathrm{O}=\mathrm{O}+A=A$ (เอกลักษณ์การบวก)

เมื่อ $\mathrm{O}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ หลัก}} \Bigg\} \; m \text{ แถว}$

4. $A+(-A)=\mathrm{O}$ (ผกผันการบวก)

นั่นคือถ้า

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

แล้ว

$$-A=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

5. การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

นั่นคือถ้า

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

แล้ว

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & \pi \\ -2 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ \sqrt{2} & 3 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

แบบฝึกหัด

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

1. จงหาค่า $2A$-$3B$

2. จงหาค่า $10A$- $\frac{1}{2}B$

การคูณเมทริกซ์

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$

B เป็นเมทริกซ์ขนาด $p \times q$

เราจะหาผลคูณของเมทริกซ์ A และ B ได้โดย

AB จะหาได้ก็ต่อเมื่อ $n=p$

BA จะหาได้ก็ต่อเมื่อ $m=q$

ข้อสังเกต

$$A_{m \times n} B_{p \times q} = C_{\square \times \square}$$

ตัวอย่าง

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

จงหา AB และ BA

สังเกตว่าในการคูณเมทริกซ์<u>**ไม่**</u>สามารถสลับที่ได้

$$AB \neq BA$$

แบบฝึกหัด

กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

จงหา $A(BC)$ และ $(AB)C$

สังเกตว่าในการคูณเมทริกซ์สามารถเปลี่ยนกลุ่มได้

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

จงหา $A(B+C)$ และ $AB+AC$

$(B+C)A$ และ $BA+CA$

แบบฝึกหัด

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

จงหา A^4 (หรือก็คือ $AAAA$)

เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix)

เมทริกซ์เอกลักษณ์ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสซึ่งเมื่อคูณเมทริกซ์อื่นที่มีขนาดเท่ากันแล้วได้เมทริกซ์นั้น

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{n} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}\right\} n$$

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

จงหา $A^2 - 3A + I$

เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ของเมทริกซ์ขนาด 4x4

ตัวกำหนดของเมทริกซ์

(determinant)

ตัวกำหนด เป็นฟังก์ชันที่ส่งจากเมทริกซ์จัตุรัส (เมทริกซ์ ขนาด nxn)ไปยังจำนวนจริง สำหรับตัวกำหนดของเมทริกซ์ A มักใช้สัญลักษณ์ $\det A$ หรือ $|A|$

$$\det \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = a$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad\text{-}bc$$

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei\text{-}afh\text{-}bdi+bfg+cdh\text{-}ceg$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

แบบฝึกหัด

จงหาตัวกำหนดของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} -4 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix)

สำหรับเมทริกซ์จัตุรัสที่มีตัวกำหนดมีค่าไม่เป็น **ศูนย์** จะมีเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์ดังกล่าว โดยมีคุณสมบัติคือเมื่อนำไปคูณกับเมทริกซ์นั้น แล้วได้เอกลักษณ์ เราจะสามารถหาเมทริกซ์ดังกล่าวได้เสมอ และมีเพียงหนึ่งเดียว โดยจะเรียกเมทริกซ์นั้นว่า **เมทริกซ์ผกผัน**

เราใช้สัญลักษณ์ A^{-1} แทนเมทริกซ์ผกผันของ A

$$A = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{a} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & x \end{bmatrix}$

x มีค่าเท่าใด จึงทำให้เมทริกซ์ A ไม่สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน (A^{-1}) ได้

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

สรุปการคูณเมทริกซ์

1. $A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p}$

2. $AB \neq BA$

3. $A(BC) = (AB)C$

4. $A(B+C) = AB+AC$ และ

$(B+C)A = BA+CA$

แบบฝึกหัด

1.กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1.1 จงหา ABA

1.2 จงหา BAB

2. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{50} \\ \sqrt{18} & \sqrt{8} \end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{21} \end{bmatrix}$

2.1 จงหาค่า $A+\sqrt{2}B-126C$

2.2 จงหาค่า $A-\sqrt{2}B+126C$